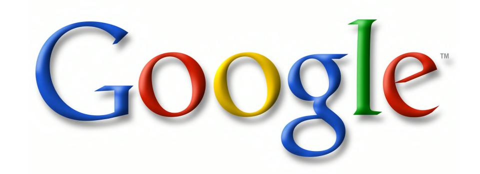


ABX7723
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
010: : |a 07025541//r842
035/1: : |a (RLIN)MIUG84-B63573
035/2: : |a (CaOTULAS)160300294
040: : |a DLC/ICU |c ICU |d MiU
050/1:0 : |a QA36 |b .W4 1903
100:1 : |a Weber, Heinrich, |d 1842-1913.
245:10: |a Encyklopädie der elementar-Mathematik. |b Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. |c Von Heinrich Weber und Josef Wellstein.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1903-07.
300/1: : |a 3 v. |b diagrs. |c 23 cm.
500/1: : |a Each vol. has also special t.-p.
505/2:0 : |a 1. Bd. Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis, bearb. von H. Weber.--2. Bd. Encyklopädie der elementaren Geometrie, bearb. von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal.--3. Bd. Angewandte elementar-Mathematik, bearb. von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber.
650/1: 0: |a Mathematics
700/1:1 : |a Wellstein, Josef, |d 1869-1919.
700/2:1 : |a Jacobsthal, Walther, |d 1876-
700/3:1 : |a Weber, Rudolf H. |q (Rudolf Heinrich), |d 1874-1920.



ENCYKLOPÄDIE

DER

ELEMENTAR-MATHEMATIK.

EIN HANDBUCH FÜR LEHRER UND STUDIERENDE.

VON

HEINRICH WEBER

PROFESSOR IN STRASSBURG

UND

JOSEF WELLSTEIN

PROFESSOR IN STRASSBURG.

IN DREI BÄNDEN.

DRITTER BAND.

ANGEWANDTE ELEMENTAR-MATHEMATIK.

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1907.

ANGEWANDTE
ELEMENTAR-MATHEMATIK.

BEARBEITET

VON

HEINRICH WEBER, JOSEF WELLSTEIN
UND **RUDOLF H. WEBER** (HEIDELBERG).

MIT 358 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Vorrede.

Der hier vorliegende dritte Band der „Encyklopädie der Elementarmathematik“ hat wesentlich den Zweck, aus Nachbarwissenschaften Anwendungen zu den arithmetischen und geometrischen Grundlagen zu liefern, die die beiden ersten Bände geschaffen haben.

Es darf deswegen von vornherein nicht in allen hier berührten Gebieten die Vollständigkeit erwartet werden, die in den ersten Bänden erstrebt ist. Das würde auch, besonders in den physikalischen Teilen, das Buch weit über den gewünschten Umfang erweitert haben.

Aber nicht nur als Anwendung ist der Inhalt dieses Buches gedacht, oder wenigstens nicht in dem Sinne, wie man Lehrbüchern etwa eine Aufgabensammlung als Anhang beifügt. Die Grundlagen, die zu den einzelnen Gebieten überführen, sollten ebenso logisch entwickelt werden, wie die Grundlagen der Arithmetik und der Geometrie selbst; es sollte dem systematischen Vorgehen, wie es im Schulunterricht unerläßlich ist, Rechnung getragen werden; und so ergab es sich von selbst, daß der Band aus wenigen, miteinander zwar in keinem oder nur losem Zusammenhang stehenden, aber je in sich zusammenhängend aufgebauten Abschnitten besteht.

Weder die Auswahl der Abschnitte noch der Gang ihrer Darstellung soll und kann von den Verfassern als Dogma hingestellt werden. Welche Anwendung sich im Unterricht als die zweckmäßigste erweist, wie die Darstellung den Schülern zu übermitteln ist, muß den praktischen Schulmännern überlassen werden.

Was den physikalischen Teil betrifft, so ist zunächst das aufgenommen, was längst Gegenstand des theoretischen Schulunterrichts war, die Mechanik; aber hier ist Wert gelegt auf eine Zuspitzung des ganzen Ganges nach dem wohl dem heutigen Schulunterricht immer noch nicht in seiner Allgemeingültigkeit recht zugänglichen Energieprinzip.

Ein anderer physikalischer Abschnitt richtet sich im wesentlichen an das geometrische Vorstellungsvermögen. Der reine Analytiker wird

vielleicht nicht viel Freude an dem strengen Ausbau einer Kraftlinientheorie haben und ihren Zweck nicht recht verstehen; und doch ist sie im stande, dem geometrisch Veranlagten manche physikalische Erkenntnis weit leichter zugänglich zu machen, als es je dem Analytiker glücken wird.

Faraday, der Erfinder des Kraftlinienbegriffes, selbst in analytischer Behandlung physikalischer Probleme unbewandert, hat sich in ihnen eine eigene Mathematik geschaffen, die seiner intuitiven Denkweise näher lag, und die ihm und der Welt wunderbare Dinge eröffnete.

Freilich Vorsicht ist geboten. Auch falsche Vorstellungen faßt der geometrisch Denkende leichter. Darin ist die analytische Methode im Vorteil.

Auf eins sei hier noch hingewiesen. Man muß sich hüten, in den Kraftlinien etwas anderes zu sehen, als sie wirklich sind, ein mathematischer Hilfsbegriff ohne reelle Bedeutung, dessen Einführung nur durch die aus ihnen gewonnenen mathematischen Ergebnisse gerechtfertigt wird. Ein Wesensunterschied zwischen verschiedenen Kraftlinienkomponenten und ihren Resultierenden, wie er in dem Elektromagnetismus gefordert wird, ist sonst unverständlich.

Was die mathematische Durchführung der physikalischen Teile betrifft, so sei erwähnt, daß mit Bewußtsein „verkappte" Integrale eingeführt sind. Verkappte Integrationen aber sind vermieden, außer wo es sich um die Summierung von Linienelementen handelt. So ist z. B. im Carnotschen Kreisprozeß die Identität zweier Arbeitsintegrale gliedweise bewiesen, abweichend von den sonst gebräuchlichen und nicht elementaren Ableitungen dieses Problems.

Aus diesem Grunde ist nicht das sonst übliche Integralzeichen, in dem der unkundige Leser ein geheimnisvolles Symbol zu erblicken geneigt ist, sondern das Summenzeichen verwendet worden.

Zu dem Begriff der Arbeit stehen die vorkommenden Integrale immer in nächster Beziehung, was ihren Sinn leicht verständlich machen, ihre Einführung leicht vermitteln wird.

Geometrische und arithmetische Anwendungen liefern die folgenden Abschnitte (von H. Weber), die Einführung in die „Theorie der Maxima und Minima", und sie selbst findet eine Anwendung in der Theorie der Kapillarität.

Die „Wahrscheinlichkeitsrechnung" gebraucht als Grundlage eigenartige Vorstellungen; sie sind philosophischer, speziell logischer Art. Die Anwendung, die die Wahrscheinlichkeitsrechnung findet, ist dabei sehr reeller, ja praktischer Natur. Sie enthält die Kritik und Kor-

rektion eines jeden quantitativen Urteils, sei es im alltäglichen Leben, sei es in irgend einer Wissenschaft.

Damit wendet sich der Inhalt des Bandes überhaupt mehr dem praktischen Bedarfe zu. Die „Graphik“ ist für die Technik von Bedeutung. Ihr Unterricht wird nur da erfolgreich sein, wo er gleichzeitig mit zeichnerischen Übungen verknüpft werden kann. Das ist mit berücksichtigt, und z. B. in einem besonderen Paragraphen, die „Technik der darstellenden Geometrie“, zum Ausdruck gebracht.

Den Inhalt dieser Abschnitte über „Graphik“ bilden die darstellende Geometrie und die graphische Statik. Die darstellende Geometrie beginnt mit der schrägen Parallelprojektion, die unabhängig vom Zweitafelsystem behandelt ist. Andererseits ist das Zweitafelsystem möglichst mittels seiner eigenen Methoden begründet, weil die häufige Verwendung von Schrägbildern und Modellen leicht eine gewisse Scheu vor der Anstrengung des Anschauungsvermögens großzieht. Da der darstellenden Geometrie nur ein sehr beschränkter Platz eingeräumt werden konnte, so wurde der Stoff nicht nach Aufgaben, sondern nach Methoden gruppiert. Auf die Lehre von der Krümmung wurde besondere Sorgfalt verwendet.

Von der graphischen Statik ist der Teil, der die Zusammensetzung der Kräfte mittels des Seilecks behandelt, vorweg genommen und zur Einleitung in die Vektoranalysis an die Spitze des Bandes gestellt, um die Wichtigkeit dieses Verfahrens, das nicht bloß der Graphostatiker kennen sollte, mehr hervortreten zu lassen. Von der Einführung der Vektorprodukte wurde Abstand genommen, weil sie im folgenden keine Verwendung finden.

Die graphische Statik selbst mußte auf einige methodisch interessante Paragraphen beschränkt werden. Um die Möglichkeit einer innigen Verschmelzung der Statik mit der Geometrie zu zeigen und die Leser ein wenig auf die Geometrie der Dynamen von Study vorzubereiten, die in vielen Partien durchaus der Elementargeometrie angehört, wurde in die graphische Statik eine statische Ableitung der Grundformeln der Dreieckskoordinaten, unabhängig von rechtwinkligen, eingeflochten, ferner ein Paragraph über Astatik.

Den Beschluß dieses Buches macht ein Abschnitt über das ebene Fachwerk. Als eine einfache graphische Lösungsmethode linearer Gleichungssysteme gehört die Lehre vom Fachwerk zu den schönsten Teilen der Elementargeometrie. Dabei ist es durchaus nicht nötig, sich auf die rein äußerliche Erklärung der Konstruktionsverfahren zu beschränken; vielmehr wurde versucht, den Leser bis zu den Fragestellungen der höheren Fachwerktheorie heranzuführen. Die Arbeitsgleichung bei elastischer Deformation und

der fundamentale Satz von Maxwell bilden den Höhepunkt der Theorie; sie sind ohne Benutzung des Prinzips der virtuellen Verrückungen abgeleitet, einzig auf Grund des Satzes von den statischen Momenten.

Im darstellend geometrischen Teile des vierten Buches konnte der Verfasser (Wellstein) Methoden und Gedanken verwerten, die er als Schüler und Assistent von F. Schur kennen gelernt, was hiermit mit dem Ausdrucke des herzlichsten Dankes hervorgehoben sei.

Auch der Verlagsfirma sind wir für ihr großes Entgegenkommen und ihre nie versagende Geduld zu großem Danke verpflichtet. Sie hat keine Kosten gescheut, um das Werk mit einer Fülle von Figuren auszustatten, deren Herstellung eine außerordentliche Arbeit bereitete.

Heidelberg, im April 1907.

Rudolf H. Weber.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Buch.

Mechanik.

Erster Abschnitt.

Vektorgeometrie.

(Von Josef Wellstein.)

Zweiter Abschnitt.

Analytische Statik.

(Von Rudolf H. Weber.)

Dritter Abschnitt.

Dynamik.

(Von Rudolf H. Weber.)



Zweites Buch.

Elektrische und magnetische Kraftlinien.

(Von Rudolf H. Weber.)

Vierter Abschnitt.

Elektrizität und Magnetismus.

Fünfter Abschnitt.

Elektromagnetismus.



Drittes Buch.

Maxima und Minima.

(Von Heinrich Weber.)

Sechster Abschnitt.

Geometrische Maxima und Minima.

Siebenter Abschnitt.

Anwendung der Lehre vom Größten und Kleinsten auf die Lehre vom Gleichgewicht und besonders der Kapillarität.

Viertes Buch.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(Von Heinrich Weber.)

Achter Abschnitt.

Prinzipien der Wahrscheinlichkeit.



Neunter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Zehnter Abschnitt.

Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

Fünftes Buch.

Graphik.

(Von Josef Wellstein.)

Elfter Abschnitt.

Parallelprojektion auf eine Tafel.

Zwölfter Abschnitt.

Das Grund- und Aufrißverfahren.



Dreizehnter Abschnitt.

Graphische Statik.

Vierzehnter Abschnitt.

Das ebene Fachwerk.

ERSTES BUCH.

MECHANIK.

Erster Abschnitt.

Vektorgeometrie.

§ 1. Freie Vektoren.

1. Eine Strecke AB auf einer Geraden x kann von einem beweglichen Punkte in zwei verschiedenen „Sinnen" oder „Richtungssinnen" durchlaufen werden, die wir mit (A, B) und (B, A) bezeichnen wollen (Fig. 1). Zwei in dem „Sinne" (A, B) und (C, D) genommene Strecken AB und CD der Geraden x haben gleichen Sinn, wenn ein Punkt, der die Gerade ohne umzukehren stetig durchläuft, beide Strecken in ihrem Sinne oder beide gegen ihren Sinn durchläuft; andernfalls haben sie entgegengesetzte Sinne.

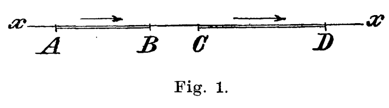


Fig. 1.

2. Ein Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 2) bestimmt zwei entgegengesetzte „Sinne", in denen ein Punkt seinen Umfang stetig durchlaufen kann ohne umzukehren, nämlich die Sinne (A, B, C, D) und (D, C, B, A). Der Umkehrung des Umlaufssinnes entspricht auch die Umkehrung des Sinnes jeder Seite. Durchläuft ein Punkt P den Umfang des Parallelogramms im einen oder anderen Sinne, so wird der Halbstrahl MP, der vom Mittelpunkt des Parallelogramms nach P geht, sich um M im einen oder anderen Sinne drehen. Es ist oft wünschenswert, den Drehungen in einer Ebene, der Zeichenebene, bestimmte Vorzeichen zuzuordnen. Betrachtet man die Zeichenebene, wie gewöhnlich, immer von der einen Seite, auf der man zeichnet, so soll eine in ihr stattfindende Drehung positiv oder negativ genannt werden, je nachdem sie gegen oder mit dem Sinne der Uhrzeigerdrehung erfolgt. Errichtet man auf der Schriftseite der Ebene eine

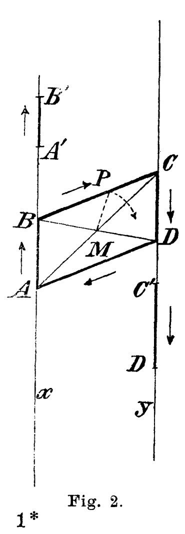


Fig. 2.

Normale, so ist positive Drehung so viel als Rechtsdrehung im Sinne des § 84 des zweiten Bandes.

3. Die Sinne (A', B') und (C', D') zweier paralleler Strecken $A'B'$ und $C'D'$ auf zwei Geraden x, y definieren wir als entgegengesetzt oder als gleich, je nachdem zwei einander kongruente Strecken AB und CD von x und y, die mit $A'B'$ bezw. $C'D'$ im Sinne übereinstimmen, in der Reihenfolge AB, BC, CD, DA verbunden ein Parallelogramm ergeben oder nicht.

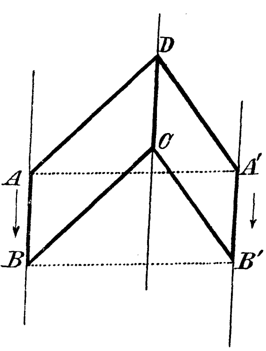


Fig. 3.

4. Seien (Fig. 3) AB, $A'B'$ und DC drei kongruente, auf parallelen Geraden gelegene Strecken und der Sinn (D, C) sowohl dem Sinne (A, B) als dem Sinne (A', B') gleich, dann ist (C, D) sowohl dem Sinne (A, B) als dem Sinne (A', B') entgegengesetzt und folglich (A, B, C, D) und (A', B', C, D) der Umlaufssinn je eines Parallelogramms (während z. B. (A, B, D, C) keinem Parallelogramm zugehört). Jetzt ist auch $AA' \parallel BB'$ und $ABB'A'$ ein Parallelogramm, folglich sind die Sinne (A, B) und (A', B') einander gleich, d. h.: Wenn zwei parallele Strecken mit einer dritten zu ihnen parallelen Strecke im Sinn übereinstimmen, so stimmen sie auch untereinander im Sinn überein.

5. Unter einem freien Vektor $\mathfrak{a}$ verstehen wir eine Strecke von bestimmter Länge a, von bestimmter Richtung und bestimmtem Sinn, die aber im übrigen frei beweglich ist, d. h. durch jede andere Strecke ersetzt werden kann, die mit ihr in diesen drei Bestimmungsstücken übereinstimmt. Dabei wollen wir, wie üblich, zwei Geraden gleiche Richtung zuschreiben, wenn sie parallel sind. Mitunter wird unter dem Wort Richtung auch der Sinn mit einbegriffen und, man spricht dann wohl auch von Pfeilrichtung. Zwei Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heißen einander nur dann gleich, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, wenn sie in Länge und Pfeilrichtung übereinstimmen; wir sagen dann auch, es seien dieselben Vektoren. Zwei Vektoren heißen entgegengesetzt, wenn sie parallel und kongruent sind, aber entgegengesetzten Sinn haben; den zu $\mathfrak{a}$ entgegengesetzten Vektor bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{a}}$. Die Vektoren werden auch Richtungsgrößen, oder gerichtete Strecken, Stäbe u. s. w. genannt.

Wenn ein von den Punkten A, B begrenzter Vektor $\mathfrak{a}$ oder $\boldsymbol{AB}$ den Sinn (A, B) hat, so heißt A sein Anfangspunkt, B sein Endpunkt.

Soll eine Strecke AB als Vektor aufgefaßt werden, so bezeichnen wir sie mit $\boldsymbol{AB}$; um einen Vektor durch ein einziges Zeichen auszudrücken, bedienen wir uns der Frakturbuchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$; unter $a, b, c, \ldots$ verstehen wir dann die (absoluten) Längen dieser Vektoren.

6. Unter der geometrischen Summe $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ von n Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$, zunächst in dieser bestimmten Reihenfolge, verstehen wir einen Vektor $\boldsymbol{OA}_n$, den man erhält, indem man von irgend einem Punkte O ausgehend $\boldsymbol{OA}_1 = \mathfrak{a}_1$, $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \mathfrak{a}_2$, $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3 = \mathfrak{a}_3, \ldots$, $\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{A}_n = \mathfrak{a}_n$ anträgt (Fig. 4). Konstruiert man, von einem anderen Punkte O' ausgehend, ebenso $\boldsymbol{O'A}_1' = \mathfrak{a}_1$, $\boldsymbol{A}_1'\boldsymbol{A}_2' = \mathfrak{a}_2, \ldots$, $\boldsymbol{A}_{n-1}'\boldsymbol{A}_n' = \mathfrak{a}_n$, so ist $\boldsymbol{O'A}_n' = \boldsymbol{OA}_n$. Dabei ist durchaus nicht etwa vorausgesetzt, daß die Vektoren alle in einer Ebene liegen müssen; liegt die Figur $OA_1A_2 \ldots A_n$, das Summationseck, nicht in einer Ebene, so sei Figur 4 eine Parallelprojektion der räumlichen Figur. Aus der Definition der Gleichheit des Sinnes von Vektoren folgt, daß $OA_1A_1'O'$, $A_1A_2A_2'A_1', \ldots$, $A_{n-1}A_nA_n'A_{n-1}'$ Parallelogramme sind; daher ist $\boldsymbol{OO'} = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1' = \cdots = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{A}_n'$, also $OA_nA_n'O'$ ein Parallelogramm und daher $\boldsymbol{OA}_n = \boldsymbol{O'A}_n'$, w. z. b. w. Die Gerade OA_n heißt Schlußseite oder Schlußlinie des Summationsecks.

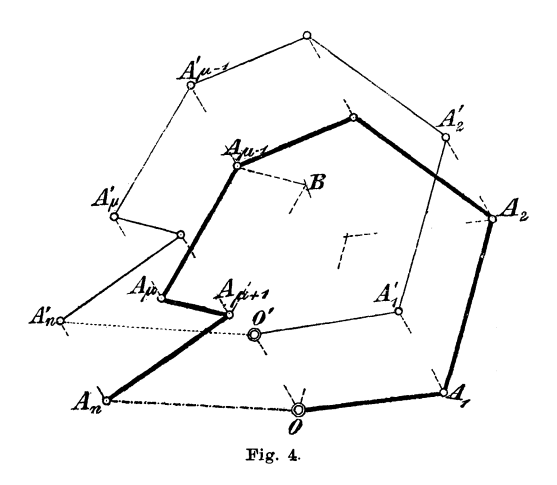


Fig. 4.

7. Ändert man in der Summe $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_\mu + \mathfrak{a}_{\mu+1} + \cdots + \mathfrak{a}_n$ die Reihenfolge von zwei nebeneinander stehenden Summanden, wie $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, oder $\mathfrak{a}_\mu$ und $\mathfrak{a}_{\mu+1}$, so stimmt das zugehörige, von O ausgehende Summationseck mit dem obigen bis auf zwei Seiten überein, wie in Figur 4 für die Vertauschung von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ sowie von $\mathfrak{a}_\mu$ und $\mathfrak{a}_{\mu+1}$ angedeutet ist. Im letzten Falle ist nämlich von Figur 4 der Teil $OA_1A_2 \ldots A_{\mu-1}$ ohne weiteres brauchbar; darauf hat man $\boldsymbol{A}_{\mu-1}\boldsymbol{B} = \mathfrak{a}_{\mu+1}$ zu machen; daher ist $BA_{\mu-1}A_\mu A_{\mu+1}$ ein Parallelogramm und $\boldsymbol{BA}_{\mu+1} = \boldsymbol{A}_{\mu-1}\boldsymbol{A}_\mu = \mathfrak{a}_\mu$ die nächste Seite des neuen Summationspolygons, das von $A_{\mu+1}$ bis A_μ wieder mit dem ursprünglichen identisch ist. Der Vektor $\boldsymbol{OA}_n$ wird also nicht ge-

ändert, wenn man zwei nebeneinander stehende Summanden in $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ vertauscht.

8. Daraus folgt aber sofort der Hauptsatz der geometrischen Summation:

> Die geometrische Summe von n Vektoren ist von der Reihenfolge der Vektoren unabhängig.

Der Übergang von der Reihenfolge $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n$ zu $\mathfrak{a}_{\nu_1} + \mathfrak{a}_{\nu_2} + \cdots + \mathfrak{a}_{\nu_n}$, wo also $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ eine Umstellung der n Zahlen $(1, 2, \ldots, n)$ ist, kann nämlich immer so vollzogen werden, daß man in der Folge $(1, 2, \ldots, n)$ zwei nebeneinander stehende Elemente vertauscht, in der so erhaltenen Folge wieder zwei, dann wieder zwei u. s. w., bis man nach einer endlichen Zahl von Vertauschungen nebeneinander stehender Elemente zur Anordnung $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ gelangt. Ist ν_1 nicht schon mit 1 identisch, sondern etwa mit der r^{ten} Zahl der Reihe $(1, 2, \ldots, r, \ldots, n)$, so vertausche man in dieser die r^{te} Zahl mit der links vorangehenden, in der neuen Folge die $r - 1^{\text{te}}$ Zahl mit der vorangehenden, in der neuen Folge die $r - 2^{\text{te}}$ Zahl mit der vorangehenden u. s. w., bis nach r Schritten die Zahl $r = \nu_1$ an den Anfang gerückt ist. Mit den übrigen $n - 1$ Zahlen hat man dann ähnlich zu verfahren, um ν_2 an die zweite Stelle zu bringen, u. s. w. Nach dem Schlußsatze des Art. 7 bleibt bei allen diesen Vertauschungen der Vektor $\boldsymbol{OA}_n$ ungeändert, wenn man nur den Anfangspunkt O der Summationsecke festhält, und damit ist der Hauptsatz bewiesen.

9. Wir ändern jetzt den Gleichheitsbegriff der (freien) Vektoren, oder vielmehr, wir werden im eigentlichen Sinne nicht mehr von gleichen Vektoren, sondern nur noch von gleichen Summen sprechen, indem wir definieren: $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \cdots + \mathfrak{b}_m$, wenn beide Summationen zwei im Sinne der früheren Definition gleiche Vektoren ergeben. Das Gleichheitszeichen besagt jetzt so viel als: „ergibt denselben Vektor wie die Summation ...". Dieser neuen Auffassung läßt sich aber die alte unterordnen durch Einführung des uneigentlichen Vektors $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$, der aus der Summe zweier entgegengesetzter Vektoren gebildet ist. Macht man, um die geometrische Summe zu erhalten, $\boldsymbol{OA} = \mathfrak{a}$, $\boldsymbol{AB} = \bar{\mathfrak{a}}$, so fällt B mit O zusammen, und der Vektor $\boldsymbol{OB}$, der die Summe $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}}$ darstellt, erhält die Länge Null, während Richtung und Sinn unbestimmt bleiben. Wir bezeichnen diesen Vektor mit Null und setzen $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b} + \bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{o}$, indem wir alle Vektoren Null als gleich betrachten. Daher ist $\mathfrak{c} + \mathfrak{o} = \mathfrak{c}$, da die Summationen links und rechts denselben Vektor $\mathfrak{c}$ ergeben.

Da nun offenbar die Operation $+(\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}})$ das Ergebnis einer Summation nicht ändert, sondern nur die Art seiner Entstehung, auf die es nicht ankommt, so dürfen entgegengesetzte Vektoren in einer Summe nach Belieben weggelassen oder eingefügt werden. Betrachtet man jetzt den Vektor $\mathfrak{c}$ als uneigentliche Summe $\mathfrak{c}+\mathfrak{a}+\bar{\mathfrak{a}}$, so erscheint auch $\mathfrak{c}$ als Ergebnis einer Operation, allerdings der Identitätssetzung, und man kann in diesem Sinne auch $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$ aussagen. Ob man die Gleichung $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$ auf diesem Wege einführt oder noch in die Definition verlegt, jedenfalls muß man sich bewußt werden, daß in dieser Gleichung das Zeichen = unmittelbar nicht dasselbe sagt wie in der Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}$, die gilt, wenn die Summation rechts und links denselben Vektor ergeben. Ist $\mathfrak{a}$ der die Summe $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\cdots+\mathfrak{a}_n$ darstellende Vektor, also $\mathfrak{a}=\boldsymbol{OA}_n$ (Fig. 4), so dürfen wir nunmehr

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2+\cdots+\mathfrak{a}_n=\mathfrak{a}$$

setzen, eine Gleichung, die aussagt, daß die Summation links denselben Vektor $\mathfrak{a}$ ergibt wie die Identitätssetzung der rechten Seite. Deutet man diese Gleichung, wie es auch wohl üblich ist, dahin, daß die Operation links den Vektor $\mathfrak{a}$ „als Resultat ergibt", so könnte man eine Gleichung wie $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{c}+\mathfrak{d}+\mathfrak{e}$ ohne eine Erweiterung dieser Definition nicht lesen.

Auf alle Fälle liegt also eine Änderung der ursprünglichen Begriffe vor. Die alte Definition, daß gleich sei, was sich in allen Urteilen gegenseitig vertreten könne, ist wissenschaftlich unbrauchbar, erstens, weil man nicht alle Urteile im voraus kennt, der Begriff der Gleichheit also vor allen Urteilen feststehen muß, wenn er zum Hilfsmittel der Erkenntnis werden soll; zweitens, weil im Sinne dieser Definition nicht einmal $1+1=2$ ist. Denn in dem Urteile „$1+1$ ist ein Binom" kann $1+1$ nicht durch 2 ersetzt werden Gleichheit gibt es immer nur, wie die mittelalterlichen Philosophen es ausdrückten, „secundum aliquid", d. h. unter einem ganz bestimmten Gesichtspunkte, im vorliegenden Falle unter dem der geometrischen Summation, und in dieser einen Beziehung ist Gleichheit so viel wie Identität, im vorliegenden Falle Identität der Schlußseiten des Summationsecks.

Die zahlreichen Gleichheitsbegriffe, die man in der Mathematik immer wieder mit demselben Zeichen = bezeichnet, stimmen alle darin überein, daß aus $A=B$, $B=C$ immer $A=C$ folgt. So ist es offenbar auch bei der Summation der Vektoren.

§ 2. Gebundene Vektoren an demselben Angriffspunkte.

1. Bis jetzt waren alle Vektoren frei, d. h. unter Wahrung von Länge, Richtung und Sinn beliebig verschiebbar, und alle in diesen drei Bestimmungsstücken übereinstimmenden Vektoren galten als gleich, Ein Vektor $\mathfrak{a}$ heißt an einen Punkt O, seinen „Angriffspunkt". „gebunden", wenn O die einzige mögliche Lage des Anfangspunktes von $\mathfrak{a}$ ist. Den an O gebundenen Vektor $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir mit $(\mathfrak{a}, O)$, lies „$\mathfrak{a}$ an O". Zwei derartige Vektoren $(\mathfrak{a}, O)$ und $(\mathfrak{a}', O')$ sollen nur dann gleich heißen, wenn O' mit O zusammenfällt und $\mathfrak{a}'$ als freier Vektor gleich $\mathfrak{a}$ ist. Um die zwei Arten der Gleichheit, um die es sich hier handelt, die Gleichheit freier und die Gleichheit gebundener Vektoren, wenigstens für den Anfang scharf auseinander zu halten, wollen wir bei gebundenen Vektoren lieber von Äquivalenz sprechen und uns des Äquivalenzzeichens $\simeq$ statt des Gleichheitszeichens bedienen. Nach Definition ist also $(\mathfrak{a}, O) \simeq (\mathfrak{a}', O')$, wenn $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ und O mit O' zusammenfällt. Genau wie in Artikel 9 des § 1 erweitern wir sofort den Äquivalenzbegriff, indem wir die Summation gebundener Vektoren vom Typus $(\mathfrak{a}, O)$ definieren durch

$$(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O)$$

für

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n,$$

d. h. die an denselben Angriffspunkt gebundenen Vektoren werden wie freie Vektoren summiert, die erhaltene Summe $\mathfrak{a}$ aber wieder an O gebunden. Das geschieht nach § 1 mit Hilfe eines Summationsecks $OA_1A_2 \ldots A_n$, dessen Anfangspunkt man am praktischsten mit O zusammenfallen läßt; die Schlußlinie OA_n des Summationsecks stellt dann den Vektor $(\mathfrak{a}, O)$ in richtiger Lage dar.

2. Nach dem Hauptsatze der Summation freier Vektoren ist auch die Summe an denselben Angriffspunkt gebundener Vektoren von der Reihenfolge der Summation unabhängig, d. h. es gilt bei der Addition das kommutative Gesetz.

Es gilt ferner auch das assoziative Gesetz, das wir ganz allgemein so aussprechen können: Teilt man das System $(\mathfrak{a}_1, O)$, $(\mathfrak{a}_2, O), \ldots, (\mathfrak{a}_n, O)$ in r Gruppen von beliebiger Anordnung und beliebigem Umfang, und bildet man erst die Summe jeder dieser Gruppen, so ist die Summe dieser Teilsummen der Gesamtsumme $(\mathfrak{a}, O)$ des Systems äquivalent. Denn sind etwa

$(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k)$, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$, $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, $\ldots$, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s)$ die Indizes der $\mathfrak{a}$ in diesen r Gruppen und $OK_1K_2 \ldots K_kL_1L_2 \ldots L_lM_1M_2 \ldots M_mS_1S_2 \ldots S_s$ das Summationseck der n Vektoren in dieser Anordnung, also z. B. $\boldsymbol{OK_1} = \mathfrak{a}_{\varkappa_1}$, $\boldsymbol{L_2L_3} = \mathfrak{a}_{\lambda_3}$, $\ldots$, so ist $OK_1K_2 \ldots K_k$ ein Summationseck der ersten Gruppe, $K_kL_1L_2 \ldots L_l$ ein solches der zweiten, $\ldots$, und die Gesamtsumme $\boldsymbol{OS_s}$ der n Vektoren wird auch erhalten durch Summierung der Vektoren $\boldsymbol{OK_k}$, $\boldsymbol{K_kL_l}$, $\boldsymbol{L_lM_m}$, $\ldots$. Denkt man diese an O gebunden, so ist also in der Tat $\boldsymbol{OS_s} \simeq \sum_{\varkappa}(\mathfrak{a}_\varkappa, O) + \sum_{\lambda}(\mathfrak{a}_\lambda, O) + \cdots$, w. z. b. w.

3. Wenn die letzte Ecke A_n des Summationsecks $OA_1 \ldots A_n$ von n Vektoren $(\mathfrak{a}_1, O), \ldots, (\mathfrak{a}_n, O)$ mit der ersten Ecke O zusammenfällt, wenn also $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ ist, so ist $(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{o}, O)$ der an O gebundene Vektor Null.

Fügt man einem System an O gebundener Vektoren noch beliebig viel Systeme der Art $(\mathfrak{o}, O)$ bei, so wird die Summe nicht geändert, denn das ursprüngliche Summationseck $\mathfrak{S}$ wird dann nur durch Zusatzseiten erweitert, die von einer Ecke von $\mathfrak{S}$ ausgehen und zu ihr zurückkehren. — Wir beschränken uns von nun an auf Vektoren, die in einer Ebene liegen.

4. Während so die Summation von Vektoren an demselben Angriffspunkte eine durchaus eindeutige Lösung hat, zu der man allerdings auf unbegrenzt viele Weisen gelangen kann, ist die umgekehrte Aufgabe, einen gegebenen Vektor $(\mathfrak{a}, O)$ als Summe von n (unbekannten) Vektoren $(\mathfrak{a}_1, O), \ldots, (\mathfrak{a}_n, O)$ von gegebenen Richtungen an demselben Anfangspunkte O darzustellen, wie man sofort sieht, für $n \geqq 3$ unbestimmt; man kann dann noch die Längen von $n-2$ Summanden willkürlich vorschreiben. Sind es etwa die $n-2$ letzten und ist $(\mathfrak{b}, O)$ ihre Summe, so hat man noch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ aus

$$(\mathfrak{a}, O) \simeq (\mathfrak{b}, O) + (\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O)$$

zu bestimmen. Wären $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bekannt, so hätte man zur Ermittelung von $\mathfrak{a} = \boldsymbol{OA}$ erst $\boldsymbol{OB} = \mathfrak{b}$, $\boldsymbol{BC} = \mathfrak{a}_1$, $\boldsymbol{CA} = \mathfrak{a}_2$ abzutragen; daraus folgt: man mache $\boldsymbol{OB} = \mathfrak{b}$, $\boldsymbol{OA} = \mathfrak{a}$ und ziehe durch B eine Parallele zur gegebenen Richtung von $\mathfrak{a}_1$, durch A eine Parallele zur gegebenen Richtung von $\mathfrak{a}_2$. Ist C der Schnittpunkt dieser Parallelen, so ist $\mathfrak{a}_1 = \boldsymbol{BC}$, $\mathfrak{a}_2 = \boldsymbol{CA}$, und damit ist die Aufgabe der Vektorenzerlegung in diesem Falle gelöst. Die Richtungen von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ dürfen nicht übereinstimmend angenommen werden.

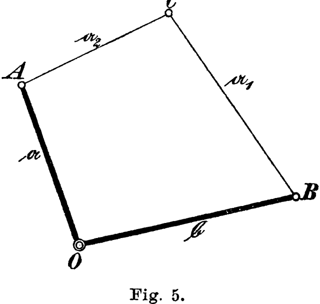


Fig. 5.

Soll $(\mathfrak{a}, O)$ nur in Vektoren von zwei verschiedenen Richtungen x und y zerlegt werden, so ziehe man durch O sowie durch den Endpunkt A von $(\mathfrak{a}, O)$ zu diesen Richtungen die Parallelen. Die in O aneinander stoßenden Seiten $\boldsymbol{OX}$, $\boldsymbol{OY}$ des so entstandenen Parallelogramms lösen dann die Aufgabe. Dieselbe hat also nur eine Lösung: $\boldsymbol{OA} \simeq \boldsymbol{OX} + \boldsymbol{OY}$; die Vektoren $\boldsymbol{OX}$, $\boldsymbol{OY}$ heißen die Komponenten von $\boldsymbol{OA}$ oder $(\mathfrak{a}, O)$ in der x- und in der y-Richtung. Steht y auf x senkrecht, so ist die x-Komponente OX einfach die senkrechte Projektion von OA auf x.

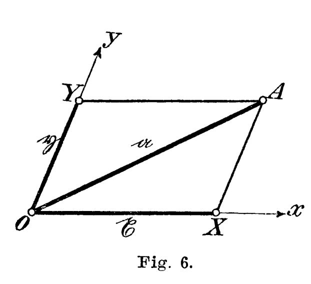


Fig. 6.

Man benutzt die Zerlegung der an O gebundenen Vektoren in zwei durch O gehende Komponenten zur analytischen Behandlung der Geometrie der Vektoren, die in einer Ebene (x, y) liegen. Der Vektor $(\mathfrak{a}, O)$ wird dann durch seine beiden Komponenten $(\mathfrak{x}, O)$, $(\mathfrak{y}, O)$, wo $\mathfrak{x} = \boldsymbol{OX}$, $\mathfrak{y} = \boldsymbol{OY}$, festgelegt und die weitere Untersuchung nur an den Komponenten geführt. Sind $(\mathfrak{x}_\nu, O)$, $(\mathfrak{y}_\nu, O)$ die Komponenten von $(\mathfrak{a}_\nu, O)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, so hat der Summenvektor

$$(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O),$$

den wir mit $(\mathfrak{a}, O)$ bezeichnen wollen, die Komponenten:

$$(\mathfrak{x}, O) \simeq (\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \cdots + \mathfrak{x}_n, O),$$
$$(\mathfrak{y}, O) \simeq (\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2 + \cdots + \mathfrak{y}_n, O),$$

wie ein Blick auf Figur 7 zeigt. Der Summation oder Zusammensetzung der Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, O)$ entspricht also die algebraische (auf das Vorzeichen Rücksicht nehmende) Addition der Komponenten $\mathfrak{x}_\nu$ und $\mathfrak{y}_\nu$. Man wird bemerken, wenn y senkrecht auf x angenommen wird, daß die an O gebundenen Vektoren der (x, y)-Ebene sich summieren wie komplexe Zahlen $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ in der komplexen Zahlenebene. Der komplexen Zahl z_ν entspricht der Vektor $(\mathfrak{a}_\nu, O) \simeq (\mathfrak{x}_\nu, O) + (\mathfrak{y}_\nu, O)$ (vgl. Bd. I, 1. Aufl., § 47; 2. Aufl., § 51).

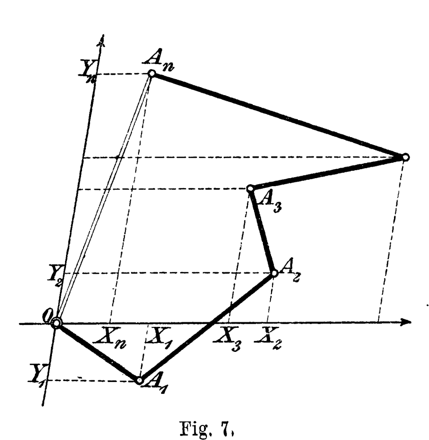


Fig. 7.

5. Ein Vektor bestimmt zu jedem Punkte P, der nicht auf ihm liegt, in eindeutiger Weise einen „Drehsinn", den wir den Drehsinn des Vektors in O nennen; legt man nämlich

in der durch P und den Vektor gehenden Ebene einen Kreis um P als Zentrum und ordnet man jedem Punkte C des Vektors den auf dem Halbstrahl PC liegenden Kreispunkt C' zu, so wird, wenn C den Vektor in seinem Sinne durchläuft, C' den Kreis ebenfalls in einem bestimmten Sinne durchlaufen. Dieser Sinn wird für alle konzentrischen Kreise derselbe sein, entweder bei allen Kreisen dem Uhrzeiger folgen oder ihm entgegengehen. Dem einen Drehsinne ordnet man eines der Zeichen + oder — zu, dem anderen das entgegengesetzte, was in der Figur 8 durch eine kleine Marke in der Weise geschehen ist, daß der Drehung gegen den Uhrzeigersinn das Pluszeichen entspricht (§ 1, 2.). An dieser Festsetzung wollen wir festhalten. Drehung gegen den Uhrzeigersinn heißt nach § 1, 2. positiv, in dem Uhrzeigersinn negativ.

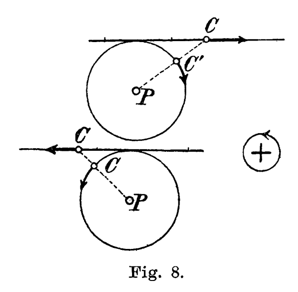


Fig. 8.

Unter dem Drehmoment des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ in dem Punkte P versteht man das Produkt aus der (positiven) Länge a des Vektors und dem (positiven) Abstande des Punktes von $\mathfrak{a}$, versehen mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem der Vektor positive oder negative Drehung um P bestimmt. Für die analytische Behandlung ist es bequemer, sich den Sachverhalt so zu denken, daß die Länge a des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ positiv, der Abstand $\mathfrak{a}^P$ des Punktes P von $\mathfrak{a}$ dagegen positiv oder negativ genommen wird, je nachdem der Vektor um P positive oder negative Drehung bestimmt. Den so definierten Abstand a^P nennen wir den Dreharm des Vektors in P. Das Drehmoment des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ im Punkte P ist dann gleich dem Produkte aa^P aus der Länge und dem Dreharm des Vektors in P.

6. Geometrisch läßt sich das Moment aa^P, abgesehen vom Vorzeichen, deuten als doppelter Inhalt des Dreiecks OAP, das der Punkt mit dem Vektor $(\mathfrak{a}, O) \simeq \boldsymbol{OA}$ bestimmt. Wir nehmen jetzt zwei Vektoren $(\mathfrak{a}, O) \simeq \boldsymbol{OA}$ und $(\mathfrak{b}, O) \simeq \boldsymbol{OB}$ an, um ihre Momente in einem derselben Ebene angehörigen Punkte P zu vergleichen mit dem Momente des Vektors $\boldsymbol{OC} \simeq \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$. Bestimmen alle drei Vektoren in P negative Drehung (wie in Fig. 9), so sind die Abstände a^P, b^P, c^P negativ und daher:

$$-aa^P = 2 \times \text{Dreieck } OAP = OP \cdot h_A,$$
$$-bb^P = 2 \times \text{Dreieck } OBP = OP \cdot h_B,$$
$$-cc^P = 2 \times \text{Dreieck } OCP = OP \cdot h_C,$$

wo h_A, h_B, h_C die positiven Abstände der Punkte A, B, C von OP bezeichnen. Nun ist aber, wie in der Figur 9 ersichtlich gemacht ist,

(1) $$h_C = h_A + h_B,$$

also ist

(2) $$a a^P + b b^P = c c^P.$$

Bestimmen die drei Vektoren in P positive Drehung, so gilt die Formel (1) ebenfalls; denn kehrt man den Sinn von $(\mathfrak{a}, O)$ und $(\mathfrak{b}, O)$ in $(\bar{\mathfrak{a}}, O)$ und $(\bar{\mathfrak{b}}, O)$ um, so kehrt sich auch der von $(\mathfrak{c}, O)$ um, die Vektoren

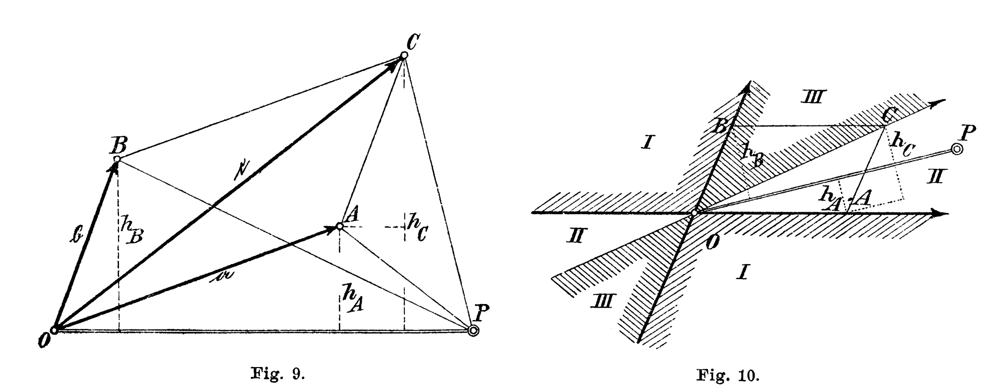


Fig. 9. Fig. 10.

bestimmen dann in O negative Drehung, und es ist $a\bar{a}^P + b\bar{b}^P = c\bar{c}^P$. Da aber $\bar{a}^P = -a^P$, $\bar{b}^P = -b^P$, $\bar{c}^P = -c^P$, so bleibt Formel (1) auch in diesem Falle richtig und gilt folglich in dem Gebiete I der Figur 10.

Ist in P der Drehsinn von $(\mathfrak{a}, O)$ positiv, der von $(\mathfrak{b}, O)$ und $(\mathfrak{c}, O)$ negativ, so sind in (1) h_B, h_C durch $-h_B$, $-h_C$ zu ersetzen (Fig. 10). Da jetzt aber $bb^P = -OP \cdot h_B$, $cc^P = -OP \cdot h_C$ wird, so bleibt (2) richtig. Kehrt man, wie soeben, den Sinn von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ um, so bleibt (2) immer noch bestehen und gilt somit auch im Gebiete II der Figur. Da $\mathfrak{a}$ vor $\mathfrak{b}$ keinen Vorzug hat, so gilt sie auch im dritten Gebiete der Figur und damit allgemein.

7. Diese Formel läßt sich noch verallgemeinern. Ist in einer Ebene

$$(\mathfrak{a}_1, O) + (\mathfrak{a}_2, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O)$$

gegeben und $(\mathfrak{c}_\nu, O) \simeq (\mathfrak{a}_1, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_\nu, O)$, so ist nach (2):

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P = c_2 c_2^P, \quad c_2 c_2^P + a_3 a_3^P = c_3 c_3^P, \ldots,$$
$$c_{n-1} c_{n-1}^P + a_n a_n^P = c_n c_n^P = a a^P,$$

also

(3) $$a a^P = a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P,$$
$$a = | \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n |,$$

wenn allgemein $|\mathfrak{z}|$ die Länge von $\mathfrak{z}$ bezeichnet. So ergibt sich der „Momentensatz“:

Das Moment einer Summe von Vektoren an demselben Angriffspunkte und in derselben Ebene, bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt P in dieser Ebene, ist gleich der Summe der Momente der einzelnen Summanden, bezogen auf denselben Drehpunkt.

Es kann nicht beirren, daß hier das Wort Summe das eine Mal eine geometrische, im zweiten eine algebraische Summe bedeutet, da Vektoren nicht algebraisch, Momente nicht geometrisch summiert werden; in der vorgetragenen Form prägt sich der Satz am leichtesten dem Gedächtnis ein.

8. Wie man auf Grund der Ausführungen des Artikel 4 die Länge des Vektors $(\mathfrak{a}, O)$ aus den Komponenten $\mathfrak{x}_\nu$, $\mathfrak{y}_\nu$ der Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, O)$ berechnet, wenn noch die Neigungswinkel der $\mathfrak{a}_\nu$ gegen die x gegeben sind, kann man aus Bd. II, § 58, 1. unmittelbar ersehen. Erinnert man sich, daß die Hessesche Normalform der Gleichung einer Geraden $\mathfrak{a}$ in einer Ebene η, wenn man die Koordinaten x, y eines nicht auf $\mathfrak{a}$ liegenden Punktes P einsetzt, den Abstand dieses Punktes P von $\mathfrak{a}$ mit einem bestimmten Vorzeichen angibt (Bd. II, § 57), so wird man auf eine einfache analytische Darstellung des Dreharmes und des Momentes geführt, die wir noch in bequemere Form bringen wollen.

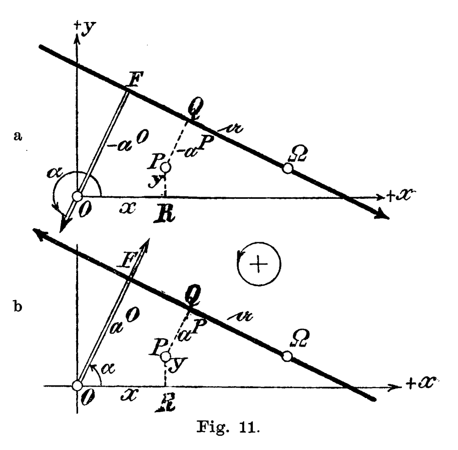


Fig. 11.

Ist $\mathfrak{a}$ die Gerade, auf der der Vektor $(\mathfrak{a}, \Omega)$ liegt (Fig. 11a, 11b), so fällen wir vom Koordinatenanfang O auf $\mathfrak{a}$ das Lot OF und legen ihm den Sinn (O, F) oder (F, O) bei, je nachdem $\mathfrak{a}$ um O positive oder negative Drehung bestimmt. Der Dreharm a^0 wird also im Sinne (O, F) positiv oder negativ gemessen, je nachdem positive oder negative Drehung vorliegt. Als Neigungswinkel α des so orientierten Lotes gegen die x-Achse betrachten wir den Winkel, durch den man die $+x$-Achse um O positiv drehen muß, bis die $+x$-Richtung mit der des Lotes zusammenfällt. Fällt man noch von einem Punkte P der Ebene auf $\mathfrak{a}$ und die x-Achse die Lote PQ, PR, von denen das erste als Dreharm an P, das andere als Ordinate mit Vorzeichen gemessen werde, so haben die

Seiten des Streckenzuges $ORPQ$ sowie seine Orthogonalprojektion OF die in den Figuren 11a, 11b angegebenen absoluten Längen. Daher ist in Figur 11a:

$$-a^O = x \cos(\alpha - 180^0) + y \sin(\alpha - 180^0) - a^P$$

oder

$$a^P = a^O - x \cos\alpha - y \sin\alpha;$$

in Figur 11b:

$$a^O = x \cos\alpha + y \sin\alpha + a^P$$

oder

$$a^P = a^O - x \cos\alpha - y \sin\alpha;$$

also in beiden Fällen übereinstimmend:

$$a^P = a^O - x \cos\alpha - y \sin\alpha. \tag{4}$$

Nach dieser Formel ist also der Dreharm a^P des Vektors $(\mathfrak{a}, \Omega)$ an P zu berechnen, wenn der Dreharm a^O am Anfangspunkte der Koordinaten sowie seine Neigung α gegen die x-Achse gegeben sind.

Liegt P auf $\mathfrak{a}$, so ist der Dreharm gleich Null, und

$$a^O - x \cos\alpha - y \sin\alpha = 0 \tag{5}$$

ist daher die Gleichung der Geraden $\mathfrak{a}$, auf welcher der Vektor liegt.

Diese Gleichung befindet sich in der Hesseschen Normalform, und wir wollen den Ausdruck $a^P = a^O - x \cos\alpha - y \sin\alpha$, der mit den Koordinaten eines nicht auf $\mathfrak{a}$ liegenden Punktes P der Ebene gebildet ist, die Hessesche Normalform von $\mathfrak{a}$ nennen.

9. Sind jetzt in der Ebene mehrere Vektoren $(\mathfrak{a}_1, \Omega), \ldots, (\mathfrak{a}_n, \Omega)$ an einem Angriffspunkte Ω gegeben und ist $(\mathfrak{a}, \Omega)$ ihre Summe, α_ν der Neigungswinkel des Lotes a_ν^O gegen die $+x$-Richtung nach den Bestimmungen des Artikel 8, so ist

$$a_\nu^P = a_\nu^O - x \cos\alpha_\nu - y \sin\alpha_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Daraus berechnet sich a^P nach (3) durch die Formel

$$\begin{aligned} a a^P = a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P &= \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu a_\nu^O - x \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \cos\alpha_\nu - y \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a_\nu \sin\alpha_\nu, \\ a = |\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n|, \end{aligned} \tag{7}$$

wiederum in der Hesseschen Normalform, vorausgesetzt, daß a nicht verschwindet, wo a^P unbestimmt wird.

§ 3. Linienflüchtige Vektoren.

1. Wenn zwei Vektoren an verschiedene Angriffspunkte gebunden sind, so lassen sie sich nach unseren bisher verabredeten Operationsregeln nicht zueinander in Beziehung setzen. Um das zu ermöglichen, erschaffen wir eine neue Art von gebundenen Vektoren, die wir „linienflüchtige“ nennen. Ein Vektor heißt linienflüchtig, wenn er auf einer bestimmten Geraden, seiner „Angriffslinie“, liegen muß, auf dieser aber beliebig verschoben werden kann. Der an eine Angriffslinie x gebundene Vektor $\mathfrak{a}$ werde mit $(\mathfrak{a}, x)$, lies „$\mathfrak{a}$ auf x“, bezeichnet. Er läßt sich auffassen als ein Vektor $(\mathfrak{a}, O)$, dessen Angriffspunkt O auf x verschiebbar ist; die an Angriffspunkte gebundenen Vektoren gehen in die an Angriffslinien gebundenen über durch das Verschiebungsaxiom (Axiom A), daß der Angriffspunkt auf der den Vektor enthaltenden Geraden (zum Zweck der Summierung) frei verschoben werden darf. Hat man mehrere linienflüchtige Vektoren an denselben Angriffspunkt verlegt, so sollen sie dort summiert werden wie Vektoren, die an einen Punkt gebunden sind, und es soll dabei erlaubt sein:

I. dem gegebenen System $\mathfrak{S}$ noch Systeme von (linienflüchtigen) Vektoren an bestimmten Angriffspunkten zuzufügen, wenn in jedem dieser Punkte die Summe der zugefügten Vektoren verschwindet — Axiom der Zufügbarkeit sich „hebender“ Systeme (Axiom B),

II. jeden linienflüchtigen Vektor an einem bestimmten Angriffspunkte O zu ersetzen durch irgend ein System von linienflüchtigen Vektoren an O, das jenen Vektor zur Summe hat — Axiom der Zerlegbarkeit (Axiom C).

Man kann übrigens das Axiom B als in C enthalten ansehen, wenn man die sich hebenden Systeme als Zerlegungen der Null ansieht und die Zufügbarkeit der Null mit Axiom C ausdrücklich postuliert.

2. Es ist zu untersuchen, ob bei dieser großen Freiheit der Konstruktion überhaupt noch etwas herauskommt, das sich wie eine Summe der gegebenen Vektoren verhält. Wir beschränken uns dabei auf Vektoren in derselben Ebene η, und zwar sollen alle Vektoren in dieser Ebene η linienflüchtig sein.

Indem wir den Gleichheitsbegriff uns wiederum für die freien Vektoren vorbehalten, wollen wir die für linienflüchtige Vektoren zu definierende Gleichheit, wie bei den gebundenen (§ 2, 1.), als „Äquivalenz“ (mit dem Zeichen $\simeq$) benennen. Es soll nur dann $(\mathfrak{a}, x) \simeq (\mathfrak{b}, y)$

heißen, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ und x mit y identisch ist, d. h. wenn die freien Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gleich sind und auf derselben Angriffslinie liegen; auf dieser dürfen sie aber an verschiedenen Stellen liegen. Um diese Definition nicht wiederholt erweitern zu müssen, definieren wir gleich allgemein:

Ein System $\mathfrak{S}$ von linienflüchtigen Vektoren in einer Ebene, das auch aus einem einzigen Vektor bestehen kann, heißt einem anderen System $\mathfrak{T}$ dieser Ebene äquivalent, $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$, wenn sich $\mathfrak{S}$ auf Grund der Axiome A, B, C und der Summationsgesetze der gebundenen Vektoren in $\mathfrak{T}$ überführen läßt.

3. Von der Aquivalenz gelten die wichtigen Sätze:

Satz 1. Wenn $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$, so ist auch $\mathfrak{T} \simeq \mathfrak{S}$.

Satz 2. Wenn $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}' \simeq \mathfrak{T}$, so ist auch $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{S}'$.

Wenn $\mathfrak{S}$ durch Anwendung der Axiome A, B, C in $\mathfrak{T}$ übergeht, so soll sich auch $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{S}$ zurückverwandeln lassen. Die Verwandlung von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ geschieht:

a) durch Verschiebung des einen Vektors $\boldsymbol{OA}$ auf der Geraden OA in die Lage $\boldsymbol{O'A'}$; man erreicht dasselbe Resultat, wenn man erst zu $\boldsymbol{OA}$ den entgegengesetzten Vektor $\boldsymbol{O\bar{A}}$ addiert und $\boldsymbol{O'A'} = \boldsymbol{OA}$ hinzufügt; $\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{O\bar{A}} = \mathfrak{o}$, und $\boldsymbol{O'A'}$ bleibt übrig; die Verschiebung kann also durch Addition erzeugt werden;

b) durch Anwendung des Axioms B; diese wird ebenfalls ihrer Definition nach durch Addition erreicht;

c) durch Anwendung des Axioms C; die Auflösung von $(\mathfrak{a}, O)$ in $(\mathfrak{a}_1, O) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, O)$ wird erreicht, indem man zu $(\mathfrak{a}, O)$ die Vektoren $(\bar{\mathfrak{a}}, O)$, $(\bar{\mathfrak{a}}_1, O)$, ..., $(\bar{\mathfrak{a}}_n, O)$ addiert.

Der Übergang von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ kann also durch eine Reihe von Additionen erreicht werden. Um also $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{S}$ zurückzuführen, füge man zu $\mathfrak{T}$ den letzten Summanden mit umgekehrtem Sinn, dann ebenso den vorletzten, ..., schließlich den ersten, ebenfalls mit umgekehrtem Sinn, und es bleibt $\mathfrak{S}$ übrig.

Wenn man $\mathfrak{S}$ nach Satz 2 in $\mathfrak{T}$ verwandelt hat, führe man $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{S}'$ über; durch Aneinanderreihen beider Operationen geht $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ über, und dann ist nach Satz 1 auch $\mathfrak{S}'$ in $\mathfrak{S}$ umformbar.

4. Sind nun in η zwei Vektoren $(\mathfrak{a}, x)$ und $(\mathfrak{b}, y)$ gegeben, deren Angriffslinien x, y sich in einem Punkte C schneiden, so ist bei der Summation erlaubt, die Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ auf x und y nach C als Anfangspunkt zu verschieben, d. h. sie durch $(\mathfrak{a}, C)$ und $(\mathfrak{b}, C)$ zu ersetzen. Als Vektoren an C können dann $(\mathfrak{a}, C)$ und $(\mathfrak{b}, C)$ nach § 2 zu einem Vektor $\boldsymbol{CC'}$ aus C zusammengesetzt werden, der nun wieder

auf der Geraden CC' verschiebbar ist und mit einem weiteren Vektor $(\mathfrak{c}, z)$, dessen Angriffslinie z die Gerade CC' in einem Punkte Z trifft, zusammengesetzt werden kann: Man mache $\boldsymbol{ZZ'} = \boldsymbol{CC'}$ und $\boldsymbol{Z'S} = \mathfrak{c}$; dann ist also der Vektor $\boldsymbol{ZS}$, gebunden an die Gerade ZS, das Ergebnis der Summation von $(\mathfrak{a}, x)$, $(\mathfrak{b}, y)$ und $(\mathfrak{c}, z)$ (Fig. 12). Unter Erweiterung des Äquivalenzbegriffes wie in § 2, 1. setzen wir:

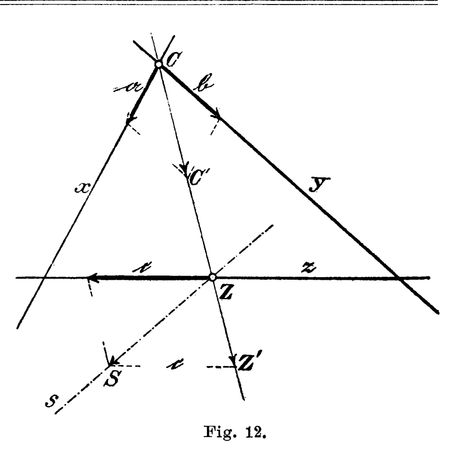


Fig. 12.

$$(\mathfrak{a}, x) + (\mathfrak{b}, y) + (\mathfrak{c}, z) \simeq (\boldsymbol{ZS}, ZS).$$

Nun war $\boldsymbol{CC'} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\boldsymbol{ZS} = \boldsymbol{ZZ'} + \boldsymbol{Z'S} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, und wenn wir die Gerade ZS mit s bezeichnen, so ist demnach

$$(\mathfrak{a}, x) + (\mathfrak{b}, y) + (\mathfrak{c}, z) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}, s).$$

5. Das geht so weiter, wenn noch mehr Vektoren in der Ebene η gegeben sind, vorausgesetzt, daß immer die zuletzt erhaltene Angriffslinie von der des zunächst zu addierenden Vektors geschnitten wird. Sind dagegen die Angriffslinien u, v zweier Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ parallel, so versagt die Methode und überhaupt das Axiom A.

In diesem Falle führt das Axiom der Zufügbarkeit sich hebender Systeme zum übersichtlichen Resultate (Fig. 13, 14). Man fixiert auf u und v irgendwo Angriffspunkte P_0, Q_0 von $(\mathfrak{p}, u)$ und $(\mathfrak{q}, v)$, macht $\boldsymbol{P_0P'} = \mathfrak{p}$, $\boldsymbol{Q_0Q'} = \mathfrak{q}$ und fügt zwei Vektoren $\mathfrak{k}$ und $\bar{\mathfrak{k}}$ von beliebiger Länge $\mathfrak{k}$ auf P_0Q_0 als Angriffslinie hinzu: $\boldsymbol{P_0P''} = \mathfrak{k}$, $Q_0Q'' = \bar{\mathfrak{k}}$.

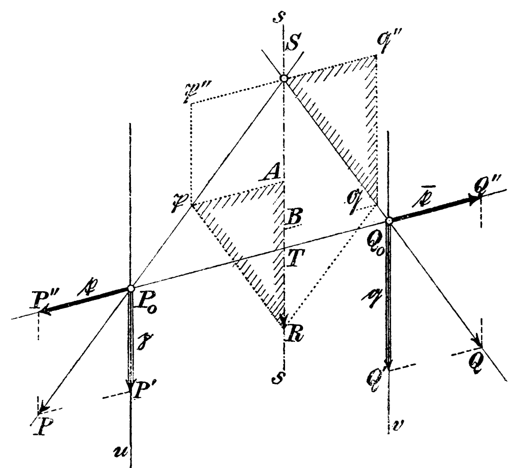


Fig. 13.

Ist jetzt

$$\boldsymbol{P_0P} = \boldsymbol{P_0P'} + \boldsymbol{P_0P''} = \mathfrak{p} + \mathfrak{k}, \quad \boldsymbol{Q_0Q} = \boldsymbol{Q_0Q'} + \boldsymbol{Q_0Q''} = \mathfrak{q} + \bar{\mathfrak{k}}$$

und schneiden sich die Geraden P_0P und Q_0Q in einem (im

Endlichen gelegenen) Punkte S, so kann man $\boldsymbol{P_0 P}$ und $\boldsymbol{Q_0 Q}$ an S als Anfangspunkt verlegen und dort summieren. Sei etwa $\boldsymbol{S\mathfrak{P}} = \boldsymbol{P_0 P}$, $\boldsymbol{S\mathfrak{Q}} = Q_0 Q$ und $\boldsymbol{SR} = \boldsymbol{S\mathfrak{P}} + \boldsymbol{S\mathfrak{Q}}$, so hat der Vektor $\boldsymbol{SR}$, gebunden an die Gerade SR, die s heißen möge, als Summe des Systems $(\mathfrak{p}, u)$, $(\mathfrak{q}, v)$ zu gelten, und wir setzen, unter abermaliger Erweiterung des Äquivalenzbegriffes (durch Axiom C):

$$(\mathfrak{p}, u) + (\mathfrak{q}, v) \simeq (\boldsymbol{SR}, s).$$

Ist nun $\boldsymbol{S\mathfrak{P}''} = \boldsymbol{P_0 P''} = \mathfrak{k}$, $\boldsymbol{S\mathfrak{Q}''} = \boldsymbol{Q_0 Q''} = \bar{\mathfrak{k}}$, wo also $\mathfrak{P}''$, S, $\mathfrak{Q}''$ auf einer Parallelen zu $P_0 Q_0$ liegen, so ist $\boldsymbol{\mathfrak{P}''\mathfrak{P}} = \mathfrak{p}$, $\boldsymbol{\mathfrak{Q}''\mathfrak{Q}} = \mathfrak{q}$, und wenn man noch $\boldsymbol{SA} = \mathfrak{P}''\mathfrak{P}$, $\boldsymbol{SB} = \mathfrak{Q}''\mathfrak{Q}$ abträgt, so ist $\boldsymbol{SA} = \mathfrak{p}$, $\boldsymbol{SB} = \mathfrak{q}$. Also liegen A und B auf der Parallelen durch S zu u (und v). Jetzt ist

$$\boldsymbol{SR} = \boldsymbol{S\mathfrak{P}} + \boldsymbol{S\mathfrak{Q}} = \boldsymbol{SA} + \boldsymbol{S\mathfrak{P}''} + \boldsymbol{SB} + \boldsymbol{S\mathfrak{Q}''} = \boldsymbol{SA} + \boldsymbol{SB} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q},$$

d. h. die genannte Parallele ist die Angriffslinie s von $\boldsymbol{SR}$. Diese trifft $P_0 Q_0$ in einem Punkte T, so daß

$$P_0 T : T Q_0 = \left(\frac{P_0 T}{TS}\right) : \left(\frac{T Q_0}{TS}\right) = \left(\frac{k}{p}\right) : \left(\frac{k}{q}\right) = q : p$$

ist. Dabei liegt T zwischen den Punkten P_0, Q_0 oder nicht, jenachdem $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

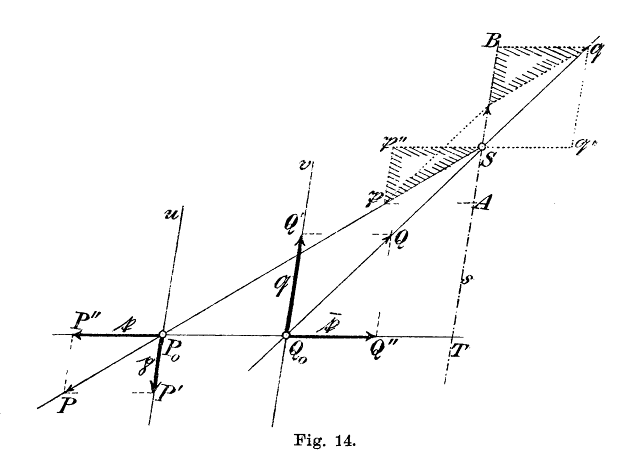


Fig. 14.

6. Es bleibt noch der Ausnahmefall zu untersuchen, daß auch $\boldsymbol{P_0 P}$ und $\boldsymbol{Q_0 Q}$ parallel ausfallen. Das kann natürlich nur eintreten, wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ entgegengesetzten Sinn haben. Der Teilpunkt T fällt dann auf $P_0 Q_0$ ins Unendliche, was voraussetzt, daß die Längen p

und q einander gleich sind. Ist das nicht der Fall, so kann man T auf $P_0 Q_0$ direkt durch das Teilverhältnis $P_0 T : T Q_0 = q : p$ ermitteln, durch T zu u die Parallele s ziehen und auf ihr den Vektor $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$

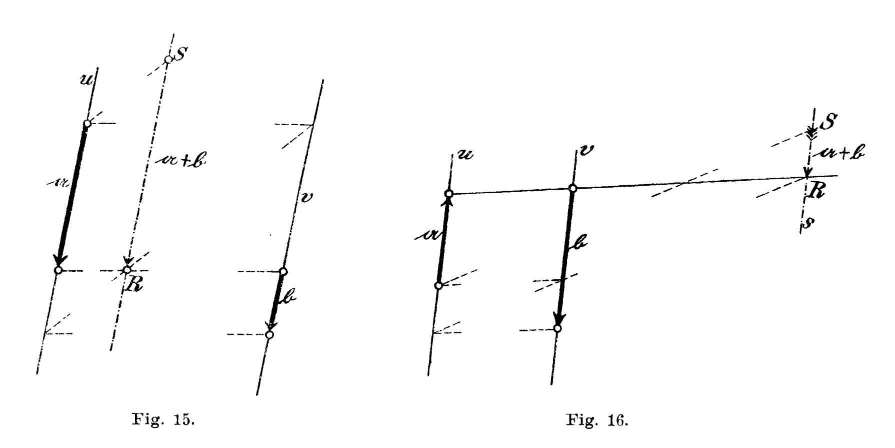


Fig. 15. Fig. 16.

auftragen. Eine einfache Lösung dieser Aufgabe zeigen die Figuren 15 und 16, die wohl ohne weitere Erklärung verständlich sind. So folgt:

Wenn die Angriffslinien u, v zweier Vektoren $(\mathfrak{p}, u)$, $(\mathfrak{q}, v)$ parallel sind und $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ nicht verschwindet, so ist

$$(\mathfrak{p}, u) + (\mathfrak{q}, v) \simeq (\mathfrak{p} + \mathfrak{q}, s),$$

wo die Gerade s zu u und v parallel verläuft und den Abstand der Geraden u, v innen oder außen im umgekehrten Verhältnis der Längen p, q teilt, je nachdem die Vektoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben.

Das gilt zunächst nur bei der angegebenen Anordnung der Konstruktion. Außerdem ist uns noch ein Fall verblieben, in dem auch dieses Verfahren versagt: der Fall $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = \mathfrak{o}$. Liegen in diesem Falle nicht $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ auf derselben Angriffslinie, so lassen sich die zwei Vektoren nicht zu einem einzigen summieren. Man sagt, zwei Vektoren $(\mathfrak{a}, x)$ und $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ mit parallelen Angriffslinien bilden ein Gegenpaar, und zwar ein eigentliches oder uneigentliches, je nachdem die Angriffslinien verschieden sind oder zusammenfallen. Nimmt man $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{p}} + \mathfrak{e}$ an, wo $\mathfrak{e}$ sehr klein ist, so fällt in Figur 14 der Teilpunkt T sehr fern, und es ist $(\mathfrak{p}, u) + (\mathfrak{q}, v) = (\mathfrak{e}, s)$. Indem man $\mathfrak{e}$ sich unbegrenzt der Null nähern läßt, folgt:

Als Summe eines Gegenpaares $(\mathfrak{a}, x)$, $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$, $x \parallel y$, kann man einen Vektor von der Länge Null auf der ∞ fernen Geraden auffassen.

Da man nämlich in der Euklidischen Geometrie genötigt ist, nur eine einzige unendlich ferne Gerade anzunehmen, so kann man nicht noch fordern, daß die Angriffslinie zu x und y parallel und für Gegenpaare verschiedener Richtung verschieden sei; die unendlich ferne Gerade ist allen Geraden der Ebene parallel.

7. Diese Auffassung der Summe des Gegenpaares macht zwar das Versagen der Summenbildung begreiflich, ist aber im übrigen praktisch wertlos, da diese Summe durch ihre Größe Null und die unendlich ferne Angriffslinie nicht bestimmt ist.

8. Ein Gegenpaar kann, auf Grund der Axiome A, B, C, seine Gestalt in der mannigfachsten Weise ändern. Ist (Fig. 17) $(\mathfrak{a}, x)$, $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ ein Gegenpaar, und zieht man in der Ebene irgend zwei Parallelen u, v, von denen u die Gerade x, v die Gerade y in einem Punkte O und O' schneide, und zerlegt man $\boldsymbol{OA} = \mathfrak{a}$, $\boldsymbol{O'A'} = \bar{\mathfrak{a}}$ nach den Richtungen u, v und OO' in

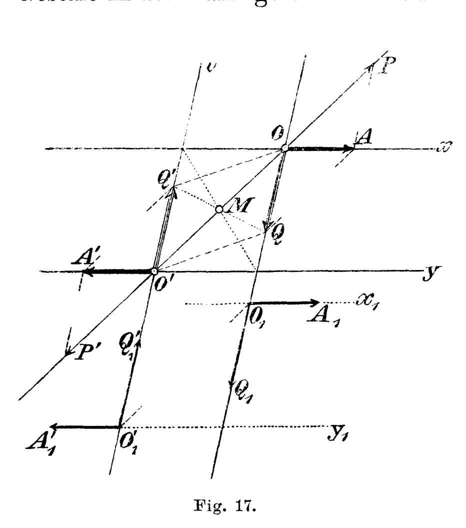


Fig. 17.

$$\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{OP},$$
$$\boldsymbol{O'A'} = \boldsymbol{O'Q'} + \boldsymbol{O'P'},$$

so fallen auf OO' entgegengesetzte Vektoren $\boldsymbol{OP}$, $\boldsymbol{O'P'}$, die einander aufheben; also ist das Gegenpaar $(\mathfrak{a}, x)$, $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ äquivalent dem System $\boldsymbol{OQ}$, $\boldsymbol{O'Q'}$, das ebenfalls ein Gegenpaar bildet. Verlegt man $\boldsymbol{OQ}$, $\boldsymbol{O'Q'}$ auf u, v nach $\boldsymbol{O_1Q_1}$, $\boldsymbol{O_1'Q_1'}$, so daß aber $\boldsymbol{O_1O_1'} = \boldsymbol{OO'}$ wird, so läßt sich das Paar $\boldsymbol{O_1Q_1}$, $\boldsymbol{O_1'Q_1'}$ unter anderem umformen in $\boldsymbol{O_1A_1} = \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{O_1'A_1'} = \boldsymbol{O'A'}$, d. h.:

> Man kann ein Gegenpaar $(\mathfrak{a}, x)$, $(\bar{\mathfrak{a}}, y)$ beliebig parallel zu sich verschieben.

Man wird nun zunächst nach solchen Eigenschaften des Gegenpaares fragen, die bei allen diesen Umformungen erhalten oder invariant bleiben. Da $QA \parallel OO'$, so ist

$$\text{Dreieck } OQO' = \text{Dreieck } OAO',$$

also auch

$$\text{Parallelogramm } OQO'Q' = \text{Parallelogramm } OAO'A'.$$

Das ist also eine Invariante des Gegenpaares. Sie läßt sich leicht

auf das Moment der Vektoren des Gegenpaares in irgend einem Drehpunkt M zurückführen. Macht man nämlich $\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{OA}$ (Fig. 18), so ist das Parallelogramm $OANM$ gleich dem Produkte aus OA und dem Abstande des Punktes M von OA, stellt also bis auf das Vorzeichen das Moment von $\boldsymbol{OA}$ in M dar; also ist:

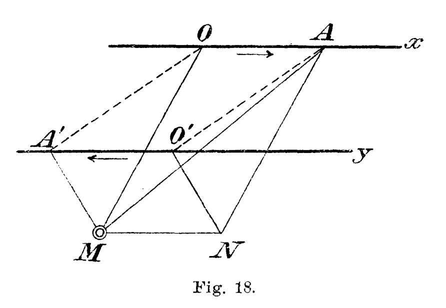


Fig. 18.

$$\text{Mom. von } \boldsymbol{OA} \text{ in } M = \varepsilon \cdot OANM,$$
$$\text{Mom. von } \boldsymbol{O'A'} \text{ in } M = -\varepsilon \cdot O'A'M'N',$$

wo ε gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem $\boldsymbol{OA}$ in M positive oder negative Drehung bestimmt. Also ist:

$$\text{Mom. von } \boldsymbol{OA} \text{ in } M + \text{Mom. von } \boldsymbol{O'A'} \text{ in } M$$
$$= \varepsilon\,(OANM - O'A'M'N') = \varepsilon \cdot OAO'A'.$$

Diese Tatsachen legen es nahe, den Begriff des Momentes auch auf linienflüchtige Vektoren auszudehnen, indem man als Moment von $(\mathfrak{a}, x)$ in P das Produkt aus der Länge des Vektors und seinem (orientierten) Dreharm in P definiert, wie in § 2, 5.

9. Dann folgt:

Die Summe der Momente der beiden Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{O'A'}$ eines Gegenpaares ist von der Lage des Drehpunktes, auf den diese Momente bezogen werden, ganz unabhängig und heißt „das Moment des Gegenpaares“. Dieses Moment ist auch unabhängig von der Lage, die man den Vektoren auf ihren Angriffslinien erteilt.

Legt man dem Flächeninhalt des Parallelogramms $OAO'A'$, das das Gegenpaar $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{O'A'}$ bestimmt, positives oder negatives Zeichen bei, je nachdem das Paar auf dem Umfang des Parallelogramms positive oder negative Drehung festlegt, so ist der so „orientierte“ Flächeninhalt gleich dem Moment des Gegenpaares.

Zur Figur 17 zurückkehrend, an der wir die Gleichheit der Parallelogramme $OQO'Q'$ und $OAO'A'$ bemerkt haben, werden wir nur noch nachsehen müssen, wie es mit dem Umlaufssinne dieser Parallelogramme steht. Beide Parallelogramme haben denselben Mittelpunkt M, und da $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OQ}$ beide auf derselben Seite von $\boldsymbol{MO}$ liegen, so haben beide Flächen gleichen Drehsinn, d. h. das Moment $OAO'A'$ des Paares $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{O'A'}$ ist gleich dem Moment $OQO'Q'$

des äquivalenten Paares OQ, $O'Q'$. In diesem speziellen Falle gilt also der Satz:

Äquivalente Gegenpaare in derselben Ebene haben gleiches Moment.

Da aber das Moment aa^P eines Vektors $(\mathfrak{a}, x)$ in einem Punkte P bei der Verschiebung von $\mathfrak{a}$ auf x seinen Wert nicht ändert, so ist das Moment eine Invariante gegenüber der nach Axiom A zulässigen Verschiebung. Nach dem Momentensatz ist aa^P aber auch invariant gegenüber den Umformungen des Vektors $(\mathfrak{a}, x)$, die nach Axiom B und C möglich sind. Durch Änderungen auf Grund der Axiome A, B, C geht also jedes Gegenpaar in ein solches mit demselben Moment über, und damit ist die allgemeine Gültigkeit des Satzes bewiesen, der sich, wie man sieht, sofort verallgemeinern läßt:

Äquivalente Systeme linienflüchtiger Vektoren in derselben Ebene haben gleiche Momentensummen.

So erweist sich also die Momentensumme eines Systemes als eine wichtige Invariante, die speziell beim Gegenpaar vollkommen ausreicht, um dasselbe zu bestimmen, denn wie wir in 7. gesehen haben, ist das Gegenpaar parallel verschiebbar; nimmt man aber in Figur 17 den Abstand von u, v gleich dem von x, y, so wird das Parallelogramm $OQO'Q'$ mit dem ihm gleichen $OAO'A'$ in der Höhe und folglich in der Grundlinie übereinstimmen: $OQ = OA$, d. h.: Ein Gegenpaar kann in der Ebene beliebig verschoben und gedreht werden, wenn nur der Abstand der Angriffslinien erhalten bleibt. Wie man auch noch diesen abändern kann, zeigt Figur 17, wo man O_1 und O_1' auf u, v beliebig annehmen darf. So ist also in der Tat nur das Moment das Bleibende am Gegenpaar.

10. Nach dieser ausführlichen Untersuchung des Systems zweier Vektoren gehen wir nun zu Systemen beliebigen Umfanges über.

Wenn bei dem Verfahren der schrittweisen Summation, das in Artikel 4 auseinandergesetzt ist, der Fall vorkommt, daß der zunächst zu summierende Vektor mit der schon konstruierten Summe der vorangehenden Vektoren gerade ein Gegenpaar bildet, so wird man sich mit Hilfe der Axiome A, B, C zwar auf mannigfache Weise helfen können; doch wird gegenüber der Menge von Besonderheiten, die immer wieder den Gang der Konstruktion stören können, ein Verfahren erwünscht sein, das niemals versagt.

Für unsere zunächst auf begriffliche Sicherung der Resultate gehende Untersuchung reicht folgende Überlegung aus:

Sind in der Ebene η etwa die Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1)$, ..., $(\mathfrak{a}_n, x_n)$ zu

summieren, so legen wir durch irgend einen Punkt O der Ebene — praktisch wird man ihn so wählen, daß möglichst viel Angriffslinien durch ihn gehen — zu den Angriffslinien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Parallelen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und ziehen durch O eine von allen diesen Geraden α verschiedene Gerade u und dazu noch in beliebigem (endlichen) Abstand eine Parallele v (Fig. 19). Dann werden die Geraden u und v zu keiner der Geraden x_ν parallel sein, also wird v von jeder Geraden x_ν in einem eigentlichen Punkte V_ν geschnitten werden. Diesen dürfen wir zum Zweck der Summation zum Anfangspunkt von $\mathfrak{a}_\nu$ machen (Axiom A). Wir verbinden nun O mit V_ν und zerlegen $(\mathfrak{a}_\nu, V_\nu)$ nach den Komponenten $V_\nu W_\nu$ und $V_\nu U_\nu$ auf den Geraden OV_ν und v; nach Axiom B dürfen wir dann $(\mathfrak{a}_\nu, V_\nu)$ durch $\boldsymbol{V_\nu W_\nu}$ und $\boldsymbol{V_\nu U_\nu}$ ersetzen. Diesen letzten Vektor, den wir mit $(\mathfrak{v}_\nu, v)$ bezeichnen, lassen wir ungeändert, $\boldsymbol{V_\nu W_\nu}$ dagegen wird nach Axiom A auf $V_\nu O$ an O verschoben, dort aber nach Axiom B sofort wieder in zwei Komponenten parallel zu x_ν und v zerlegt. Die Komponenten sind gleich $\mathfrak{a}_\nu$ und $\bar{\mathfrak{v}}_\nu$.

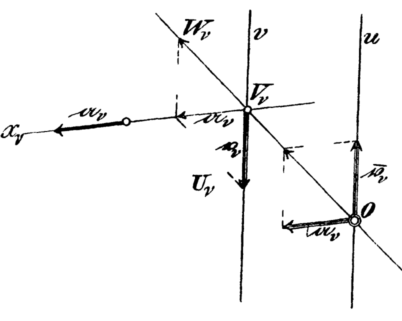


Fig. 19.

11. Damit haben wir also erreicht, daß $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ ersetzt ist durch $(\mathfrak{a}_\nu, O)$ und das Gegenpaar $(\mathfrak{v}_\nu, v)$, $(\bar{\mathfrak{v}}_\nu, u)$ auf den ein für alle Mal festgelegten Angriffslinien u, v. Wir können also alle Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ wie freie Vektoren behandeln und an einen beliebigen Angriffspunkt O verlegen, wenn wir nur auf u und v zur Kompensation geeignete Gegenpaare anbringen. Jetzt lassen sich die an O gebundenen Vektoren ohne weiteres zu der Summe $(\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n, O) \simeq (\mathfrak{a}, O)$ vereinigen, die Vektoren auf u und v je zu der Summe $(\bar{\mathfrak{v}}_1 + \bar{\mathfrak{v}}_2 + \cdots + \bar{\mathfrak{v}}_n, u) \simeq (\bar{\mathfrak{v}}, u)$ und $(\mathfrak{v}_1 + \cdots + \mathfrak{v}_n, v) \simeq (\mathfrak{v}, v)$, wenn $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{v}_1 + \cdots + \mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}$ gesetzt wird.

Die Summation des Systems $\mathfrak{S}$ der Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$ ist jetzt zurückgeführt auf die von $(\mathfrak{a}, O)$, $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$, $(\mathfrak{v}, v)$. Ist $\mathfrak{a}$ von Null verschieden, so ergibt die Summation von $(\mathfrak{a}, O)$ und $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$ nach 4. und 5. einen Vektor $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{v}}$ auf irgend einer Angriffslinie w. Dieser Vektor kann mit $(\mathfrak{v}, v)$ kein Gegenpaar bilden, sonst müßte $\mathfrak{v} = \mathfrak{a} + \mathfrak{v}$, also $\mathfrak{v} = \mathfrak{o}$ sein; sehen wir von diesem trivialen Falle ab, wo das Gegenpaar $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$, $(\mathfrak{v}, v)$ wegfällt, so wird der Vektor $(\mathfrak{a} + \mathfrak{v}, w)$ sich immer mit $(\mathfrak{v}, v)$ zu einer Summe $\mathfrak{a} + \bar{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v} = \mathfrak{a}$

auf einer bestimmten Angriffslinie zusammensetzen lassen. Ist $\mathfrak{a}$ gleich Null, so bleibt das Gegenpaar $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$, $(\mathfrak{v}, v)$ übrig, das sich nicht weiter zusammensetzen läßt. So sehen wir, daß die systematische Summation in Artikel 7 verhältnismäßig einfach zum Ziele führt.

12. Als Summe erhalten wir entweder ein Gegenpaar, ein Fall, der nur für verschwindende $\mathfrak{a}$ eintreten kann, oder einen bestimmten Vektor $\mathfrak{a}$ auf bestimmter Angriffslinie. Aber hängt dieses Resultat nicht von der Anordnung der Konstruktion ab? Man übersieht sofort: Wie auch immer man auf Grund der Axiome A, B, C die Summation anordnet, stets werden die gebundenen Vektoren wie freie addiert, nur unter erschwerteren Umständen. Wir behaupten:

Äquivalente Systeme stimmen überein in der freien Summe ihrer Vektoren,

wobei die Summe frei genannt wird, wenn sie ohne Rücksicht auf die Angriffslinien nach den Gesetzen der Summation freier Vektoren gebildet wird. Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich so:

Die Überführung eines Systems $\mathfrak{S}$ in ein äquivalentes System $\mathfrak{T}$ erfolgt:

a) auf Grund von Axiom A durch Verschiebung des Angriffspunktes, wodurch die Größe und der Pfeilsinn eines Vektors nicht geändert wird;
b) auf Grund des Axioms B durch Zufügung von Systemen an bestimmten Angriffspunkten, deren Summe je Null ist; die freie Summe dieser Vektoren ist also Null;
c) durch Zerlegung eines Vektors in ein System, das ihn zur Summe hat, womit schon gesagt ist, daß die freie Summe dieses Systems dem Vektor gleich ist.

Da nun bei der freien Summation nach § 1 das assoziative Gesetz gilt, so wird die freie Summe der Vektoren eines Systemes durch Anwendung der Axiome A, B, C hinsichtlich der Größe und des Pfeilsinnes nicht geändert. Damit ist der Satz bewiesen. Die freie Summe der Vektoren des Systems ist also gegenüber der äquivalenten Umformung eine Invariante.

13. Als eine zweite Invariante des Systems haben wir in Artikel 9 die Momentensumme kennen gelernt. Ist also $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$, so ist:

a) die freie Summe der Vektoren des Systems $\mathfrak{S}$ gleich der freien Summe der Vektoren des Systems $\mathfrak{T}$;
b) die Summe der Momente des Systems $\mathfrak{S}$ gleich der Summe der Momente des Systems $\mathfrak{T}$.

Verstehen wir nun unter $\mathfrak{S}$ das System $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$ und unter $\mathfrak{T}$ das aus einem Vektor $(\mathfrak{a}, x)$ oder aus einem Gegenpaar $(\bar{\mathfrak{v}}, u)$, $(\mathfrak{v}, v)$ bestehende System, auf das wir $\mathfrak{S}$ in Artikel 11 zurückgeführt haben, so können wir an $\mathfrak{S}$ schon entscheiden, wann $\mathfrak{T}$ aus einem Vektor bestehen wird:

a) Wenn $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}$ von Null verschieden ist, besteht $\mathfrak{T}$ aus dem Vektor $\mathfrak{a}$ mit noch zu bestimmender Angriffslinie; denn wäre $\mathfrak{T}$ ein Gegenpaar, so wäre die freie Summe seiner Vektoren Null, kann also nicht gleich $\mathfrak{a}$ sein. In der Tat führte die Untersuchung in Art. 12 zu demselben Ergebnis. Ist die Momentensumme

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P = a a^P$$

Fig. 20.

zufällig in dem beliebig gewählten Drehpunkt P gleich Null, so geht die gesuchte Angriffslinie x durch P und ist als Parallele zu $\mathfrak{a}$ vollkommen bestimmt. Ist die Summe nicht Null, so berührt x den Kreis k, der P zum Zentrum und den Dreharm

$$a^P = \frac{(a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P)}{a},$$

der nun auch von Null verschieden ist, zum Radius hat, und zwar ist $x \parallel \mathfrak{a}$. Es gibt aber nur zwei zu $\mathfrak{a}$ parallele Tangenten. Bringt man auf diesen je den Pfeilsinn von $\mathfrak{a}$ an, so bestimmen sie entgegengesetzte Drehsinne auf k. Je nachdem a^P positiv oder negativ ist, muß man die Tangente nehmen, die in P positive oder negative Drehung bestimmt. Es gibt also nur eine ganz bestimmte Angriffslinie.

b) Wenn $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}$ ist, fragt es sich, ob $\mathfrak{S}$ dem Vektor Null oder einem Gegenpaar äquivalent ist, was sich nach 11. auch bei $\mathfrak{T}$ zeigt. Die Entscheidung hängt an der Momentensumme. Da $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{T}$, so ist, wie wir wissen,

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P = \text{Momentensumme von } \mathfrak{T}.$$

Ist nun die Summe links gleich Null, so kann $\mathfrak{T}$ nur aus einem uneigentlichen Gegenpaar bestehen, denn bei einem eigentlichen ist die Momentensumme, als Fläche eines Parallelogramms, von Null verschieden. Da das uneigentliche Gegenpaar nach dem Verschiebungsaxiom die Summe Null hat, so ist $\mathfrak{T}$ in diesem Falle der Vektor Null.

Wenn dagegen die Summe links von Null verschieden ist, so kann $\mathfrak{T}$ nur aus einem eigentlichen Gegenpaar mit dem Moment $a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P$ bestehen und ist damit vollkommen charakterisiert.

14. Damit sind wir zu dem schönen Hauptresultat unserer Untersuchung gelangt:

Jedes System von linienflüchtigen Vektoren in einer Ebene ist entweder einem ganz bestimmten Vektor, der **Resultante** des Systems, die an eine bestimmte Angriffslinie gebunden ist, äquivalent, oder einem Gegenpaar von bestimmtem Moment. Und zwar ist die Resultante nach Größe und Pfeilrichtung der freien Summe jener Vektoren gleich, während das Moment der Resultante oder des Gegenpaares in irgend einem Drehpunkt P der Summe der Momente des Systems gleich ist. Im Falle einer Resultante ist diese also von der Anordnung der Konstruktion unabhängig und für die Summation linienflüchtiger Vektoren gilt das assoziative und das kommutative Gesetz.

Nachdem so die Widerspruchslosigkeit dieses Denkbereiches gesichert ist, wird es unsere nächste Aufgabe sein, zu sehen, wie man das Resultat der Summation am übersichtlichsten, womöglich mit direkten Methoden, erreicht.

15. Analytisch läßt sich die Angriffslinie der Resultante, falls eine solche existiert, unmittelbar angeben. Fixiert man nämlich die Hessesche Normalform nach § 2, (6) in der Weise, daß

$$a_\nu^P = a_\nu^0 - x \cos \alpha_\nu - y \sin \alpha_\nu$$

den orientierten Dreharm von $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ im Drehpunkte P angibt, so läßt sich

$$a_1 a_1^P + a_2 a_2^P + \cdots + a_n a_n^P = a a^P$$

ausrechnen und $a^P = 0$ ist dann die Gleichung der Resultante, a^P ihr Dreharm in P, dargestellt in der Hesseschen Normalform. Wegen dieser analytischen und begrifflichen Vorzüge der Momente, vor allem wegen ihrer Invarianz gegenüber den äquivalenten Umformungen, wäre es richtiger und nebenbei sehr elegant, den an eine Angriffslinie x gebundenen Vektor $\mathfrak{a}$ nicht mit $(\mathfrak{a}, x)$, sondern mit $(\mathfrak{a}, aa^P)$ zu bezeichnen, also als Vektor mit bestimmtem Moment. Dann gilt für die Addition das Gesetz:

$$(\mathfrak{a}, aa^P) + (\mathfrak{b}, bb^P) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b},\, aa^P + bb^P),$$

$$(\mathfrak{a}_1, a_1 a_1^P) + (\mathfrak{a}_2, a_2 a_2^P) + \cdots + (\mathfrak{a}_n, a_n a_n^P)$$
$$= (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n,\, a_1 a_1^P + \cdots + a_n a_n^P).$$

Durch die Angabe des Momentes und des Vektors $\mathfrak{a}$ ist $(\mathfrak{a}, x)$ vollkommen bestimmt, wie wir in 11. gesehen haben, und das

Moment, in der Hesseschen Normalform dargestellt, gibt zugleich den Hebelarm und die Resultante, also alles, was man nur verlangen kann. Die Addition der Symbole $(\mathfrak{a}, aa^{\nu})$ gleicht vollkommen der der komplexen Zahlen, wie wir sie in Bd. I, § 47 (§ 51 der 2. Aufl.) dargestellt haben.

§ 4. Vereinfachte Summation.

1. Hat ein System $\mathfrak{S}$ von linienflüchtigen Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1)$, $(\mathfrak{a}_2, x_2)$, ..., $(\mathfrak{a}_n, x_n)$ einer Ebene η eine Resultante $(\mathfrak{a}, x)$, so können wir diese sofort nach Größe und Pfeilrichtung angeben:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n.$$

Man zeichnet zu diesem Zwecke

$$A_0A_1 = \mathfrak{a}_1,\ A_1A_2 = \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n = \mathfrak{a}_n.$$

Dann ist

$$A_0A_n = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_n,$$

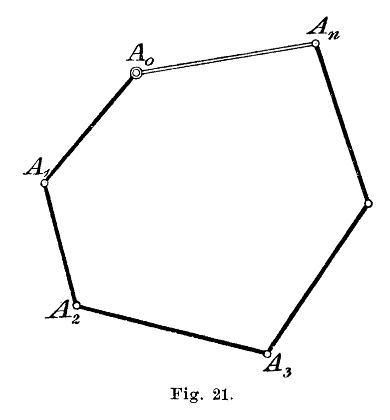


Fig. 21.

wo also zu beachten ist, daß der Pfeil der Geraden A_0A_n des „Summationsecks“ $A_0A_1\ldots A_n$ von A_0 nach A_n weist. Da die Gerade A_0A_n das Summationseck erst zu einem geschlossenen Vieleck macht, so heißt sie „Schlußlinie“ des Summationsecks. Wenn A_n mit A_0 zusammenfällt, die Schlußlinie, die zugleich als Schlußstrecke gemeint ist, also verschwindet, so heißt das Summationseck geschlossen; in diesem Falle ist $\mathfrak{a} = 0$ und das System hat entweder den Vektor Null zur „Resultante“, oder es ist einem Gegenpaar äquivalent. Soll, wie wir vorausgesetzt haben, $\mathfrak{S}$ eine eigentliche Resultante haben, so ist $\mathfrak{a}$ von Null verschieden.

2. Nachdem wir so überaus leicht den Vektor $\mathfrak{a}$ auf direktem Wege gefunden haben, wäre es sehr unangenehm, wenn wir zur Ermittlung seiner Angriffslinie x nun doch noch die Vektoren des Systems, sei es schrittweise nach § 3, 4. und 5. oder nach der etwas einfacheren Methode § 3, 10, summieren müßten. Offenbar würde zur Bestimmung von x, da $x \parallel \mathfrak{a}$ sein muß, die Kenntnis eines einzigen Punktes von x genügen. Einen solchen zu finden, ist das Ziel der folgenden Betrachtung. Es gibt Fälle, wo man die Lage der Resultante eines Systems sofort angeben kann. Hätte $\mathfrak{S}$ zum Beispiel die Struktur des Systems $\mathfrak{S}'$ der Figur 22, das aus $n + 1$ Ge-

raden $u_0, u_1, \ldots, u_n$ besteht, von denen u_0 und u_n je einen Vektor $\mathfrak{k}_0$ und $\mathfrak{k}_n$, dagegen u_ν für $\nu = 1, \ldots, n-1$ ein uneigentliches Gegenpaar $\mathfrak{k}_\nu$, $\overline{\mathfrak{k}}_\nu$ trägt, so braucht man $\mathfrak{k}_\nu$ und $\overline{\mathfrak{k}}_\nu$ auf u_ν nur an denselben Angriffspunkt zu verlegen, um zu sehen, daß diese Gegenpaare das Ergebnis der Summation nicht beeinflussen. Also ist

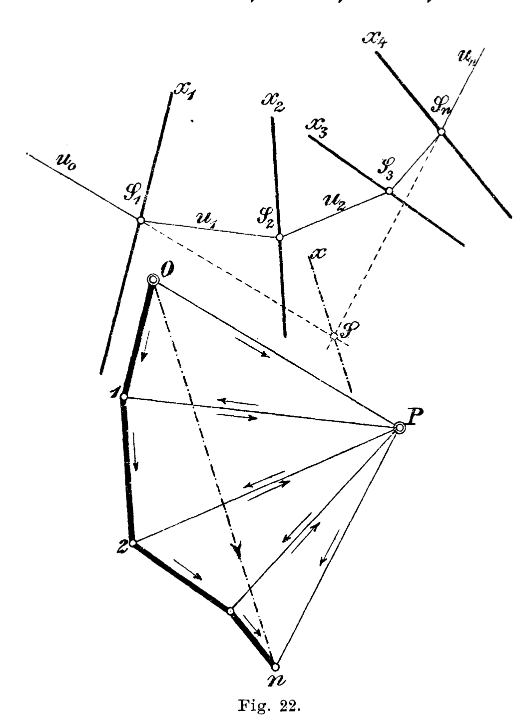


Fig. 22.

$$\mathfrak{S}' \simeq (\mathfrak{k}_0, u_0) + (\mathfrak{k}_n, u_n).$$

Die Resultante dieser zwei Vektoren geht durch den Schnittpunkt S von u_0 und u und ist nach Größe und Pfeilrichtung gleich $\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_n$; man kann hier die Resultante nach § 2, 6 direkt konstruieren, oder auch in einer Nebenkonstruktion $\mathbf{0P} = \mathfrak{k}_0$, $\boldsymbol{P\nu} = \mathfrak{k}_\nu$ machen; dann ist $\mathbf{0}\boldsymbol{n} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_n$ und die Parallele x durch S zu $\mathbf{0}\boldsymbol{n}$ ist die Angriffslinie der Resultante $(\mathbf{0}\boldsymbol{n}, x)$. Zieht man also durch S_1 die Parallele zu $\mathbf{01}$, die x_1 heißen möge, so liegt auf ihr die Resultante von $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_1, u_1)$; bezeichnet man sie mit $(\mathfrak{a}_1, x_1)$, so ist

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_1.$$

Bezeichnet man ebenso mit $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$ die Resultante von $(\overline{\mathfrak{k}}_{\nu-1}, u_{\nu-1})$, $(\mathfrak{k}_\nu, u_\nu)$, so ist $\mathfrak{a}_\nu = \overline{\mathfrak{k}}_{\nu-1} + \mathfrak{k}_\nu$, und x_ν ist durch den Schnittpunkt S_ν von $u_{\nu-1}$ und u_ν parallel zu $\overline{\boldsymbol{\nu-1, \nu}}$ zu finden, $\nu = 2, \ldots, n$.

Das System $\mathfrak{S}'$, das aus $2n$ Vektoren auf $n+1$ Angriffslinien besteht, ist hiernach dem System $\mathfrak{S}$ der n Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$ äquivalent, die auf n Angriffslinien liegen. Das System $\mathfrak{S}$ hat also dieselbe Resultante $(\mathbf{0}\boldsymbol{n}, x)$ wie $\mathfrak{S}'$, und $012\ldots n$ ist sein Summationseck.

Das Schöne dieser Untersuchung ist nun, daß ihr Gedankengang sich umkehren läßt! Sei in einer Ebene η irgend ein System $\mathfrak{S}$, bestehend aus den Vektoren $(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$, gegeben, von dem wir übrigens durchaus nicht die Existenz einer Resultante voraus-

setzen (Fig. 22). Dann konstruieren wir ein Summationseck $012\ldots n$ der frei gedachten Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$, also:

$$\mathbf{01} = \mathfrak{a}_1,\quad \mathbf{12} = \mathfrak{a}_2,\quad \mathbf{23} = \mathfrak{a}_3,\quad \ldots,\quad \overline{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{n} = \mathfrak{a}_n.$$

Wir nehmen nun irgend einen Punkt P in η an, wählen auf x_1 irgend einen Punkt S_1 und legen durch ihn $u_0 \parallel 0P$ und $u_1 \parallel 1P$; diese Gerade treffe x_2 in einem Punkte S_2. Durch S_2 ziehen wir $u_2 \parallel 2\boldsymbol{P}$; diese Gerade treffe x_3 in S_3 usw. Durch S_ν ziehen wir $u_\nu \parallel \nu\boldsymbol{P}$; diese Gerade treffe $x_{\nu+1}$ in $S_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, wobei für $\nu = n$ aber kein Punkt S_{n+1} zu bestimmen ist.

3. So trivial es auf den ersten Blick scheinen mag, lohnt es sich, bei dem einfachen System $\mathfrak{S}'$ noch länger verweilend, nach Analogie der Figur 21 in Art. 1 das vollständige Summationseck des Systems $\mathfrak{S}'$ zu konstruieren. Man mache also:

$$\boldsymbol{0P} = \mathfrak{k}_0,\quad \boldsymbol{P1} = \mathfrak{k}_1,\quad \boldsymbol{1P} = \bar{\mathfrak{k}}_1,\quad \boldsymbol{P2} = \mathfrak{k}_2,\quad \boldsymbol{2P} = \bar{\mathfrak{k}}_2,\quad \ldots,\quad \boldsymbol{Pn} = \mathfrak{k}_n.$$

Da $\mathfrak{k}_\nu$ und $\bar{\mathfrak{k}}_\nu$ auf derselben Geraden liegen, so wird die Seite des Summationsecks, die gleich $\bar{\mathfrak{k}}_\nu$ ist, parallel und gleich der Seite sein, die gleich $\mathfrak{k}_\nu$ ist, und da überdies diese Seiten aneinanderstoßen, so werden sie mit entgegengesetzten Pfeilrichtungen aufeinanderfallen. So kommt es, daß von dem Summationseck von $\mathfrak{S}'$ die Seiten $1\boldsymbol{P}$, $2P, \ldots, \overline{n-1}P$ doppelt gezählt sind. Die Schlußlinie ist $\boldsymbol{0n}$, also dieselbe, die sich auch vorher nach Ausschaltung der uneigentlichen Paare ergab. Gleichzeitig ist aber

$\mathbf{01}$ Schlußlinie von	$0P1$, also	$\mathbf{01} =$	$\boldsymbol{0P}+\boldsymbol{P1}$	$= \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_1,$
$\mathbf{12}$ „ „	$1P2$, „	$\mathbf{12} =$	$\boldsymbol{1P}+\boldsymbol{P2}$	$= \bar{\mathfrak{k}}_1 + \mathfrak{k}_2,$
$\mathbf{23}$ „ „	$2P3$, „	$\mathbf{23} =$	$\boldsymbol{2P}+\boldsymbol{P3}$	$= \bar{\mathfrak{k}}_2 + \mathfrak{k}_3,$
. . . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$\overline{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{n}$ „ „	$\overline{n-1}Pn$, „	$\overline{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{n} =$	$\overline{\boldsymbol{n-1}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Pn}$	$= \bar{\mathfrak{k}}_{n-1} + \mathfrak{k}_n.$

Daher ist nach Größe und Pfeilrichtung:

$\mathbf{01}$ gleich der Resultante der Vektoren $(\mathfrak{k}_0, u_0)$ und $(\mathfrak{k}_1, u_1)$,
$\boldsymbol{\nu-1, \nu}$ „ „ „ „ „ $(\bar{\mathfrak{k}}_{\nu-1}, u_{\nu-1})$ „ $(\mathfrak{k}_\nu, u_\nu)$,

$$\nu = 2, \ldots, n.$$

Die erste dieser Resultanten geht aber durch den Schnittpunkt S_1 von u_0 und u_1.

Da

$$u_\nu \parallel \nu\boldsymbol{P} \quad \text{und} \quad x_{\nu+1} \parallel \mathfrak{a}_{\nu+1} \parallel \overline{\boldsymbol{\nu\nu+1}}$$

ist, so wird u_ν die Gerade $x_{\nu+1}$, wie wir es verlangen, im Endlichen

schneiden, wenn νP nicht parallel $\overline{\nu\nu+1}$ ist, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, d. h. P darf nicht auf $\overline{\nu\nu+1}$ liegen $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$. Setzen wir das noch voraus, so wird also die Konstruktion von $u_0, u_1, \ldots, u_n$ immer gelingen. Nimmt man jetzt $\mathfrak{k}_0 = \mathbf{0}\boldsymbol{P}$, $\mathfrak{k}_1 = \boldsymbol{P}\mathbf{1}$, $\bar{\mathfrak{k}}_1 = \mathbf{1}\boldsymbol{P}$, ..., $\mathfrak{k}_n = \boldsymbol{Pn}$, so haben wir ein System $\mathfrak{S}'$ gefunden, das in der Tat dem System $\mathfrak{S}$ äquivalent ist; denn die zu $\mathfrak{S}'$ gehörige Figur $\mathfrak{S}$ ist wieder die, von der wir ausgingen.

4. Wir haben noch etwas mehr gefunden, als wir suchten, denn die Existenz von $\mathfrak{S}'$ ist nicht, wie es anfangs scheinen konnte, an die einer Resultante des Systems $\mathfrak{S}$ geknüpft. Die Entscheidung, ob $\mathfrak{S}$ einer Resultante oder einem Gegenpaar äquivalent ist, muß also am System $\mathfrak{S}'$ fallen. Da nun $\mathfrak{S}'$ in letzter Linie dem System $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_n, u_n)$ äquivalent ist, so hängt von diesem Systeme die Entscheidung ab.

Tritt ein Gegenpaar auf (Fig. 24), so ist es mit $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_n, u_n)$ identisch; dann ist also $\mathfrak{k}_0 + \mathfrak{k}_n = 0$ und $u_0 \| u_n$. Das überträgt sich in der Weise auf das Summationseck, daß $\mathbf{0}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Pn} = 0$ und $\mathbf{0}\boldsymbol{P} \| \boldsymbol{Pn}$ ausfällt, d. h. n muß mit $\mathbf{0}$ zusammenfallen, ohne daß P in diesen Punkt zu liegen kommt, weil sonst $\mathfrak{k}_0 = \mathbf{0}\boldsymbol{P}$ verschwände. Wenn n mit $\mathbf{0}$ zusammenfällt, also, wie man sich ausdrückt (Art. 1), das Summationseck sich schließt, ohne daß P in $\mathbf{0}$ liegt, so werden umgekehrt u_0 und u_1 einander parallel und sind Angriffslinien eines Gegenpaares, dessen Vektoren die Länge $0n$ haben; dieses Paar wird ein uneigentliches oder ein eigentliches sein, je nachdem u_0 und u_n identisch sind oder nicht. Damit ist dieser Fall erledigt.

Ist der Punkt n von $\mathbf{0}$ verschieden, so muß daher eine Resultante existieren, und der Vektor $\mathbf{0}\boldsymbol{n}$ ist ihr gleich (Fig. 20). Damit das System $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_n, u_n)$ sie unmittelbar zu bestimmen gestattet, müssen die Geraden u_0, u_n einander im Endlichen schneiden, d. h. es darf $0P$ nicht parallel zu Pn sein, also P nicht auf $0n$ liegen. Das haben wir aber in unserer Gewalt. Die in 3. gefundene Einschränkung zusammen mit der jetzigen ergibt die Regel: P darf nicht auf dem Streckenzug $123\ldots n0$ liegen, wohl aber auf 01 und außerhalb dieser Geraden. Unter dieser Bedingung treffen sich u_0 und u_n in einem Punkte S, durch den parallel zu $0n$ die Angriffslinie x der Resultante geht. Bei den ∞^2 Lagen, die P noch einnehmen kann, wird man immer P so zu wählen haben, daß sämtliche Schnittpunkte $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und S auf das Zeichenblatt gehen und scharf bestimmbar sind.

5. Hieraus entnehmen wir das folgende praktische Resultat: Zur Summation des Systems $\mathfrak{S}$ der Vektoren

$$(\mathfrak{a}_1, x_1), \ldots, (\mathfrak{a}_n, x_n)$$

zeichnet man unter Ersparnis unnötiger Konstruktionen (Fig. 23 und 24):

1. einen Lageplan der Angriffslinien $x_1, \ldots, x_n$, ohne die Vektoren auf denselben;
2. ein Summationseck $012\ldots n$; dieses gibt zugleich die Vektoren an; es ist

$$\overline{h-1h} = \mathfrak{a}_h, \quad h = 1, 2, \ldots, n.$$

Um die Zeichenfehler zu verringern, wird man das Summationseck möglichst nahe beim Lageplan annehmen und, soweit es geht, mit diesem verflechten, indem man etwa 01 auf x_1 annimmt.[1]) Nun wählt man den „Pol" P des Summationsecks außerhalb des Streckenzugs $123\ldots n0$, nimmt auf x_1 die Ecke S_1 des Situationsecks $S_1 S_2 \ldots S_n$ beliebig an, bestimmt dazu auf $x_2, x_3, \ldots, x_n$ die Ecken $S_2, S_3, \ldots, S_n$, indem man $S_1 S_2 \parallel 1P$, $S_2 S_3 \parallel 2P$, $\ldots$, $S_{n-1} S_n \parallel n-1P$ zieht und legt noch durch S_1 und S_n die „äußeren Seiten" u_0, u_n des Summationsecks, nämlich $u_0 \parallel 0P$, $u_n \parallel nP$.

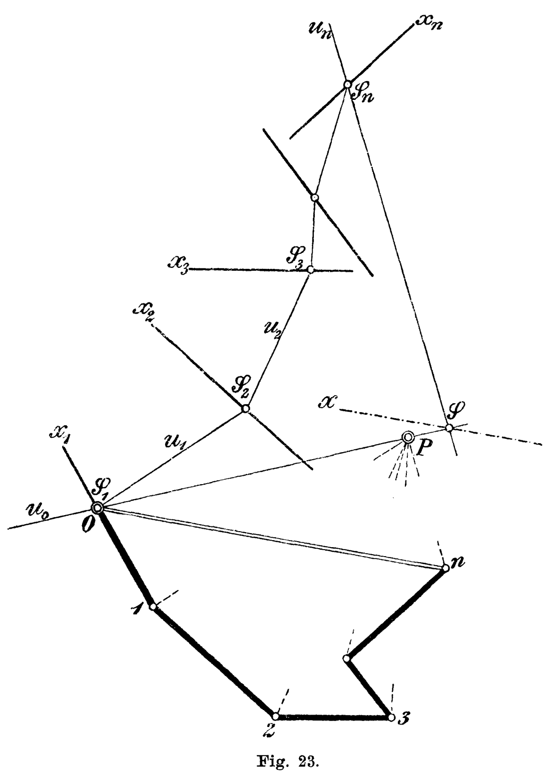


Fig. 23.

Fällt der „Endpunkt" n des Summationsecks nicht mit dem Anfangspunkt 0 zusammen (Fig. 23), so hat $\mathfrak{S}$ eine Resultante $(\mathfrak{a}, x)$, deren Angriffslinie x durch den Schnittpunkt S der äußeren Seiten u_0, u_n des Summationsecks parallel zu $\mathbf{0n}$ gefunden wird, während $\mathfrak{a} = \mathbf{0n}$ ist.

1) Da die Figuren unseres Textes in erster Linie didaktischen Zwecken dienen, so mußte zur Erzielung größerer Übersichtlichkeit von den Forderungen des Praktikers meist abgesehen werden. Für praktische Figuren sind wegen der größeren Genauigkeit dünn ausgezogene Geraden notwendig, während eine didaktisch gute Figur ausdrucksvoll sein muß.

Fällt hingegen n mit 0 zusammen (Fig. 24), so ist $\mathfrak{S}$ dem Gegenpaare $(\mathfrak{k}_0, u_0)$, $(\mathfrak{k}_n, u_n)$ äquivalent, wo $\mathfrak{k}_0 = \mathbf{0P}$, $\mathfrak{k}_n = \mathbf{P0}$, also $u_n \parallel u_0$ ist. Dieses Gegenpar ist ein eigentliches oder uneigentliches, je nachdem u_n von u_0 verschieden ist oder nicht. Ein uneigentliches Gegenpaar reduziert sich natürlich auf den Vektor Null.

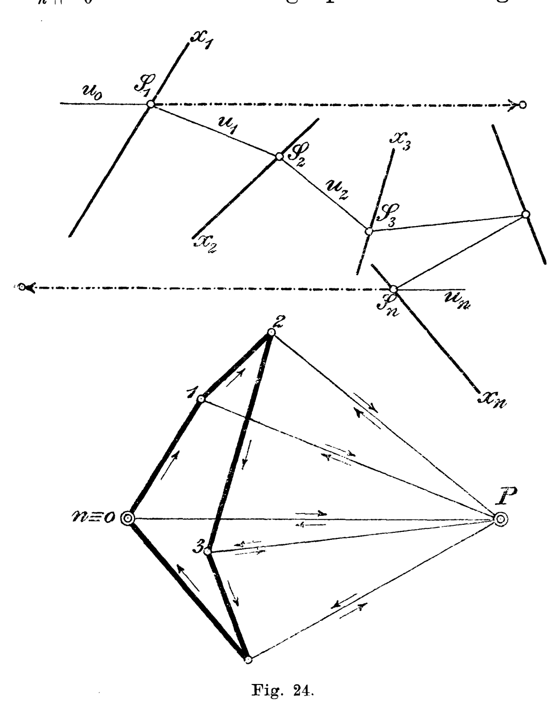


Fig. 24.

Damit ist das Summationsproblem in ebenso eleganter, als praktischer Weise gelöst. Benutzt man beim praktischen Konstruieren der Parallelen, wie üblich, zwei Dreieckslineale, so kann das Ziehen der Geraden $0P, 1P, \ldots, nP$ und $n0$ erspart werden (Fig. 23). Je weniger Linien, desto größere Klarheit; nur an deutlicher Bezeichnung der verschiedenen Angriffslinien und Vektoren darf man es nicht fehlen lassen, weil sonst leicht Verwechslungen vorkommen. Nach der rein begrifflichen Seite ist noch hervorzuheben, daß aus unserem Beweis der Eindeutigkeit und Widerspruchslosigkeit des Summationsbegriffes speziell auch die Gültigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes der Addition linienflüchtiger Vektoren folgt.

6. Nach Festlegung des Pols P eines Summationsecks kann die erste Ecke S_1 des Situationsecks auf der ersten Angriffslinie noch in unendlich vielen Lagen gewählt werden; ist auch S_1 fest angenommen, so ist das Situationseck $S_1 S_2 \ldots S_n$ bestimmt. Von einem anderen Anfangspunkte S_1' ausgehend erhält man ein anderes Situationseck $S_1' S_2' \ldots S_n'$ von der Art, daß $S_\nu' S_{\nu+1}' \parallel S_\nu S_{\nu+1}$ ist $(\nu = 1, \ldots, n-1)$, außerdem sind die äußeren Seiten des einen Ecks den entsprechenden des anderen parallel. Man kann das neue Eck so konstruieren, daß eine bestimmte Seite u_ν' desselben durch einen vorgeschriebenen Punkt geht; denn zieht man diese Seite zuerst, so kann man von ihr sofort die vorangehenden und die folgenden

Seiten finden, wie ein Blick auf die Figur 25 zeigt. Wir merken uns nur:

> Beziehen sich zwei Situationsecke auf denselben Pol, so sind entsprechende Seiten derselben parallel,

so daß man also bei der Konstruktion des zweiten Ecks sich nach den Seiten des ersten richten kann, die meistens bequemer liegen als das Summationseck.

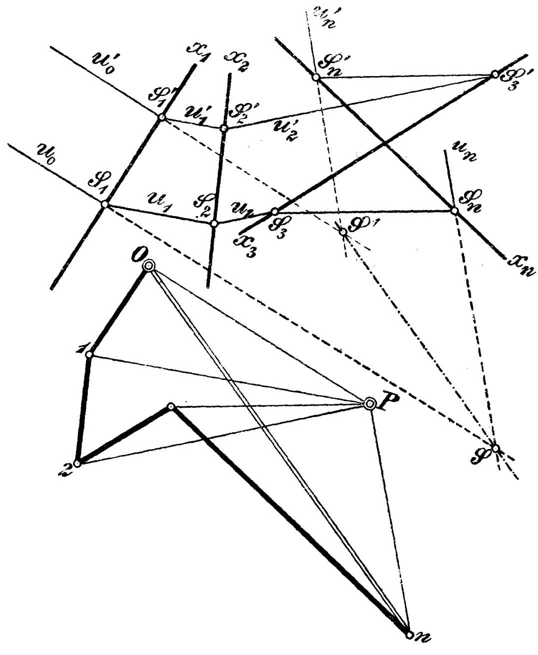


Fig. 25.

7. Interessanter ist das Verhalten des Summationsecks, wenn man den Pol verschiebt. Sei wiederum ein System $\mathfrak{S}$ von n Vektoren $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, durch den Lageplan seiner Angriffslinien x_ν und ein Summationseck $012\ldots n$ der $\mathfrak{a}_\nu$ gegeben (Fig. 26 a. f. S.); es sei dahingestellt, ob das System einer einzelnen Resultante oder einem Gegenpaar äquivalent ist. Von einem auf x_1 willkürlich angenommenen Eckpunkte S_1 ausgehend konstruieren wir zu einem Pole P das Situationseck $S_1 S_2 \ldots S_n$ mit den Seiten $u_0 u_1 \ldots u_n$; ebenso von einem Punkte S_1' der Geraden x_1 ausgehend zu einem Pole $\boldsymbol{P}'$ das Situationseck $S_1' S_2' \ldots S_n'$ mit den Seiten $u_0' u_1' \ldots u_n'$. Dann ist $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S} \simeq \mathfrak{T}'$, wo

$$\mathfrak{T} \text{ besteht aus } (\bar{\mathfrak{f}}_0, u_0);\ (\mathfrak{f}_1, u_1), (\bar{\mathfrak{f}}_1, u_1);\ (\mathfrak{f}_2, u_2), (\bar{\mathfrak{f}}_2, u_2);\ \ldots;$$
$$(\mathfrak{f}_{n-1}, u_{n-1}), (\bar{\mathfrak{f}}_{n-1}, u_{n-1});\ (\mathfrak{f}_n, u_n),$$
$$\mathfrak{f}_\nu = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\nu},\ \bar{\mathfrak{f}}_\nu = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{P},\ \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Ebenso ist $\mathfrak{T}'$ aus den mit Akzenten versehenen Vektoren zusammengesetzt:

$$\mathfrak{T}' \text{ besteht aus } (\bar{\mathfrak{f}}_0', u_0');\ (\mathfrak{f}_1', u_1'), (\bar{\mathfrak{f}}_1', u_1');\ (\mathfrak{f}_2', u_2'), (\bar{\mathfrak{f}}_2', u_2');\ \ldots;$$
$$(\mathfrak{f}_{n-1}', u_{n-1}'), (\bar{\mathfrak{f}}_{n-1}', u_{n-1}');\ (\mathfrak{f}_n', u_n'),$$
$$\mathfrak{f}_\nu' = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{\nu},\ \bar{\mathfrak{f}}_\nu' = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{P}',\ \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

und man hat

(1) $$(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu) \simeq (\bar{\mathfrak{k}}_{\nu-1}, u_{\nu-1}) + (\mathfrak{k}_\nu, u_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

In der analogen Äquivalenz der mit Akzenten versehenen Vektoren drehen wir die Sinne um:

(2) $$(\bar{\mathfrak{a}}_\nu, x_\nu) \simeq (\mathfrak{k}'_{\nu-1}, u'_{\nu-1}) + (\bar{\mathfrak{k}}'_\nu, u'_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Die vier in (1) und (2) rechts stehenden Vektoren

(3) $$(\mathfrak{k}'_{\nu-1}, u'_{\nu-1}), \ (\bar{\mathfrak{k}}_{\nu-1}, u_{\nu-1}), \ (\mathfrak{k}_\nu, u_\nu), \ (\bar{\mathfrak{k}}'_\nu, u'_\nu)$$

sind der Summe $(\mathfrak{a}_\nu, x_\nu) + (\bar{\mathfrak{a}}_\nu, x_\nu) = (\mathfrak{o}, x_\nu)$ äquivalent; ihr Summationseck $P'\overline{\nu-1}P\nu P'$ ist in der Tat geschlossen.

Haben die beiden ersten Vektoren in (3) eine Resultante, so ist sie gleich $\boldsymbol{P'P}$ und geht durch den Schnittpunkt $T_{\nu-1}$ von $u_{\nu-1}$, $u'_{\nu-1}$, der aber auch im Unendlichen liegen kann; die beiden letzten Vektoren müssen dann ebenfalls eine Resultante haben, da ein Gegenpaar zusammen mit $\boldsymbol{P'P}$ nicht den Vektor Null ergeben kann; diese Resultante ist gleich $\boldsymbol{PP'}$, geht durch den Schnittpunkt T_ν von u_ν und u_ν' und muß, um mit der ersten Resultante den Vektor Null geben zu können, mit ihr auf derselben Angriffslinie liegen, die parallel zu PP' ist. Demnach liegen T_1 und T_2, T_2 und T_3, $\ldots$, T_{n-1} und T_n je auf einer Parallelen zu PP', d. h. diese Punkte befinden sich auf einer und derselben Geraden, die zu PP' parallel ist.

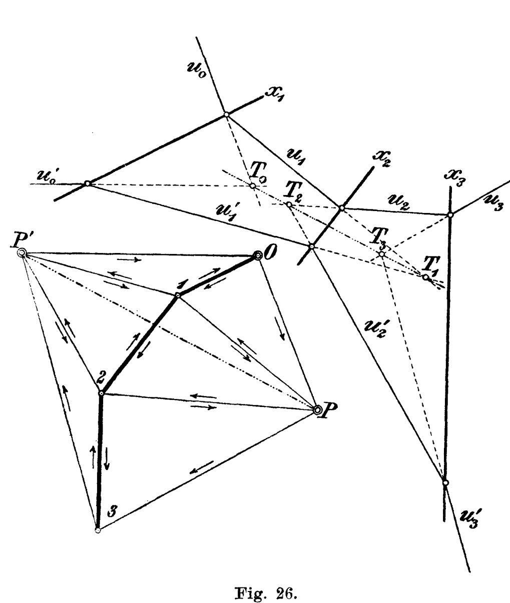


Fig. 26.

Wenn die beiden ersten Vektoren in (3) für jedes ν ein Gegenpaar bilden, so ist $\mathfrak{k}'_{\nu-1} = \mathfrak{k}_{\nu-1}$, $\boldsymbol{P'\overline{\nu-1}} = \boldsymbol{P\overline{\nu-1}}$, d. h. P' fällt mit P zusammen, und es liegt der in 6. untersuchte Fall zweier zu demselben Pol gehöriger Situationsecke vor. So erhalten wir den schönen Satz:

Konstruiert man zu zwei verschiedenen Polen zwei Situationsecke desselben Systems $\mathfrak{S}$, so liegen die

Schnittpunkte je zweier entsprechender (gleichvielter) Seiten des ersten und des zweiten Ecks auf einer Geraden, die zur Verbindungsgeraden der beiden Pole parallel verläuft.

§ 5. Die Voraussetzungen der Vektorsummation.

1. Wie die Geometrie unter Voraussetzung ihrer Axiome sich als eine rein deduktive Wissenschaft darstellen läßt, so beruht auch die Geometrie der Vektorensummation auf einer geringen Zahl von Voraussetzungen, die man als die Axiome dieses Denkbereiches bezeichnen muß. Diese Axiome haben, wie in der Arithmetik und Geometrie, eine doppelte Aufgabe: dem reinen Denkbereiche dienen sie zur Grundlage eines streng deduktiven Erkenntnisverfahrens, den zu erforschenden Naturerscheinungen gegenüber bilden sie die Kriterien der Anwendbarkeit dieses Denkbereiches. Gründet man die Vektorgeometrie auf die Euklidische Geometrie, so sind nach Darboux[1]) und F. Schur[2]) zum Aufbau der Vektoren an demselben Angriffspunkte im ganzen sechs Axiome notwendig, die wir im folgenden angeben werden. Wie F. Schur gezeigt hat, ist von diesen Axiomen keines eine Folge der anderen und wir werden sehen, daß sie zur Herleitung der geometrischen Vektorsummation vollständig ausreichen, während sie ihrerseits aus den allgemeinen Gesetzen der geometrischen Addition durch Spezialisierung gewonnen sind.

2. Wir fordern:

Axiom I. Zwei Vektoren $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ an demselben Angriffspunkte O bestimmen eindeutig einen Vektor $\boldsymbol{OC}$, der mit $\boldsymbol{OA}$ zusammenfällt, wenn $\boldsymbol{OB}$ verschwindet.

Der so aus $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ „zusammengesetzte“ Vektor $\boldsymbol{OC}$ heißt die „geometrische Summe“ von $\boldsymbol{OA}, \boldsymbol{OB}$ und wird bis zum Nachweis der Identität dieses Begriffs mit dem der vorangehenden Paragraphen wie folgt bezeichnet:

$$\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB}.$$

---

1) G. Darboux, Sur la composition des forces en statique, Bull. des sciences math. 9 (1875), p. 281—88; vergl. dazu G. Darboux, Sur le théorème fondamental de la géométrie projective, Math. Ann. 17 (1880), p. 55—61, speziell p. 56, Fußnote.

2) F. Schur, Über die Zusammensetzung von Vektoren, Ztschr. f. Math. u. Phys. 49 (1903), S. 352—361. Weitere Literatur: Encyklop. der math. Wiss., IV.

Denkt man weniger an die Entstehungsart von $\mathbf{OC}$ als an die Tatsache, daß auch $\mathbf{OC}$ ein Vektor ist, so heißt $\mathbf{OC}$ auch die „Resultante“ von $\mathbf{OA}$ und $\mathbf{OB}$.

Für die geometrische Summierung von Vektoren an demselben Angriffspunkte gilt

Axiom II: das kommutative Gesetz:

$$\mathbf{OB} + \mathbf{OA} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB};$$

Axiom III: das assoziative Gesetz:

$$(\mathbf{OA} + \mathbf{OB}) + \mathbf{OC} = \mathbf{OA} + (\mathbf{OB} + \mathbf{OC}).$$

Da nach II und III

$$(\mathbf{OA} + \mathbf{OB}) + \mathbf{OC} = (\mathbf{OB} + \mathbf{OA}) + \mathbf{OC} = \mathbf{OB} + (\mathbf{OA} + \mathbf{OC}),$$

also

$$(1) \quad \mathbf{OA} + (\mathbf{OB} + \mathbf{OC}) = \mathbf{OB} + (\mathbf{OC} + \mathbf{OA}) = \mathbf{OC} + (\mathbf{OA} + \mathbf{OB})$$

ist, so wird die Summe der drei Vektoren $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$, $\mathbf{OC}$ unzweideutig durch $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC}$ bezeichnet.

Axiom IV. Die Resultante von Vektoren an demselben Angriffspunkte O ist gegenüber der Drehung des Systems um O invariant,

d. h. wenn man die gegebenen Vektoren starr miteinander verbunden denkt und um den Angriffspunkt dreht, so bewegt sich die Resultante mit, als wäre sie mit den gegebenen Vektoren ebenfalls starr verbunden.

Satz 1. Haben also zwei Vektoren $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$ den Angriffspunkt O und die Angriffslinie u gemein, so muß auch $\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB}$ auf dieser Angriffslinie liegen.

Denn die Vektoren $\mathbf{OA}$ und $\mathbf{OB}$ und folglich auch $\mathbf{OC}$ gehen in sich über, wenn man die Gerade u sich als Rotationsachse drehen läßt (Fig. 27).

A O B u

Fig. 27.

Satz 2. Zwei entgegengesetzt gleiche Vektoren $\mathbf{OA}$, $\mathbf{OB}$ an demselben Angriffspunkte haben die Summe Null.

Ist nämlich O (Fig. 27) die Mitte der Strecken AB, so läßt sich das System um O so drehen, daß A und B ihre Lage vertauschen, dabei darf die Resultante $\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{OB}$, die nach

Satz 1 ebenfalls auf u ruht, ihre Lage nicht ändern, was nur möglich ist, wenn C mit O zusammenfällt.

Satz 3. Wenn die Resultante $\boldsymbol{OC}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ an demselben Angriffspunkte O auf der Angriffslinie u von $\boldsymbol{OA}$ liegt, so liegt auch $\boldsymbol{OB}$ auf dieser Angriffslinie (Umkehrung von Satz 1).

Ist nämlich $\boldsymbol{O\bar{A}}$ der mit $\boldsymbol{OA}$ entgegengesetzt gleiche Vektor, so ist nach III, da $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ vorausgesetzt wird:

$$\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{O\bar{A}} = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}) + \boldsymbol{O\bar{A}} = \boldsymbol{OB} + (\boldsymbol{O\bar{A}} + \boldsymbol{OA}),$$

also nach Satz 2: $\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{O\bar{A}} = \boldsymbol{OB} + \text{Null} = \boldsymbol{OB}$ (nach I), und da $\boldsymbol{OC}$ und $\boldsymbol{OA}$, also auch $\boldsymbol{OC}$ und $\boldsymbol{O\bar{A}}$ auf derselben Angriffslinie u liegen, so liegt auch $\boldsymbol{OB}$ nach Satz 1 auf u.

Satz 4 Wenn die Resultante zweier Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ an demselben Angriffspunkte O verschwindet, so sind sie entgegengesetzt gleich (Umkehrung von Satz 2).

Ist nämlich $\boldsymbol{O\bar{A}}$ der mit $\boldsymbol{OA}$ entgegengesetzt gleiche Vektor, und $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$, so ist wiederum $\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{O\bar{A}} = \boldsymbol{OB}$, also $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{O\bar{A}} + \text{Null} = \boldsymbol{O\bar{A}}$ nach I.

Satz 5. Die Resultante zweier Vektoren an demselben Angriffspunkte liegt in der Ebene, die diese Vektoren bestimmen.

Ist nämlich (Fig. 28) $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ und $\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{O\bar{A}} = 0$, $\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{O\bar{B}} = 0$, sowie $\boldsymbol{O\bar{C}} = \boldsymbol{O\bar{A}} + \boldsymbol{O\bar{B}}$, so ist

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{O\bar{C}} + \boldsymbol{OA} \\ &= \boldsymbol{OA} + (\boldsymbol{O\bar{A}} + \boldsymbol{O\bar{B}}) \\ &= (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{O\bar{A}}) + \boldsymbol{O\bar{B}} \\ &= \boldsymbol{O\bar{B}}, \\ & \boldsymbol{O\bar{C}} + \boldsymbol{OC} \\ &= \boldsymbol{O\bar{C}} + (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}) \\ &= (\boldsymbol{O\bar{C}} + \boldsymbol{OA}) + \boldsymbol{OB} \\ &= \boldsymbol{O\bar{B}} + \boldsymbol{OB} = 0, \end{aligned}$$

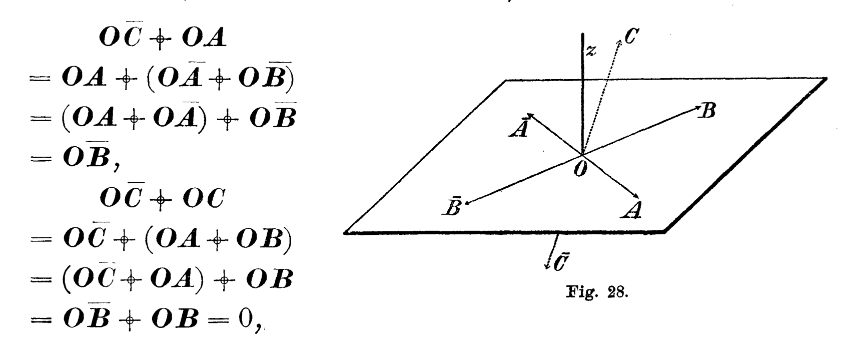


Fig. 28.

also $\boldsymbol{O\bar{C}}$ nach Satz 4 mit $\boldsymbol{OC}$ entgegengesetzt gleich. Dreht man nun das als starr gedachte System $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ um die in O auf der Ebene AOB errichtete Normale z (Fig. 28), bis $\boldsymbol{OA}$ die Lage

$\boldsymbol{O\bar{A}}$, also $\boldsymbol{O\bar{B}}$ die Lage von $\boldsymbol{OB}$ einnimmt, so muß nach Axiom IV der Vektor $\boldsymbol{OC}$ ebenfalls diese Drehung um 180° mitmachen, andererseits aber als Resultante von $\boldsymbol{O\bar{A}}$, $\boldsymbol{O\bar{B}}$ in die Lage $\boldsymbol{O\bar{C}}$ fallen, was unmöglich ist, wenn nicht $\boldsymbol{OC}$ auf z senkrecht steht, d. h. in der Ebene OAB liegt, w. z. b. w. Liegt aber $\boldsymbol{OC}$ in dieser Ebene, so geht $\boldsymbol{OC}$ bei jener Drehung in der Tat in $\boldsymbol{O\bar{C}}$ über, da dieselbe genau 180° beträgt.

3. Seien jetzt $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OC}$ drei nicht in einer Ebene gelegene Vektoren (Fig. 29) und

$$\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OZ},$$
$$\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{OX},$$
$$\boldsymbol{OC} + \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OY}.$$

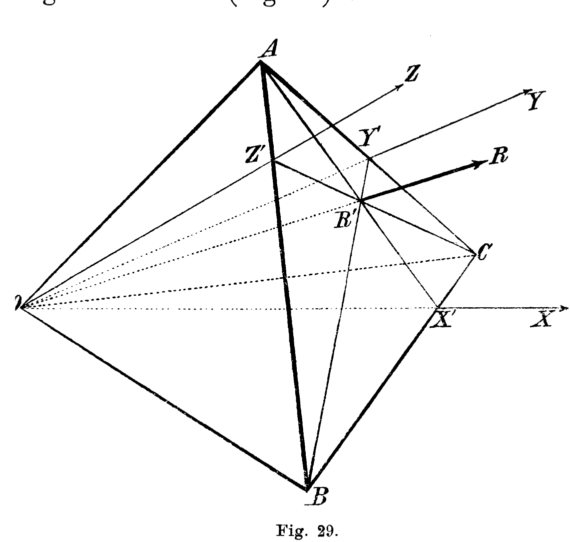


Fig. 29.

Bezeichnet noch $\boldsymbol{OR}$ die Resultante von $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OC}$, so ist nach (1):

$$\boldsymbol{OR} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OX}$$
$$= \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OY}$$
$$= \boldsymbol{OC} + \boldsymbol{OZ},$$

also muß $\boldsymbol{OR}$ mit $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OX}$, mit $\boldsymbol{OB}$ und $\boldsymbol{OY}$, mit $\boldsymbol{OC}$ und $\boldsymbol{OZ}$ je in einer Ebene liegen (Satz 5). Daraus läßt sich eine Beziehung zwischen den Strahlen OA, OB, OC, OX, OY, OZ und OR ableiten. Die vier letzten Strahlen treffen nämlich die Ebene ABC in vier Punkten X', Y', Z', R', so daß X' auf BC, Y' auf CA, Z' auf AB liegt und die Geraden AX', BY', CZ' durch R' gehen. Fällt man noch von R' auf AB, BC, CA die Lote x, y, z, sowie aus Z' auf BC und CA die Lote p und q (Fig. 30), so ist

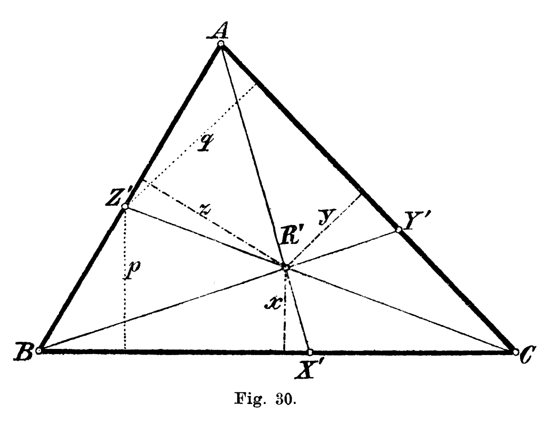


Fig. 30.

$$AZ' : Z'B = \text{Dreieck } ACZ' : \text{Dreieck } Z'CB = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{q}{p} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{y}{x},$$

also:

(2) $$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{CA}{BC} \cdot \frac{y}{x}, \quad \frac{BX'}{X'C} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{z}{y}, \quad \frac{CY'}{Y'A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{x}{z}.$$

Hieraus folgt:

(3) $$\frac{AZ' \cdot BX' \cdot CY'}{Z'B \cdot X'C \cdot Y'A} = 1.$$

Diese Formel gilt ihrer Ableitung nach zunächst nur, wenn R' im Innern des Dreiecks ABC liegt; sie wird von dieser Einschränkung unabhängig, wenn man die Strecken auf den Seiten des Dreiecks ABC in der Weise mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ versieht, daß, wenn P, Q, R auf einer Seite liegen,

(4) $$\boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{QR} = \boldsymbol{PR}, \quad \boldsymbol{QP} = -\boldsymbol{PQ}$$

ist[1]); mißt man nämlich zugleich noch die Lote x, y, z links von der gerichteten Strecke BC, CA, AB positiv, rechts von dieser Strecke negativ, so bleiben die Formeln (2) und damit (3) richtig. Ist nun umgekehrt die Gleichung (3) erfüllt, so schneiden sich AX', BY', CZ' in einem Punkte. Denn wird AB von der Geraden, die den Schnittpunkt von AX' und BY' mit C verbindet, in Z'' getroffen, so gilt außer (3) noch die Gleichung

$$\frac{\boldsymbol{AZ''} \cdot \boldsymbol{BX'} \cdot \boldsymbol{CY'}}{\boldsymbol{Z''B} \cdot \boldsymbol{X'C} \cdot \boldsymbol{Y'A}} = 1,$$

wegen (3) ist daher $AZ' : Z'B = AZ'' : Z''B$, und da es nur einen Punkt gibt, der eine Strecke AB unter Berücksichtigung des Vorzeichens in gegebenem Verhältnis teilt, so muß Z'' und Z' identisch sein. Daraus folgt der

Satz des Ceva für die Ebene: Liegen die Punkte X', Y', Z' je auf den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC, so ist

(5) $$\frac{\boldsymbol{AZ'} \cdot \boldsymbol{BX'} \cdot \boldsymbol{CY'}}{\boldsymbol{Z'B} \cdot \boldsymbol{X'C} \cdot \boldsymbol{Y'A}} = 1$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Ecktransversalen AX', BY', CZ' sich in einem Punkte treffen.

4. Dieser Satz ist leicht auf das Strahlenbündel O zu übertragen. Da (Fig. 29)

1) Man beachte, daß hier die gewöhnlichen Plus- und Minuszeichen stehen, da nach § 1, 6. zu summieren ist.

$$AZ' : Z'B = \text{Dreieck } AOZ' : \text{Dreieck } Z'OB$$
$$= OA \cdot OZ' \sin AOZ : OZ' \cdot OB \sin Z'OB,$$

also

$$(6) \quad \frac{AZ'}{Z'B} = \frac{OA \cdot \sin AOZ'}{OB \cdot \sin Z'OB}, \quad \frac{BX'}{X'C} = \frac{OB \cdot \sin BOX'}{OC \cdot \sin X'OC}, \quad \frac{CY'}{Y'A} = \frac{OC \cdot \sin COY'}{OA \cdot \sin Y'OA},$$

so folgt aus (5):

$$(7) \qquad \frac{\sin AOZ' \cdot \sin BOX' \cdot \sin COY'}{\sin Z'OB \cdot \sin X'OC \cdot \sin Y'OA} = 1.$$

Aus (7) schließt man umgekehrt vermöge (6) auf (5). Damit ist das Analogon des Cevaschen Satzes im Strahlenbündel gefunden. Da der Punkt Z ebenfalls auf OZ', X auf OX', Y auf OY' liegt, so können wir in (7) die Punkte X', Y', Z' durch X, Y, Z ersetzen. Dann lautet der

Satz des Ceva für das Strahlenbündel: Liegen die Strahlen OX, OY, OZ je in den Seiten BOC, COA, AOB eines Dreiseits $O(ABC)$, so ist

$$(8) \qquad \frac{\sin AOZ \cdot \sin BOX \cdot \sin COY}{\sin ZOB \cdot \sin XOC \cdot \sin YOA} = 1$$

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Ebenen AOX, BOY, COZ durch einen Strahl OR gehen.

Die Winkel sind dabei nach (4) so mit positivem oder negativem Zeichen zu versehen, daß, wenn p, q, r drei durch O gehende, in einer Ebene liegende Strahlen sind,

$$\sphericalangle pq + \sphericalangle qr = \sphericalangle pr, \quad \sphericalangle qp = - \sphericalangle pq$$

ist. Wie man das auch immer im einzelnen ausführt, das Verhältnis $\sin(pq) : \sin(qr)$ ändert seinen Wert nicht, wenn man die Richtung von q in die entgegengesetzte verwandelt; also bleibt auch (8) ungeändert, wenn man die Richtung von OX (oder die von OY oder OZ) mit der entgegengesetzten vertauscht. Das muß auch aus einem anderen Grunde so sein: In Figur 30 würde Z' auch dann zwischen A und B liegen, also in (5) das Verhältnis $AZ'/Z'B$ positiv sein, wenn Z sich nicht auf OZ', sondern auf dem ergänzenden Halbstrahle befände. Aus dem Vorzeichen von $\sin AOZ/\sin ZOB$ in (8) kann also nicht entschieden werden, ob Z auf der einen oder der anderen Hälfte der Geraden OZ' (Fig. 29) liegt.

5. Nach (8) ist

$$(9) \qquad \frac{\sin AOZ}{\sin ZOB} = \frac{\sin XOC}{\sin BOX} : \frac{\sin YOC}{\sin AOY}.$$

Wir erteilen jetzt dem Vektor $\boldsymbol{OC}$ eine bestimmte, unveränderliche Größe und nehmen ihn, der größeren Anschaulichkeit wegen, senkrecht auf AOB an, um zu untersuchen, wie die Angriffslinie der Resultante $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ von $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ abhängt. Das Verhältnis $\sin YOC : \sin AOY$ in (9) können wir nach Axiom IV an irgend zwei Vektoren $\boldsymbol{OC'}$ und $\boldsymbol{OA'}$ und ihrer Resultante $\boldsymbol{OY'} = \boldsymbol{OA'} + \boldsymbol{OC'}$ ermitteln (Fig. 31), die aufeinander senkrecht stehen und der absoluten Größe nach gleich $\boldsymbol{OC}$ und $\boldsymbol{OA}$ sind.

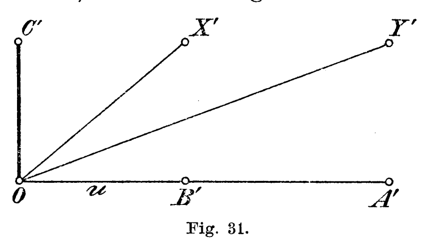


Fig. 31.

Hat man $\boldsymbol{OC'}$ und irgend ein Lot u auf $\boldsymbol{OC}$ in O angenommen, so kann A' noch alle mögliche Lagen auf u annehmen. Es wird also die Länge von $\boldsymbol{OA'}$ und damit auch das Verhältnis

$$(10) \qquad \frac{\sin YOC}{\sin AOY} = \frac{\sin Y'OC'}{\sin A'OY'} = \varphi(a)$$

bei festgehaltenem $\boldsymbol{OC}$ nur von der absoluten Größe a des Vektors $\boldsymbol{OA}$ abhängen, nicht von $\boldsymbol{OB}$ oder der Orientierung von $\boldsymbol{OA}$ gegen den Raum. Diese nur von a abhängige Größe bezeichnen wir (als Funktion von a) mit $\varphi(a)$. — Ganz ebenso läßt sich nach Axiom IV auch $\sin XOC : \sin BOX$ an zwei beliebigen Vektoren berechnen, die in O aufeinander senkrecht stehen und der absoluten Größe nach gleich $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OC}$ sind. Unter Verwendung des Vektors $\boldsymbol{OC'} = \boldsymbol{OC}$ (der Fig. 31) und der darauf senkrechten Angriffslinie u ist B' auf dieselben Lagen beschränkt wie A'; daher hängt

$$(11) \qquad \frac{\sin XOC}{\sin BOX} = \frac{\sin X'OC'}{\sin B'OX'} = \varphi(b)$$

in derselben Weise von b, der absoluten Größe des Vektors $\boldsymbol{OB}$, ab wie das Verhältnis (10) von a.

6. Nach (9) ist jetzt:

$$(12) \qquad \frac{\sin AOZ}{\sin ZOB} = \frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}, \quad \text{wo } \boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}.$$

Die Bestimmung der Angriffslinie der Resultante zweier beliebiger Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ ist damit zurückgeführt auf dieselbe Aufgabe für $\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OC}$ und $\boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OC}$, wo aber $\boldsymbol{OC}$ auf $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ senkrecht steht und der absoluten Größe c nach ein für allemal festgelegt ist. Wir wollen zunächst nach der analytischen Erkenntnismethode annehmen, $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ wären mit a und b gegeben, um daraus sowohl nach (12) die Resultante beliebiger Vektorenpaare zu

bestimmen, als auch neue Eigenschaften von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ selber zu finden, welche die Bestimmung von $\varphi(a)$ ermöglichen sollen. Je nach dem Vorzeichen von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall: $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ sind zugleich positive oder zugleich negative Größen, dann ist $\varphi(b)/\varphi(a)$ positiv, folglich auch das Sinusverhältnis (12). Die Angriffslinie von $\boldsymbol{OZ}$ geht dann durch den von den Halbstrahlen OA, OB gebildeten Winkelraum, und Z liegt entweder als Z auf der einen oder als $\bar{Z}$ auf der anderen Hälfte der durch O geteilten Angriffslinie (Fig. 32). Macht man $O\mathfrak{A}$ auf OA gleich dem absoluten Werte $|\varphi(a)|$ von $\varphi(a)$ und $O\mathfrak{B}$ auf OB gleich dem absoluten Werte $|\varphi(b)|$ von $\varphi(b)$, so ist in dem über $O\mathfrak{A}$ und $O\mathfrak{B}$ konstruierten Parallelogramm $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ der Winkel $O\mathfrak{Z}\mathfrak{A} = \mathfrak{Z}O\mathfrak{B}$, also nach dem Sinussatze

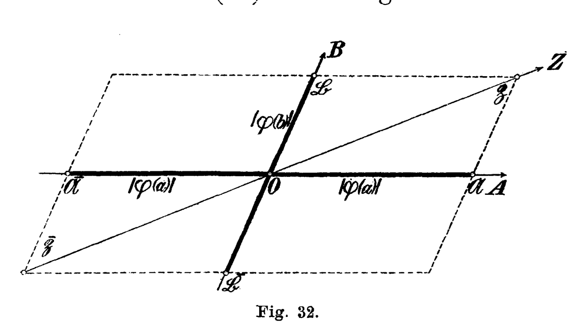


Fig. 32.

$$\sin \mathfrak{A}O\mathfrak{Z} : \sin \mathfrak{Z}O\mathfrak{B} = \sin \mathfrak{A}O\mathfrak{Z} : \sin O\mathfrak{Z}\mathfrak{A} = \varphi(b) : \varphi(a).$$

Daher liegt Z auf $O\mathfrak{Z}$, jedoch nicht etwa notwendigerweise auf dem Halbstrahle $O\mathfrak{Z}$; denn sind $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{B}}$, $\bar{\mathfrak{Z}}$ die symmetrischen Gegenpunkte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Z}$ bezüglich O als Symmetriezentrum, so ist auch

$$\sin \bar{\mathfrak{A}}O\bar{\mathfrak{Z}} : \sin \bar{\mathfrak{Z}}O\bar{\mathfrak{B}} = \varphi(b) : \varphi(a),$$

und Z kann auch auf dem Halbstrahle $O\bar{\mathfrak{Z}}$ liegen. Das Parallelogramm $O\bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{Z}}\bar{\mathfrak{B}}$ ist wie $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ konstruiert, jedoch unter Benutzung von $-|\varphi(a)|$ und $-|\varphi(b)|$. Daher wird folgende „Parallelogrammkonstruktion" der Angriffslinie beide Möglichkeiten des ersten Falles umfassen: Man trägt die Größe $\varphi(a)$, je nachdem sie positiv oder negativ ist, auf OA oder dem entgegengesetzt gerichteten Halbstrahl $O\bar{A}$, ebenso $\varphi(b)$, je nachdem es positiv oder negativ ist, auf OB oder $O\bar{B}$ ab und konstruiert das Parallelogramm über jenen beiden Strecken; seine durch O gehende Diagonale ist dann die Angriffslinie der Resultante $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$. Dasselbe Resultat liefert aber immer auch das andere Parallelogramm der Fig. 32.

Zweiter Fall: $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ sind Größen von entgegengesetzten Vorzeichen. Dann geht die Angriffslinie von $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$

durch den Winkelraum zwischen den Halbstrahlen OA und $O\bar{B}$ sowie durch den Winkelraum zwischen OB und $O\bar{A}$, wenn $\boldsymbol{O\bar{A}}$ den zu $\boldsymbol{OA}$ entgegengesetzt gleichen Vektor, $\boldsymbol{O\bar{B}}$ den zu $\boldsymbol{OB}$ entgegengesetzt gleichen Vektor bezeichnet. Wiederum wird man die Angriffslinie von $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ als Diagonale $O\mathfrak{Z}$ eines Parallelogramms $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\bar{\mathfrak{B}}$ oder $O\bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{Z}}\mathfrak{B}$ erhalten (Fig. 33), von dem zwei Seiten gleich $|\varphi(a)|$ und $|\varphi(b)|$ sind und auf den Geraden OA und OB so liegen, daß die Diagonale in die soeben angegebenen Winkelräume fällt. Beide Parallelogramme liefern dieselbe Angriffslinie, und man wird bemerken, daß immer eines (und nur eines) derselben wörtlich der Parallelogrammkonstruktion des ersten Falles entspricht. Die Parallelogrammkonstruktion gibt also stets die richtige Angriffslinie, weshalb wir auf das andere, zentralsymmetrische Parallelogramm zu gunsten dieses eindeutigen, alle Fälle umfassenden Konstruktionsgesetzes verzichten wollen. Dasselbe gilt seiner Ableitung nach zunächst nur unter der Voraussetzung, daß OA und OB einen von 0 oder 180 Grad verschiedenen Winkel einschließen.

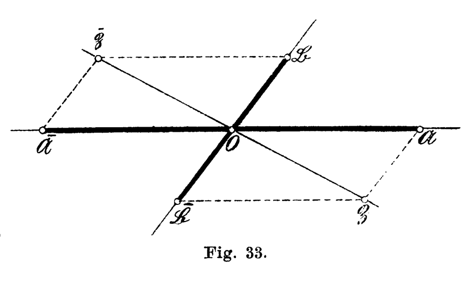


Fig. 33.

7. Ist wieder

$$\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}, \quad \boldsymbol{O\bar{B}} + \boldsymbol{OB} = 0,$$

so ist

$$\boldsymbol{OZ} + \boldsymbol{O\bar{B}} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{O\bar{B}} = \boldsymbol{OA},$$

also

$$\boldsymbol{OZ} + \boldsymbol{O\bar{B}} = \boldsymbol{OA}. \tag{13}$$

Das muß auch die Parallelogrammkonstruktion ergeben: Zu dem Zwecke schicken wir aber erst die Konstruktion von $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ voraus, indem wir auf OA die Strecke $O\mathfrak{A} = \varphi(a)$, auf OB die Strecke $O\mathfrak{B} = \varphi(b)$ unter Berücksichtigung des Vorzeichens von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ abtragen und über $O\mathfrak{A}$, $O\mathfrak{B}$ das Parallelogramm $O\mathfrak{A}\mathfrak{Z}\mathfrak{B}$ konstruieren (Fig. 34). Dann liegt Z auf der Geraden $O\mathfrak{Z}$, doch wissen wir nicht, auf welcher Seite von O. Bezeichnet

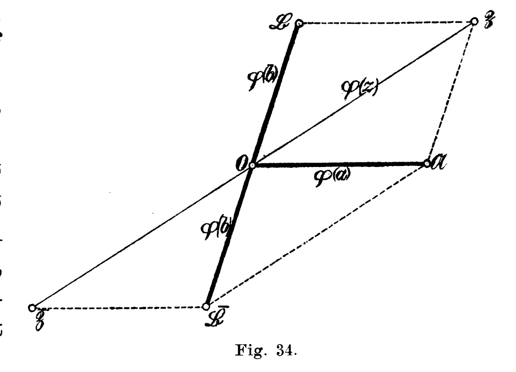


Fig. 34.

also z den absoluten Wert von $\boldsymbol{OZ}$, so wissen wir bei der Anwendung der Parallelogrammkonstruktion auf (13) zunächst nicht, nach welcher Seite wir $\varphi(z)$ auf $O\mathfrak{Z}$ abtragen müssen; dagegen wird $\varphi(b)$ auf $O\overline{B}$ so abzutragen sein, daß der Endpunkt $\overline{\mathfrak{B}}$ bezüglich O zu $\mathfrak{B}$ symmetrisch liegt. Stellt man über den so abgetragenen Strecken $\varphi(z)$, $\varphi(b)$ das Parallelogramm her, so muß die durch O gehende Diagonale, als Angriffslinie von $\boldsymbol{OA}$, den Punkt $\mathfrak{A}$ enthalten. Dieser Bedingung genügt aber nur das Parallelogramm $O\overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{Z}$. Daraus folgt: $O\mathfrak{Z}$ ist gleich $\varphi(z)$, und zwar auch unter Berücksichtigung des Zeichens, da der allenfalls noch in Betracht kommende Punkt $\overline{\mathfrak{Z}}$ nur dann zur richtigen Angriffslinie führt, wenn man zugleich $\mathfrak{B}$ (statt $\overline{\mathfrak{B}}$) nimmt.

Es folgt:

> Die Parallelogrammkonstruktion liefert nicht nur eindeutig die Angriffslinie der Resultante $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, sondern die durch O gehende Diagonale ist auch der Größe und dem Vorzeichen nach gleich der Funktion $\varphi(z)$ des absoluten Wertes z von $\boldsymbol{OZ}$,

d. h. $\varphi(z)$ ist positiv oder negativ, je nachdem Z auf dem Halbstrahle $O\mathfrak{Z}$ oder auf seinem Ergänzungsstrahle $O\overline{\mathfrak{Z}}$ liegt. Die Lage von Z ist also immer noch unbestimmt.

8. Auch versagt die Parallelogrammkonstruktion, wenn $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ auf derselben Angriffslinie x liegen. Ist in diesem Falle $\boldsymbol{OD}$ ein nicht auf x liegender Vektor, so ist die Resultante $\boldsymbol{OF}$ von $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$, $\boldsymbol{OD}$ einerseits

$$(14)\quad \boldsymbol{OF} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OD} = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OD}) + \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OE} + \boldsymbol{OB},$$

wo

$$\boldsymbol{OE} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OD},$$

andererseits

$$(15)\quad \boldsymbol{OF} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OD} = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}) + \boldsymbol{OD} = \boldsymbol{OZ} + \boldsymbol{OD},$$

wo

$$\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}.$$

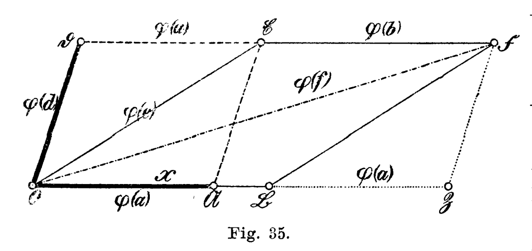


Fig. 35.

Wir nehmen noch an, daß $\boldsymbol{OA}$ und $\boldsymbol{OB}$ auf demselben Halbstrahle liegen. Zur Konstruktion (Fig. 35) der Angriffslinie $\boldsymbol{OE}$ tragen wir auf x die Strecke $O\mathfrak{A} = \varphi(a)$, auf OD die Strecke $O\mathfrak{D} = \varphi(d)$ ab unter Beachtung des Vorzeichens von $\varphi(d)$; dabei bezeichne, wie

immer im folgenden, a den Absolutwert von $\boldsymbol{OA}$, b den von $\boldsymbol{OB}$, d den von $\boldsymbol{OD}$ u. s. w. Dann liegt $\boldsymbol{OE}$ auf der Diagonale $O\mathfrak{E}$ des Parallelogramms $O\mathfrak{A}\mathfrak{E}\mathfrak{D}$. Macht man auf x noch $O\mathfrak{B} = \varphi(b)$, so ist die Diagonale $O\mathfrak{F}$ des Parallelogramms $O\mathfrak{B}\mathfrak{F}\mathfrak{E}$ die Angriffslinie der Resultante $\boldsymbol{OF} = \boldsymbol{OE} \dotplus \boldsymbol{OB}$.

Nach (15) muß $O\mathfrak{F}$ auch die Diagonale eines Parallelogramms mit den Seiten $O\mathfrak{Z}$ und $O\mathfrak{D}$ sein; $\mathfrak{Z}$ muß auf x liegen. Das ist also das Parallelogramm $O\mathfrak{Z}\mathfrak{F}\mathfrak{D}$. Folglich ist $O\mathfrak{Z} = \varphi(z)$, wo $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB}$. Die Figur ergibt aber $\varphi(z) = \varphi(a) + \varphi(b)$, also ist

(16) $$\varphi(z) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

wenn $\boldsymbol{OZ} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB}$ und die Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ auf demselben Halbstrahle liegen.

Hiernach wird die Figur 36 ohne weiteres verständlich sein, in der $\boldsymbol{OB}$ durch $\boldsymbol{O\overline{B}}$ ersetzt ist; $\boldsymbol{OE} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OD}$ bleibt, $\boldsymbol{OZ}$ geht in $\boldsymbol{OZ'} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{O\overline{B}}$ über, $\boldsymbol{OF}$ in $\boldsymbol{OF'}$, und aus der Figur ist zu entnehmen:

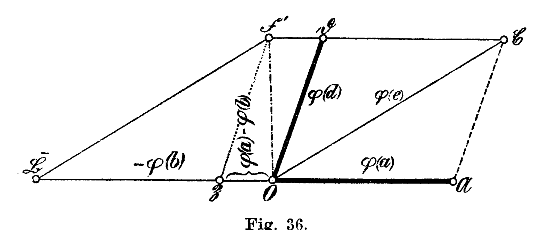


Fig. 36.

(17) $\varphi(z') = \varphi(a) - \varphi(b)$,

wenn $\boldsymbol{OZ'} = \boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{O\overline{B}}$ und die Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ auf demselben Halbstrahle liegen.

9. Wenn n Vektoren $\boldsymbol{OA}_1, \boldsymbol{OA}_2, \ldots, \boldsymbol{OA}_n$ in einer Ebene liegen und ihre Endpunkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein regelmäßiges n-Eck mit dem Zentrum O bilden, so ist, wie aus Satz 5. und Axiom IV folgt, die Resultante gleich Null, also

$$\boldsymbol{O\overline{A}}_n = \boldsymbol{OA}_1 \dotplus \cdots \dotplus \boldsymbol{OA}_{n-1}.$$

Obgleich in diesem Falle und auch sonst noch die Resultante nicht nur der Lage, sondern auch der Größe nach angebbar ist, so reichen, wie Schur[1]) gezeigt hat, die gemachten Voraussetzungen doch nicht aus, die Resultante eindeutig zu definieren. Wir fordern weiter:

Axiom V. Zwei Vektoren $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ mit demselben Angriffspunkte und mit derselben Angriffslinie bilden die Resultante durch algebraische Addition:

(18) $$\boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB},$$

1) l. c. p. 356 ff. Die Darstellung ist nicht elementar wiederzugeben.

d. h. im Endpunkte des einen Vektors trägt man den anderen nach Größe und Richtung an, der vom Anfangspunkt zum erhaltenen Endpunkt E führende Vektor $\boldsymbol{OE}$ ist dann nach Größe und Richtung die Resultante. Es würde übrigens genügen, wenn die Forderung V nur für eine einzige Angriffslinie gestellt würde; denn nach Axiom IV wäre sie dann auf jeder Angriffslinie durch O erfüllt.

Da jetzt, wenn $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ auf demselben Halbstrahle liegen,

$$\boldsymbol{OA} \dotplus \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB}$$

ist, so folgt aus (16) und (17):

$$(19) \qquad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b).$$

10. Aus (19) folgt, wenn m und n ganze Zahlen bezeichnen:

$$\varphi(ma) = m\,\varphi(a), \quad \varphi(e) = \varphi\left(n\frac{e}{n}\right) = n\,\varphi\left(\frac{e}{n}\right),$$

also für $a = e/n$:

$$(20) \qquad \varphi\left(\frac{m}{n}e\right) = \frac{m}{n}\varphi(e).$$

Nimmt man in (12) den Vektor $\boldsymbol{OB}$ der Größe nach gleich $\boldsymbol{OC}$ und senkrecht zu $\boldsymbol{OA}$ an, wo $\boldsymbol{OC}$ der ein für alle Mal ausgezeichnete Vektor der ganzen Untersuchung ist, so wird in (12) die Resultante $\boldsymbol{OZ}$ gleich $\boldsymbol{OY}$ (siehe Fig. 31); durch Vergleichung der Formeln (10) und (12) folgt dann:

$$(21) \qquad \varphi(c) = 1,$$

wo c der Absolutwert von $\boldsymbol{OC}$ ist.

Für $e = c$ ist also

$$(22) \qquad \varphi\left(\frac{m}{n}c\right) = \frac{m}{n}.$$

Die Funktion $\varDelta(x) = c\varphi(x) - x$ hat mithin folgende merkwürdige Eigenschaften:

a) $$\varDelta(x+y) = \varDelta(x) + \varDelta(y);$$

b) $$\varDelta(Mx) = M\varDelta(x),$$

wenn M eine positive ganze Zahl;

c) $$\varDelta(x_c) = 0,$$

wenn x_c mit c kommensurabel ist.

Dann ist x_c von der Form $x_c = mc/n$, wo m und n ganze Zahlen sind. Ist nun $x = x_c + \varepsilon$, wo $x_c = mc/n$, so ist nach a) und c):

(23) $$\Delta(x) = \Delta(\varepsilon),$$

und nach (19), (22):

(24) $$\begin{aligned} c\,\varphi(x) &= \frac{m}{n}c + c\,\varphi(\varepsilon) = c\,\varphi(\varepsilon) + x - \varepsilon = x + \Delta(\varepsilon), \\ c\,\varphi(x_c) &= \frac{m}{n}c = x_c, \end{aligned}$$

woraus nebenbei $\Delta(0) = 0$ folgt. Jetzt ist:

(25) $$c\,\varphi(x) - c\,\varphi(x_c) = \varepsilon + \Delta(\varepsilon).$$

Hierin ist x_c von x um so weniger verschieden, je kleiner ε ist. Wir wollen nun durch ein geeignetes Stetigkeitsaxiom zu erzwingen suchen, daß, wenn die Differenz $x - x'$ dem absoluten Werte nach unter einer gewissen, sehr kleinen Grenze δ bleibt, auch der absolute Wert von $\varphi(x) - \varphi(x')$ unter einer gewissen Grenze Γ bleiben muß. Der Forderung $|x - x'| < \delta$ wird aber genügt, wenn wir $x' = x_c$ und $\varepsilon < c/n$, $c/n < \delta$, also n hinreichend groß annehmen. Dann müßte $|\varphi(x) - \varphi(x_c)| < \Gamma$, also nach (25)

$$|\varepsilon + \Delta(\varepsilon)| < c\Gamma$$

bleiben, weshalb auch $|\Delta(\varepsilon)|$ nicht über eine gewisse Grenze γ wachsen kann. Nun ist aber nach b) einerseits $M\Delta(\varepsilon) = \Delta(M\varepsilon)$, andererseits ist $M\varepsilon$ in der Form $M\varepsilon = \mu c/n + \varepsilon'$ darstellbar, wo μ eine ganze Zahl und $\varepsilon' < c/n < \delta$; nach (23) wäre dann $\Delta(M\varepsilon) = \Delta(\varepsilon')$, also

(26) $$M\Delta(\varepsilon) = \Delta(\varepsilon'),$$

wo auch $|\Delta(\varepsilon')|$ nicht über γ wachsen kann. Wäre aber $\Delta(\varepsilon)$ von Null verschieden, so würde in (26) die linke Seite dem absoluten Werte nach mit M über alle Grenzen wachsen, während die rechte Seite endlich bleiben muß. Das ist ein Widerspruch, der sich nur dann hebt, wenn für alle Werte von ε, die unter der Grenze δ bleiben, $\Delta(\varepsilon)$ identisch Null ist. Nach (24) ist dann $c\,\varphi(x) = x$. Da die Darstellung von x in der Form $x = x_c + \varepsilon$, $\varepsilon < \delta$, für alle positiven Werte von x möglich ist, so haben wir allgemein:

(27) $$c\,\varphi(x) = x,$$

und es ist auch allgemein $\Delta(x) = 0$, während in c) nur $\Delta(x_c) = 0$ erwiesen war.

11. Alles das gilt nur auf Grund des erst vorläufig formulierten Stetigkeitsaxioms, das wir nun noch so umgestalten wollen, daß es nicht auf die Hilfsfunktion $\varphi(x)$ bezug nimmt. Wächst x von x_c bis

$x_c + \varepsilon$, so wird die Angriffslinie r der Resultante eines unveränderlichen Vektors OA und eines Vektors von der veränderlichen Länge x ebenfalls ihre Lage und Größe verändern (Fig. 37). Soll nun die Resultante, wenn x kleine Schwankungen erfährt, ebenfalls nur kleine Schwankungen erleiden, so muß vor allem die Drehung der Angriffslinie um O nur klein sein; folglich darf (nach der Parallelogrammkonstruktion) auch die Differenz $\varphi(x) - \varphi(x_c)$ mit ε nur in engen Grenzen sich verändern, denn wenn diese Differenz unendlich würde, so könnte x zwischen den Lagen r_c und OX schwanken, und dieses Schwankungsgebiet würde für noch so kleines ε gelten. Wir kommen also auf die oben gestellte Forderung zurück durch das

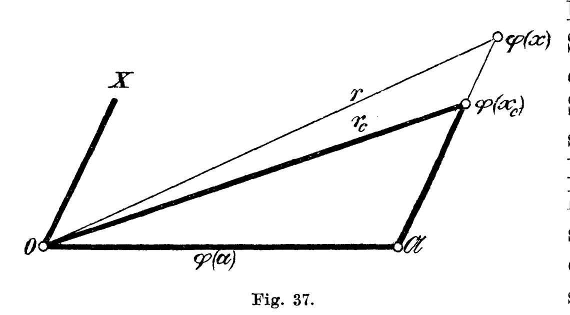


Fig. 37.

Axiom VI. *Wenn von zwei Vektoren der eine seine Größe nur unbedeutend ändert, so darf die Angriffslinie der Resultante nur eine Drehung in engen (endlichen) Grenzen erfahren, die mit dem Schwankungsgebiet des Vektors verschwindet.*

12. Auf Grund dieses Axioms ist nach (27)

$$c\,\varphi(x) = x,$$

und für diese Resultantenbildung gilt daher der folgende Hauptsatz:

Die Resultante zweier Vektoren $\boldsymbol{OA}$ *und* $\boldsymbol{OB}$ *ist der Größe und Richtung nach die durch O gehende Diagonale OR des Parallelogramms $OARB$, von dem OA und OB zwei Seiten sind; liegen* $\boldsymbol{OA}$ *und* $\boldsymbol{OB}$ *auf derselben Angriffslinie, so tritt das Axiom V in Kraft.*

Diese Konstruktion ergibt sich aus der des Art. 6. und 7., indem man statt $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ die Strecken $c\,\varphi(a) = a$ und $c\,\varphi(b) = b$ auf OA und OB abträgt; dann fällt 𝔄 mit A, 𝔅 mit B zusammen, und die Diagonale ist $c\,\varphi(r)$, wo r die absolute Größe der Resultante mißt.

Das Parallelogramm der Resultante $OARB$ wird durch OR in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, die je für sich schon zur Ermittlung von OR ausreichen. Das ist aber die Summationsfigur, die wir in § 1 kennen gelernt haben, und da in dem Falle von Vektoren auf

derselben Angriffslinie das Axiom VI gilt, so stimmt die aus den Axiomen I bis VII abgeleitete Resultantenbildung mit der in § 1 untersuchten geometrischen Summation vollkommen überein.

13. Außer diesen sechs Axiomen sind zum Aufbau der Geometrie linienflüchtiger Vektoren noch die drei Axiome A, B, C des § 3 erforderlich, die sich noch etwas einfacher formulieren ließen.

Damit wollen wir unsere nur zur Einführung bestimmte Darstellung der Vektorgeometrie schließen; eine weitergehende fast elementar zu nennende Darstellung des überreichen Stoffes der Vektorgeometrie bietet der erste Abschnitt der „Geometrie der Dynamen" von E. Study (Leipzig 1903).

Zweiter Abschnitt.

Analytische Statik.

§ 6. Kräfte und Gewichte.[1])

1. Der Begriff der Kraft ist uns anschaulich durch das Gefühl des Druckes, den ein in die Höhe gehobener Körper auf die Hand ausübt. Dieser Druck kann sehr verschieden an Stärke sein je nach Größe und Materie des Körpers. Da er immer nach dem Erdmittelpunkt gerichtet ist, so schreiben wir ihn der Einwirkung der Erde auf die Körper zu und sprechen daher von einer Kraft, die die Erde auf die Körper ausübt. Daher sagen wir: Die Erde übt auf verschiedene Körper verschieden starke Kräfte aus, die wir die Gewichte der Körper nennen. Das Gewicht ist eine durch sinnliche Beobachtung erkannte Eigenschaft eines Körpers und somit das merkbare Anzeichen und zugleich das quantitative Maß für den in die Physik eingeführten, der direkten Beobachtung nicht zugänglichen Begriff der Kraft.

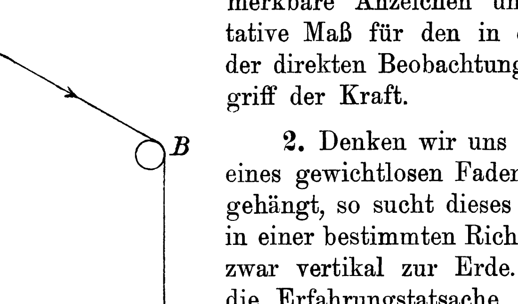


Fig. 38.

2. Denken wir uns an einem Punkte mittels eines gewichtlosen Fadens ein Gewichtstück aufgehängt, so sucht dieses Gewichtstück den Punkt in einer bestimmten Richtung zu verschieben, und zwar vertikal zur Erde. Wir sprechen hiermit die Erfahrungstatsache aus, daß der Punkt in dem Moment, wo er frei beweglich gemacht wird, sich unter dem Einflusse des Gewichtstückes gegen die Erde hin zu bewegen beginnt. Das Gewichtstück übt eine Kraft auf den Punkt aus, der wir eine bestimmte Richtung, nämlich die nach der Erde hin zuschreiben. Wird aber der Faden über eine Rolle B hinweg ge-

---

1) Für den Inhalt der folgenden Paragraphen sind im wesentlichen benutzt: Lagrange, Mechanik, Einleitung. Poinsot, Éléments de Statique.

führt (Fig. 38), so ist die Richtung, in der auf den Punkt A jetzt die Kraft des Gewichtes wirkt, d. h. in der sie den Punkt zu bewegen sucht, eine andere; die Größe der Kraft ist aber die gleiche, solange das Gewichtstück das gleiche ist. Mittels solcher Rollen können wir die Kraft eines Gewichtstückes auf jede beliebige Richtung transformieren.

Wir kennen in der Physik noch andere Kräfte, außer denen der Gewichte, z. B. magnetische und elektrische. Alle aber haben eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Größe. Wir können sie uns daher bezüglich ihrer mechanischen Wirkung immer ersetzt denken durch Gewichte an Fäden, die mittels Rollen in geeigneter Richtung ihre Wirkung ausüben.

Die Kraft auf den Punkt A wird diesen und damit alles, was mit ihm in starrer Verbindung steht, in Bewegung versetzen, wenn sie nicht durch andere Kräfte daran verhindert wird. Wie beschaffen in einzelnen Fällen diese „Gegenkräfte" sein und welche Richtung sie haben müssen, wenn ein Punkt oder ein System, das unter ihrem Einflusse steht, in Ruhe, im „Gleichgewicht" bleibt, das ist die Frage, die die Statik zu beantworten hat.

§ 7. **Hebelgesetze.**

1. Ein gewichtloser Stab AB sei um seinen im Raume befestigten Mittelpunkt D drehbar. Er befinde sich in horizontaler Lage und an seinen Enden mögen Gewichte P_1, P_2 aufgehängt sein. Sind diese beiden Gewichte einander gleich, so bleibt das System in Ruhe; denn es könnte nur eine Drehung um D ausführen; keine der beiden Seiten ist aber vor der anderen bevorzugt, so daß für keine ein Grund zum Sinken vorhanden ist. Hier machen wir also Gebrauch von einem selbstverständlichen Satze, dem Satze vom „zureichenden Grunde":

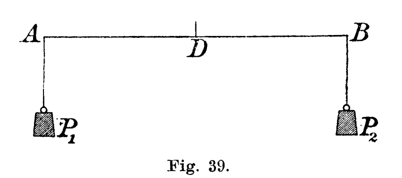


Fig. 39.

Grundsatz I. Wenn von zwei möglichen, sich ausschließenden Veränderungen keine vor der anderen bevorzugt ist, so erfolgt keine von beiden.[1])

1) Von diesem Satze ist mit Vorsicht Gebrauch zu machen. Er enthält eine unumstößliche Wahrheit, nur ist es schwer, zu entscheiden, wann keine von zwei Veränderungen vor der anderen bevorzugt ist. Da unsere ganze Abteilung aber nur eine Abstraktion ist — auch der gewichtlose Stab ist eine

Man nennt ein solches System, das in seinem Mittelpunkt „unterstützt“ ist, und an dessen Enden Gewichte angreifen, einen gleicharmigen Hebel. Durch die Anschauung ergibt sich so das

1[te] Hebelgesetz. Ein gleicharmiger Hebel ist dann im Gleichgewicht, wenn die auf seine Enden wirkenden Gewichte einander gleich sind.

2. Wir können den Satz sofort noch erweitern. Denken wir uns jeden der Arme des Hebels um den Punkt D beliebig gedreht, so daß sie also nicht mehr eine gerade Linie miteinander bilden, und denken wir uns die Kräfte der Gewichte mittels Rollen auf solche Richtungen übertragen, daß sie senkrecht zu jedem Hebelarm in der Ebene der Hebelarme wirken, so muß Gleichgewicht vorhanden sein, wenn die Kräfte einander gleich sind, weil immer noch keine Seite vor der anderen bevorzugt ist. Man nennt den so entstehenden Hebel einen Winkelhebel, speziell einen gleicharmigen Winkelhebel. Es gilt somit das 1[te] Hebelgesetz auch für einen solchen (Fig. 40).

3. Das Gleichgewicht eines geraden Hebels (Fig. 39) muß erhalten bleiben, wenn die Gewichte P_1, P_2 nicht sekrete Stücke sind, sondern

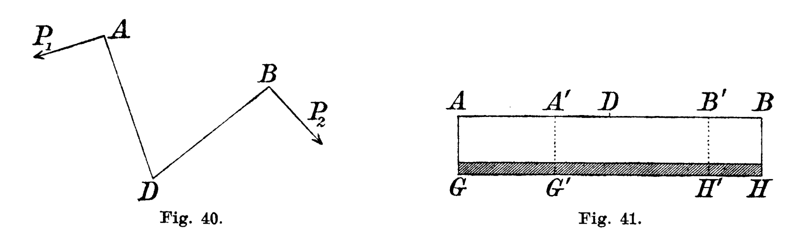


Fig. 40. Fig. 41.

wenn wir sie uns zu einem einzigen Stabe GH von gleichmäßiger Beschaffenheit ausgezogen denken (Fig. 41). Die Aufhängevorrichtungen AG und BH mögen gewichtlos gedacht sein. Dann ist es selbstverständlich, daß wir an beliebiger Stelle eines jeden Schenkels noch andere solche Aufhängevorrichtungen $A'G'$, $B'H'$ anbringen können, ohne am Gleichgewicht etwas zu ändern. Die ursprünglichen Aufhängungen werden dann überflüssig, d. h. wir können die Aufhängungen AG und BH an beliebige Stellen ihrer Schenkel verschieben. Dieses Einfügen neuer Aufhängungen können wir durch einen weiteren selbstverständlichen Satz motivieren, den

---

solche —, so sind wir berechtigt, auch hier zu abstrahieren, und zwei Veränderungen als bewiesen gleichwertig anzusehen. Auf welche mechanischen Vorrichtungen wir die Hebelgesetze anwenden dürfen, das zu untersuchen ist die Aufgabe der Experimentalphysik.

Grundsatz II. Ein bestehendes Gleichgewicht bleibt erhalten, wenn ein Teil des Systems, der vorher beweglich war, starr gemacht wird.

4. Schneiden wir die Stange GH an irgend einer Stelle durch, so wird das Gleichgewicht im allgemeinen gestört. Es ist aber denkbar, daß es bei einer bestimmten Schnittstelle eine ganz bestimmte Lage der Aufhängungen gibt, bei der das Gleichgewicht erhalten bleibt. Wenn die Enden der beiden Teilstangen, die an die Schnittstelle angrenzen, gar keinen Einfluß aufeinander ausüben, also wenn sie auch nach dem Schnitt durch keine Kraft aus ihrer Lage herausgebracht werden, dann ist es offenbar gleichgültig, ob wir an dieser Stelle den Schnitt ausführen oder nicht. Ist S die Stelle, an der wir den Schnitt ausführen wollen, und verschieben wir die Aufhängung $B'H'$ in die Mitte von SH, die Aufhängung $A'G'$ in die Mitte von GS, dann bilden SH und GS jedes für sich einen gleicharmigen im Gleichgewicht befindlichen Hebel. Die Stelle S genügt also der verlangten Bedingung und es ist gleichgültig, ob wir bei S die beiden Stücke verbunden denken oder nicht; die Enden, die an S angrenzen, bleiben in beiden Fällen einander benachbart.

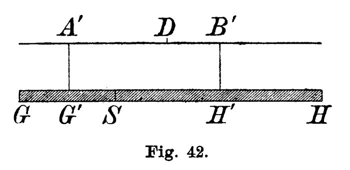


Fig. 42.

Es sei die Länge des ursprünglichen Hebels $2l$; die Schnittstelle liege von G und H um die Längen a und b entfernt. Also ist

$$a + b = 2l.$$

Es bleibt also trotz des Schnittes Gleichgewicht, wenn die Aufhängungen so liegen, daß G' um $a/2$ von G, H' um $b/2$ von H entfernt liegt, also wenn

$$(1) \qquad \begin{aligned} A'D &= l - \frac{a}{2} = \frac{b}{2}, \\ B'D &= l - \frac{b}{2} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

ist. Wir können nun ebenso, wie wir uns früher die einzelnen Gewichte zu einem Stab ausgezogen dachten, jetzt jeden der Stäbe GS und SH sich zusammenziehen denken zu einem einzelnen Gewichtstück, das ebensoviel wiegt, wie der entsprechende Stab.

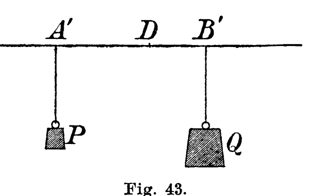


Fig. 43.

Die Gewichte P und Q der Stäbe, und damit die der zusammengezogenen Gewichtstücke sind proportional mit den Längen a und b. Bezeichnet σ das Gewicht der Längeneinheit, so ist

$$P = a\sigma, \quad Q = b\sigma.$$

Die Gleichgewichtsbedingung (1) lautet demnach jetzt:

$$A'D = \frac{Q}{2\sigma}, \quad B'D = \frac{P}{2\sigma},$$

gültig für jedes beliebige σ, denn die Betrachtung gilt für jede beliebige Dicke der Stange GH, wenn diese nur gleichförmig ist, und σ hängt von dieser Dicke ab. Wir können dieses willkürliche σ noch eliminieren, dann folgt:

$$(2) \qquad A'D : B'D = Q : P.$$

$A'D$ und $B'D$ heißen die Hebelarme. In Worten lautet dieses

2te Hebelgesetz[1]): Ein ungleicharmiger Hebel ist dann im Gleichgewicht, wenn sich die an den Enden seiner Hebelarme wirkenden Gewichte umgekehrt verhalten, wie die zugehörenden Hebelarme.

Die außerhalb A' und B' gelegenen Verlängerungen der Hebelarme können als gewichtlos weggelassen werden.

5. Der Beweis, den Archimedes[2]) von diesem zweiten Hebelgesetze gibt, ist dem angegebenen verwandt, nur mit dem Unterschied, daß Archimedes das Gewicht nicht kontinuierlich auf den ganzen Stab verteilt denkt, sondern in sekreten Punkten. Es wird dabei als selbstverständlich der Satz vorausgesetzt:

Wirken an mehreren, gleichweit voneinander entfernten Punkten einer horizontalen Geraden gleiche Gewichte, so lassen sich diese ersetzen durch die Summe der Gewichte, angreifend im Mittelpunkt der wahren Angriffspunkte, und umgekehrt.

Wenn m und n ganze Zahlen sind, und in den Punkten A und B eines Hebels, die so gelegen sind, daß sich $AD : BD$ wie $m : n$ verhält, die Gewichte np und mp wirken, so lassen diese sich nach dem vorigen Satze gleichmäßig auf einen gleicharmigen Hebel verteilen, der dann von selbst im Gleichgewicht ist. In der Figur 44 ist $m = 2$, $n = 3$ angenommen. Diese Verteilung ist zunächst nur möglich, wenn die beiden Gewichte kommensurabel sind. Doch läßt sich nach der Methode der Exhaustion die Verallgemeinerung leicht durchführen.

1) Der Beweis in dieser Form stammt von Simon Stevin, geb. 1548 in Brügge, gest. 1620 im Haag.

2) Archimedes, De planarum aequilibriis. Lib. I.

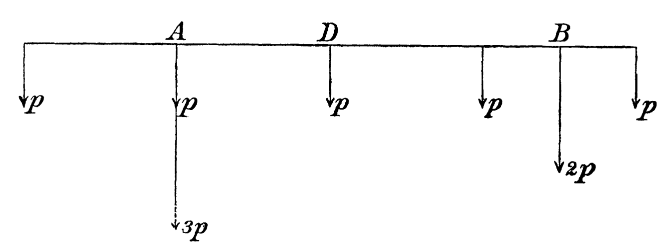


Fig. 44.

6. Huyghens[1]) hat diesen Beweis etwas abgeändert, indem er die beiden Gewichte p_1, p_2 in gleichen Abständen auf zwei zu den Hebelarmen senkrechten Geraden, die sich an deren Enden befinden, verteilt. (Vgl. Figur 45, in der $p_1 : p_2 = 4 : 9$ ist.)

Es läßt sich dann eine Unterstützungsachse (EF) finden, die den Hebelarm im Verhältnis $p_2 : p_1$ teilt, und so gelegen ist, daß sich zu jedem Gewichtspunkte auf der einen Seite dieser Achse ein und nur ein gleichweit von ihr entfernter auf der anderen Seite finden läßt. Bezüglich dieser Achse ist dann das System im Gleichgewicht. Ändern wir den Abstand der Punkte gleichmäßig, so dreht sich die Achse um den Punkt D, und da das ursprüngliche System p_1, p_2 mit jedem solchen System mit verteilten Massen gleichwertig ist, so ist es bezüglich jeder durch D gehenden Unterstützungsachse im Gleichgewicht. Es genügt also auch eine Unterstützung des Punktes D allein.

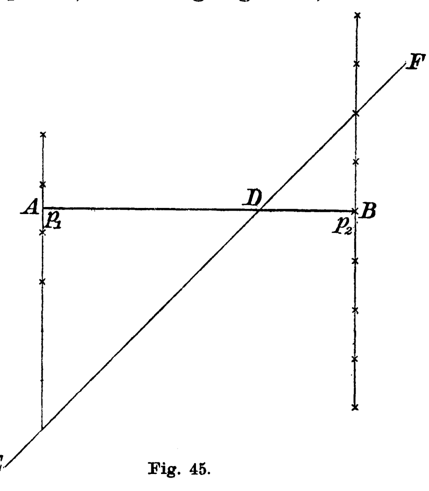


Fig. 45.

7. Dieses Hebelgesetz läßt sich nun ebenfalls leicht für einen Winkelhebel verallgemeinern. Denken wir uns an dem Hebelsystem im Drehpunkte D starr noch einen dritten Hebelarm DB'' von gleicher Länge wie DB' angebracht, unter beliebigem Winkel gegen diesen geneigt, und lassen wir an dessen Endpunkt B'' zwei gleiche Kräfte Q_1 und Q_2 nach entgegengesetzten

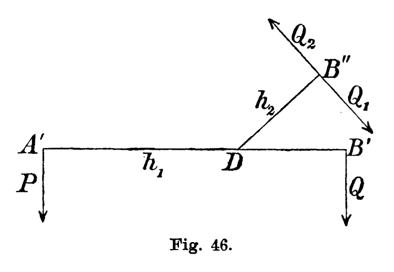


Fig. 46.

1) Huyghens, Demonstratio aequilibrii bilancis (1693).

Seiten senkrecht zum Hebelarm wirken, so heben diese sich gegenseitig auf und ändern somit nichts am Gleichgewicht. Es gilt der

Grundsatz III. Wenn in einem starren System, das im Gleichgewicht steht, ein Teil der Kräfte für sich im Gleichgewicht ist, so können wir diesen nach Belieben weglassen oder hinzufügen.

(Vgl. § 3, 1. Axiom B.)

Wählen wir nun jede der Kräfte Q_1 und Q_2 gleich Q, so können wir Q_2 und Q nach III. weglassen, da sie gleich sind und an einem gleicharmigen Winkelhebel $B''DB'$ wirken. Es bleibt also noch ein ungleicharmiger Winkelhebel $B''DA'$ übrig, der demnach für sich im Gleichgewicht sein muß. Da $Q_1 = Q$ sein muß, wenn wir Q_2 und Q weglassen wollen, so folgt, daß auch für den Winkelhebel das 2[te] Hebelgesetz gilt, nämlich daß:

$$A'D : B''D = Q : P$$

sein muß.

Setzen wir $A'D = h_1$, $B'D = B''D = h_2$, so können wir das 2[te] Hebelgesetz auch in die Form kleiden

$$Ph_1 = Qh_2. \tag{3}$$

8. Wir können jetzt noch von einem weiteren Grundsatz Anwendung machen, nämlich von dem

Grundsatz IV. Statt eine Kraft in einem Punkte (A') eines starren Systems angreifen zu lassen, können wir sie in einem beliebigen anderen Punkte (A) ihrer Richtung, der mit dem System starr verbunden ist, angreifen lassen.

(Vgl. § 3 des ersten Abschnittes: „Linienflüchtige Vektoren“.)

Wir können demgemäß die Angriffspunkte der Kräfte beim Winkelhebel auf die Punkte A und B eines geradlinigen Hebels ADB (Fig. 47) verlegen, vorausgesetzt, daß wir diesen so wählen, daß seine Endpunkte A und B auf den Richtungen der Kräfte P und Q (auf den Fäden, die von A', B'' aus über die gedachten Rollen führen) liegen. Die gewichtlos gedachten Arme $A'D$, $B''D$ können wegbleiben. Das führt uns zu der Gleichgewichtsbedingung des geradlinigen Hebels mit schräg zu seinen Armen wirkenden Kräften. Die Längen h_1 und h_2 gewinnen jetzt die Bedeutung der Lote vom Drehpunkt auf die Kraftrichtungen.

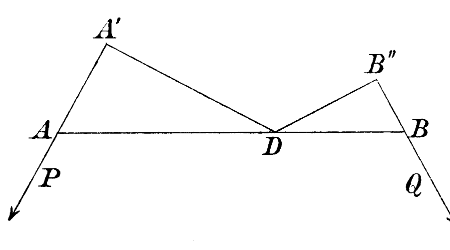


Fig. 47.

9. Wenn statt des geradlinigen Hebels ADB ein beliebig bei D geknickter Hebel angenommen wird, dessen Endpunkte ebenfalls auf den Kraftrichtungen liegen (Fig. 48), so führt uns das zu einem allgemeineren Problem: dem Winkelhebel mit schräg gegen seine Arme gerichteten Kräften. Schließlich können wir noch überhaupt von jeglichem Hebelarm absehen, und uns eine gewichtlose um einen Punkt D drehbare Ebene vorstellen, in der längs zweier vorgeschriebenen Geraden zwei Kräfte P, Q wirken (Fig. 49). Für alle diese Fälle gilt als Gleichgewichtsbedingung die Gleichung (3), die wir in Worten aussprechen können in einem

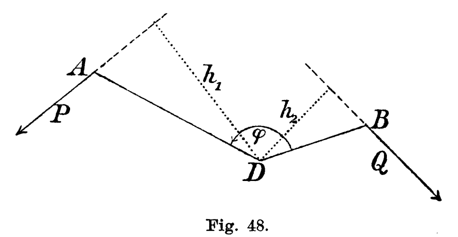


Fig. 48.

> 3ten Hebelgesetz. Eine um einen Punkt in sich selbst drehbare Ebene, in der zwei in der Ebene liegende Kräfte in beliebiger Richtung angreifen, ist dann im Gleichgewicht, wenn sich die Kräfte umgekehrt verhalten, wie die Lote, die man vom Drehpunkt auf ihre Richtungen fällen kann.

Es ist dies das allgemeinste Gesetz für den Fall zweier Kräfte. Alle früheren Fälle und noch andere Spezialfälle sind darin enthalten.

10. Wenn wir z. B. den Winkel φ eines Winkelhebels (Fig. 48) immer kleiner werden lassen, bis er schließlich gleich 0 geworden

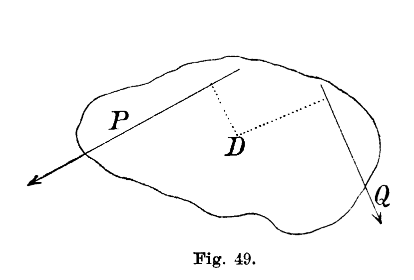


Fig. 49.

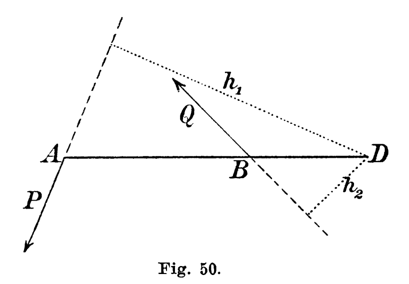


Fig. 50.

ist, während wir dabei die relativen Richtungen der Kräfte gegen die Hebelarme konstant lassen, so gelangen wir zu dem Problem des „einarmigen Hebels“, d. h. eines gewichtlosen Stabes, bei dem die Kräfte auf der gleichen Seite des Drehpunktes angreifen und nach verschiedenen Seiten, vom Hebelarm aus gerechnet, gerichtet sind (Fig. 50).

Ein anderer Spezialfall, der sich aus dem 3ten Hebelgesetz ableitet, ist der des geraden zweiarmigen Hebels mit parallelen aber zum Hebel geneigt gerichteten Kräften (Fig. 51). Es ist hier Gleich-

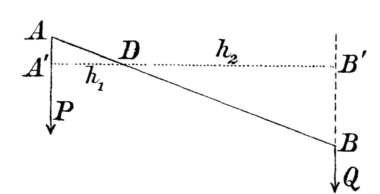


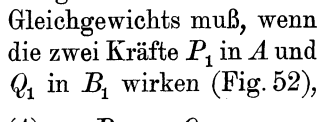
Fig. 51.

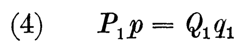
gewicht vorhanden, zunächst, wenn $h_1 : h_2 = Q : P$. Da aber hier $AD : BD = h_1 : h_2$ ist, so gilt auch als Gleichgewichtsbedingung:

$$AD : BD = Q : P.$$

Es ist dies dieselbe Form, die das zweite Hebelgesetz hat. Dieses gilt also auch, wenn die Kräfte nicht senkrecht auf den Hebelarmen stehen, also wenn der Hebel nicht horizontal gerichtet ist. Dieser Satz hätte auch direkt gewonnen werden können, wie das zweite Hebelgesetz selber.

11. Von dem 3ten Hebelgesetz, das für zwei Kräfte gilt, die entgegengesetzte Drehungen hervorzurufen suchen, können wir zu einem Gesetz für drei und mehr Kräfte übergehen. Im Falle des Gleichgewichts muß, wenn die zwei Kräfte P_1 in A und Q_1 in B_1 wirken (Fig. 52),





(4) $$P_1 p = Q_1 q_1$$

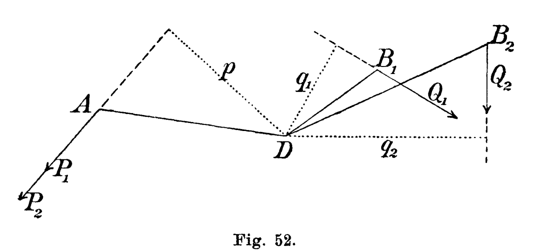


Fig. 52.

sein. Bringen wir nun im Punkte D noch einen Hebelarm DB_2 an und lassen an ihm eine Kraft Q_2 wirken, so können wir wieder Gleichgewicht erhalten, wenn wir außer P_1 in A eine gleichgerichtete Kraft P_2 anbringen, die so groß ist, daß sie ihrerseits der Kraft Q_2 das Gleichgewicht hält, daß also:

(5) $$P_2 p = Q_2 q_2$$

ist. Sind also die Gleichungen (4) und (5) für einen dreiarmigen Hebel erfüllt, so befindet er sich im Gleichgewicht. Es folgt aber aus (4) und (5), wenn wir $P_1 + P_2$ mit P bezeichnen:

(6) $$Pp = Q_1 q_1 + Q_2 q_2 ,$$

und diese Gleichung genügt als Gleichgewichtsbedingung; denn wenn sie erfüllt ist, läßt sich immer P in zwei Summanden zerlegen, so beschaffen, daß jeder von ihnen einer der Gleichungen (4), (5) genügt. Wir brauchen nur den einen Summanden gleich $Q_1 q_1 / p$ zu wählen, so daß der andere $P - Q_1 q_1 / p = Q_2 q_2 / p$ wird.

12. Die Produkte Pp, $Q_1 q_1$, $Q_2 q_2$ heißen die „Drehmomente" oder die „statischen Momente" der Kräfte P, Q_1, Q_2 in bezug auf den Punkt D. Die Verallgemeinerung für einen vier- und mehrarmigen Hebel ist leicht. Es steht auf der einen Seite der Gleichgewichtsgleichung die Summe aller der Drehmomente, die in einer

Richtung zu drehen suchen, auf der anderen Seite die der entgegengesetzt drehenden. Der Ausdruck des Gesetzes wird noch einfacher, wenn wir einen bestimmten Drehungssinn — gleichgültig welchen — als positiv ansehen (vgl. § 2, 5.). Dann können wir die Drehmomente von Kräften, die eine entgegengesetzte Drehung hervorzurufen suchen, als negativ ansehen, also

$$Q_1 q_1 = - P_2 q_1 ,$$
$$Q_2 q_2 = - P_3 q_2$$

setzen. Dann wird aus Gleichung (6)

$$Pp + P_2 q_1 + P_3 q_2 = 0 ,$$

oder, wenn wir der übersichtlichen Form wegen P, p, q_1, q_2 durch die Zeichen P_1, p_1, p_2, p_3 ersetzen:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 = 0;$$

und daraus ergibt sich leicht die Verallgemeinerung für beliebig viele Kräfte:

$$\sum_n P_n p_n = 0 .$$

In Worten gibt dies das

4te Hebelgesetz. Ein vielarmiger Hebel ist dann im Gleichgewicht, wenn — unter Zugrundelegung eines bestimmten Drehungssinnes als positiv — die Summe aller auf ihn wirkenden Drehmomente verschwindet.

In dieser Form gilt das Hebelgesetz auch, wenn die Kräfte P_n nicht in einer Ebene liegen, sondern nur auf einer „Achse" senkrecht stehen. Unter p_n sind dann die Abstände von dieser Achse zu verstehen.

§ 8. Gleichgewicht nicht unterstützter Systeme bei parallelen Kräften. Der Kräftemittelpunkt.

1. Der ungleicharmige Hebel AB (Fig. 51), auf den die Gewichte P und Q parallel zueinander wirken mögen, ist im Gleichgewicht, wenn der Unterstützungspunkt D so gelegen ist, daß

$$AD : BD = Q : P$$

ist (vgl. 3tes Hebelgesetz, Schluß). Die Kräfte P und Q bewirken also keine Bewegung; sie üben aber einen Druck auf D aus nach unten, also in der Richtung der wirkenden Kräfte.

Wir stellen uns jetzt die Frage: Können wir die Unterstützung in D durch eine Kraft ersetzen und wie beschaffen muß diese sein,

damit das System ADB mit den Kräften P, Q und der gesuchten in D angreifenden Kraft im Gleichgewicht ist?

Jedenfalls muß die gesuchte Kraft aufwärts gerichtet sein. Haben wir sie gleich R gefunden, so muß dieser Kraft R eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Kraft, die ebenfalls in D angreift, das Gleichgewicht halten, wenn wir die Gewichte P und Q weglassen. Es sagt das aus: die Gewichte P und Q sind gleichwertig oder ersetzbar durch eine ihnen parallel gerichtete Kraft R, die im Drehpunkt D angreift.

Wir denken uns durch die Punkte A', B' (Fig. 51) die Fußpunkte der Lote h_1, h_2 und senkrecht zu den Kraftrichtungen P und Q eine starre gewichtslose Ebene gelegt, und wählen in dieser Ebene einen beliebigen Punkt C, so daß A', B', C (Fig. 53) die Eckpunkte eines Dreiecks sind. Unterstützen wir den Mittelpunkt von $A'C$, so ist der Hebel $A'C$ im Gleichgewicht, wenn wir in C ein Gewicht P parallel zu dem in A' anbringen. Ebenso ist der Hebel $B'C$ im Gleichgewicht bezüglich seines Mittelpunktes, wenn wir in C ein Gewicht Q anbringen. Wir können daher das ganze Dreieck $A'B'C$ im Gleichgewicht halten, wenn wir die Verbindungslinie EF der beiden Mittelpunkte unterstützen und in C das Gewicht $P+Q$ anbringen. Die Verbindungslinie CD bildet ebenfalls einen gleicharmigen Hebel, da sie von EF halbiert wird, und dieser Hebel ist somit mit dem ganzen Dreieck auch im Gleichgewicht. Das ganze System ist im Gleichgewicht unter dem Einfluß der Kräfte:

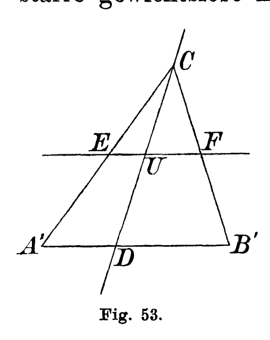


Fig. 53.

$$P \text{ in } A', \quad Q \text{ in } B', \quad P+Q \text{ in } C.$$

Wir fügen $\pm R$ in D hinzu, wenn R die Kraft ist, durch die P und Q ersetzbar sind. Dann nehmen wir (nach III) $-R$ und P und Q weg. Es bleibt $P+Q$ in C und $+R$ in D, so daß folgt

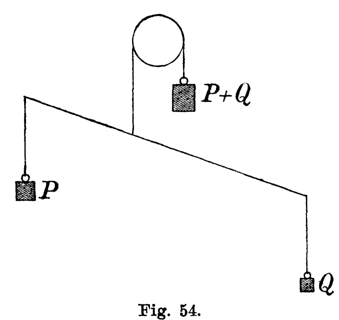


Fig. 54.

$$R = P + Q,$$

und es folgt weiter, daß wir die Unterstützung in D ersetzen können durch eine den in A und B angreifenden Kräften parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft, die gleich der Summe der beiden Kräfte ist (Fig. 54).

2. Wir können uns eine der Kräfte P und Q, z. B. Q dadurch zustande gekommen denken, daß sie zwei weitere Kräfte Q_1, Q_2, die

ihrerseits an einem um B drehbaren Hebel im Gleichgewicht stehen, ersetzt. Dann ist $Q = Q_1 + Q_2$ und es sind die drei Kräfte P, Q_1, Q_2 ersetzbar durch eine einzige Kraft

$$R = P + Q_1 + Q_2,$$

die in D angreift. Den Kräften P, Q_1, Q_2 wird durch eine in D angreifende gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kraft, die wir, um die Richtung anzuzeigen, mit $-R$ bezeichnen wollen, das Gleichgewicht gehalten. Diese Beziehung können wir auf beliebig viele Kräfte erweitern. Es ist allgemein

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots.$$

3. Die beiden starr miteinander verbundenen Punkte A und B (Fig. 55), auf die die parallelen Kräfte P und Q wirken, sind dann im Gleichgewicht, wenn wir im Punkte D, der die Verbindungslinie AB innerlich im Verhältnis $Q : P$ teilt, die Kraft $-R = -(P + Q)$ wirken lassen. Denken wir uns umgekehrt die in A und D nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte P und $-R$ gegeben, so werden A und D dann im Gleichgewicht sein, wenn wir eine Kraft

$$Q = R - P$$

in einem Punkte B anbringen, der so gelegen ist, daß

$$AD : DB = Q : P$$

oder

$$AB : DB = R : P$$

ist. Der Punkt B, in dem wir die Kraft Q anbringen müssen, teilt also die Strecke AB äußerlich im Verhältnis der beiden Kräfte R und P.

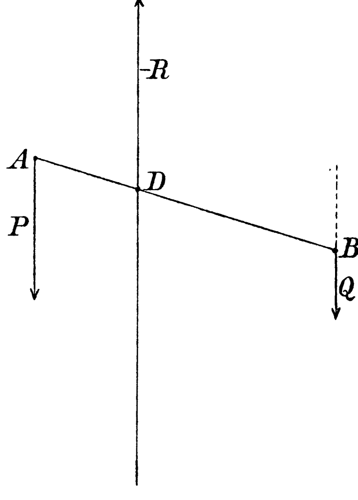


Fig. 55.

Da wir die Richtung von P als positiv angenommen haben, so folgt, daß die Kraft Q mit P gleich gerichtet ist, wenn $R > P$. Ist dagegen $P > R$, so ist Q negativ, also mit R gleich gerichtet. Es folgt dann

$$\frac{AB}{BD} < 1; \quad AB < BD,$$

und das ist nur dann möglich, wenn B auf der Seite von A außerhalb AD liegt, also wenn AD nach der entgegengesetzten Seite hin im Verhältnis der Kräfte geteilt wird. Als Regel folgt daraus: Wenn

wir die drei Punkte A, D, B in ihrer geometrischen Reihenfolge durchlaufen, so müssen wir abwechselnd auf eine positive und eine negative Kraft treffen.

4. Den Punkt, in dem wir die das Gleichgewicht haltende Kraft anzubringen haben, wollen wir den „Kräftemittelpunkt“ nennen. Wir können das Gleichgewichtsgesetz dann folgendermaßen allgemein aussprechen:

> Wirken auf zwei Punkte zwei parallele Kräfte, so kann diesen durch eine dritte im Kräftemittelpunkt angreifende parallele Kraft das Gleichgewicht gehalten werden.

Sind die Kräfte gleichgerichtet, so ist die anzubringende Kraft gleich der Summe der Einzelkräfte und diesen entgegengesetzt gerichtet. Der Kräftemittelpunkt teilt die Verbindungslinie innerlich im umgekehrten Verhältnis der Kräfte. Sind die Kräfte entgegengesetzt gerichtet, so ist die anzubringende Kraft gleich der Differenz der Einzelkräfte und hat die Richtung der kleineren. Der Kräftemittelpunkt teilt die Verbindungslinie äußerlich im umgekehrten Verhältnis und zwar so, daß er auf der Seite der größeren Kraft liegt.

5. Der zweite dieser Fälle erleidet eine Ausnahme dann, wenn die beiden entgegengesetzten Kräfte einander gleich sind, da dann die Verbindungslinie nicht mehr durch einen im Endlichen gelegenen Punkt äußerlich teilbar ist. Das System heißt in diesem Falle ein „Kräftepaar“ oder ein „Koppel“.

§ 9. Der Schwerpunkt.

1. Statt im Punkte D können wir die Kraft $-R$, die ihrem absoluten Werte nach gleich der Summe aller im Hebelsystem wirkenden Kräfte ist, in einem beliebigen Punkte der durch D gehenden zu R parallelen Geraden angreifen lassen. Wir wollen diese Gerade die „Mittellinie der Kräfte“ nennen.

Wie man bei beliebig vielen Angriffspunkten paralleler Kräfte diese Mittellinie konstruiert, ergibt sich leicht aus der im vorigen Paragraphen ausgeführten Zerlegung zweier Kräfte in mehrere. Man sucht zunächst die Mittellinie zweier von ihnen, z. B. der Punkte M, N, in denen die Kräfte P_m, P_n angreifen. Diese Kräfte sind dann ersetzbar durch die in einem beliebigen Punkte D_1 der Mittellinie wirkenden Kraft $P_m + P_n$. Wir haben das System ersetzt durch ein neues, dessen Kräftezahl um eins kleiner ist. Mit diesem verfahren wir ebenso, und so fort, bis wir nur noch eine Kraft und eine Linie, in der diese wirkt, haben.

Die Reihenfolge, in der wir vorgehen, ist für das Endergebnis gleichgültig. Für die Größe der endlich resultierenden Kraft

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$$

folgt das aus dem kommutativen Gesetz der Addition, für die Lage aber daraus, daß, wenn wir auf zwei verschiedenen Wegen zu zwei verschiedenen Mittellinien g_1, g_2 kämen, wir der in g_1 wirkenden Kraft R durch eine in g_2 entgegengesetzt wirkende $(-R)$ das Gleichgewicht halten könnten, was unmöglich ist.

2. Für die Mittellinie g eines Systems paralleler Kräfte gilt der Satz:

> Wenn wir die Kräfte gedreht denken, so daß sie parallel bleiben und ohne daß sich ihre Angriffspunkte und ihre Größen ändern, so dreht sich die Mittellinie um einen Punkt, den wir den Schwerpunkt, oder Massenmittelpunkt des Systems nennen.

Für zwei Kräfte ist dieser Satz evident. Denn sind A und B der Figur 51 die Angriffspunkte, so folgt aus vorigem Paragraphen, daß die Mittellinie durch den Punkt D gehen muß, der die Verbindungslinie AB im Verhältnis $Q : P$ teilt. Und dies Gesetz muß gelten für jede beliebige Richtung der beiden parallelen Kräfte. Es ist also D der Schwerpunkt des aus den zwei Angriffspunkten A und B und den Kräften P und Q gebildeten Systems.

> Der Schwerpunkt zweier Punkte, auf die zwei parallel gerichtete Kräfte P und Q wirken, liegt auf der Verbindungslinie der beiden Punkte und teilt diese im umgekehrten Verhältnis der beiden Kräfte.

Für eine beliebige Zahl beliebig im Raume liegender Punkte läßt sich der Satz durch vollständige Induktion beweisen. Wir nehmen an, daß er für n beliebige Punkte gilt, und beweisen, daß er dann auch für $n+1$ beliebige Punkte gilt. Denken wir uns $n+1$ Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ beliebig im Raume verteilt und unter der Wirkung der parallelen Kräfte P_1, P_2, $\ldots$, P_{n+1}. Wir greifen n Punkte von diesen heraus, für die nach Voraussetzung der Satz 2 gilt. D_n sei der Schwerpunkt dieser Kräfte. Es ist dann das System dieser Punkte im Gleichgewicht, wenn wir in D_n die Kraft

$$-R = -(P_1 + P_2 + \cdots + P_n)$$

also in entgegengesetzter Richtung zu den einzelnen Kräften P_1, P_2, $\ldots$, P_n wirken lassen, und zwar unabhängig von der Richtung dieser Kräfte. Die Kraftrichtung von $-R$ dreht sich mit der der Einzelkräfte. Durch D_n und die darin angreifende Kraft $+R$ ist

das System der n ersten Punkte und ihrer Kräfte ersetzt bei beliebiger Richtung derselben. Wir haben somit das System von $n + 1$ Punkten ersetzt durch ein solches von zwei Punkten, für das unser Satz bereits bewiesen ist. Damit haben wir aber die Grundlagen zur Anwendung der vollständigen Induktion gewonnen.

Sind die Kräfte die Schwere, die auf ein System starr miteinander verbundener Punkte, auf einen starren Körper, wirken, so sind sie ihrer Richtung nach unveränderlich. Statt aber die Kräfte zu drehen, kann man den Körper gegen die Kräfte drehen. Es folgt daraus, daß ein schwererer Körper in jeder Lage im Gleichgewicht ist, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, oder wenn im Schwerpunkt eine dem „Gesamtgewicht“ gleiche Kraft in entgegengesetzter Richtung wirkt. Das erklärt den Namen Schwerpunkt. Ersetzt man die Gewichte durch die ihnen proportionalen Massen, so erklärt sich der Name „Massenmittelpunkt“.

3. Den Schwerpunkt eines Systems von n Punkten findet man ähnlich wie die Mittellinie, indem man ihn nacheinander immer von zwei Punkten bestimmt und so die Zahl der Angriffspunkte immer

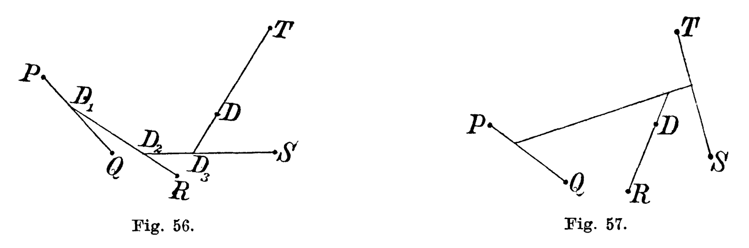


Fig. 56. Fig. 57.

um die Einheit vermindert. Der Schwerpunkt ist eindeutig, d. h. von der Reihenfolge des Vorgehens unabhängig, was daraus folgt, daß er der Schnittpunkt aller Mittellinien ist, die sich beim Drehen der Kraftrichtungen ergeben, und die, wie bereits erwiesen, eindeutig sind (Fig. 56, 57). Daraus folgt dann auch, daß man ein System von Punkten in Gruppen zerlegen, die Schwerpunkte der Gruppen und dann den Schwerpunkt dieser Schwerpunkte ermitteln kann und so den Schwerpunkt des ganzen Systems findet.

4. Der Schwerpunkt eines Systems, dessen Angriffspunkte alle in einer Ebene liegen, liegt in derselben Ebene.

Dies erkennt man, wenn man die Kräfte solange dreht, bis sie alle in die Ebene hineinfallen. Dann muß auch die Mittellinie in diese Ebene fallen, und der Schwerpunkt ebenfalls, da er ein Punkt aller Mittellinien ist.

Beispiel. Die drei Ecken eines beliebigen Dreiecks $\triangle$ seien mit gleichen Gewichten belastet. Welches ist sein Schwerpunkt? Der Schwerpunkt von A und C (Fig. 58) ist der Mittelpunkt b der Dreiecksseite AC. Somit liegt der Schwerpunkt D des Dreiecks $\triangle$ auf der Mitteltransversalen Bb. In gleicher Weise folgt aber auch, daß er auf den zwei anderen Mitteltransversalen liegen muß, und somit liegt er im Schnittpunkte dieser. Die Mitteltransversalen schneiden sich im Verhältnis $1:2$, was auch mit den statischen Gesetzen im Einklang steht, da die in A und C angreifenden Kräfte P, P durch eine in b angreifende $2P$ zu ersetzen sind und somit die Linie bB durch D im Verhältnis $P:2P$ geteilt wird.

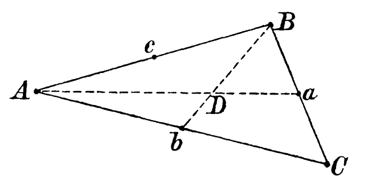


Fig. 58.

Denken wir uns im Raume oberhalb des Dreiecks einen vierten Punkt E starr mit dem System verbunden, und belasten wir E ebenfalls mit dem Gewichte P, so folgt: der Schwerpunkt dieses neuen Systems muß auf der Linie ED liegen. Nennen wir ED eine Mitteltransversale des Tetraeders $ABCE$, so folgt: der Schwerpunkt eines Tetraeders, dessen Ecken gleich belastet sind, liegt im Schnittpunkte der vier Mitteltransversalen.

5. Um die Lage des Schwerpunktes im allgemeinen näher zu bestimmen, lege man eine beliebige Ebene α und fälle von den Angriffspunkten der Kräfte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und von dem Schwerpunkte D die Perpendikel $p_1, p_2, \ldots, p_n$, und d auf diese Ebene. Denkt man sich nun die Kräfte $P_1, P_2, \ldots, P_n, \Sigma P_\nu$ alle um ihre Angriffspunkte, die letzte um D gedreht, bis sie eine zu α parallele Richtung haben, und dann in ihren Richtungen so verschoben, daß ihre Angriffspunkte alle in eine zu α und den neuen Kraftrichtungen senkrechte Ebene β fallen, so folgt aus dem 4ten Hebelgesetz § 7, 12., angewandt auf die Schnittlinie von α und β als Achse,

$$d \sum P_\nu = \sum p_\nu P_\nu.$$

Diese Formel gilt auch, wenn die Kräfte P_ν zum Teil entgegengesetzte Richtung haben und dann negativ genommen werden, und gibt einen Wert von d, außer wenn $\Sigma P_\nu = 0$ ist. Nimmt man drei verschiedene Ebenen α, so ist dadurch d bestimmt.

6. Wenn wir die Angriffspunkte in zwei Gruppen zerlegen, die wir durch die Indizes μ, ν unterscheiden wollen, während n die Gesamtheit der Indizes durchläuft, so wird

$$d \sum P_n = \sum p_\mu P_\mu + \sum p_\nu P_\nu.$$

Verschieben wir jetzt die eine Gruppe ν um das Stück h von der Ebene α, so wird sich der Schwerpunkt des ganzen Systems auch verschieben um eine Strecke h_1, die sich aus

$$(d + h_1)\sum P_n = \sum p_\mu P_\mu + \sum (p_\nu + h) P_\nu$$

berechnen läßt. Da h in der ganzen Gruppe ν konstant ist, wird

$$\sum (p_\nu + h) P_\nu = \sum p_\nu P_\nu + h \sum P_\nu ,$$

und aus den drei Gleichungen folgt

$$h_1 \sum P_n = h \sum P_\nu .$$

Es seien z. B. P die Kräfte der Erdanziehung auf ein System von Punkten und α eine Horizontalebene, so daß die p die Abstände der Punkte von der Horizontalebene bedeuten. Dann sagt die letzte Gleichung:

> Heben wir einen Teil eines unter dem Einfluß der Erdschwere stehenden Punktsystems um die Strecke h, so hebt sich der Schwerpunkt um die Strecke
>
> $$h_1 = h \frac{\Sigma P_\nu}{\Sigma P_n},$$

worin P_ν die auf die Punkte des gehobenen Teiles, P_n die auf alle Punkte wirkenden Kräfte bedeutet.

§ 10. Das Parallelogramm der Kräfte.

1. Wenn auf einen Punkt eine Kraft R wirkt, so kann man dieser das Gleichgewicht halten, indem man eine entgegengesetzt gerichtete Kraft, also $-R$, in dem Punkte angreifen läßt. Das ist ein Gesetz, das keines Beweises bedarf. Wirken auf einen Punkt zwei verschieden gerichtete Kräfte, P und Q, so kann zunächst Gleichgewicht dadurch hergestellt werden, daß man zu jeder die entgegengesetzte Kraft, $-P$ und $-Q$, anbringt. Es ist aber denkbar, daß schon eine einzige Kraft, wenn sie nach Richtung und Größe richtig gewählt wird, ausreicht das Gleichgewicht zu erhalten. Sicherlich ist das richtig für einen speziellen Fall. Denn denken wir uns an einem Punkte drei gleichgroße Kräfte symmetrisch in einer Ebene angreifen, also jede in ihrer Richtung um 120^0 gegen die zwei anderen geneigt, so muß notwendig der Punkt im Gleichgewicht sein. Verkleinern wir aber den Winkel zwischen zweien der Kräfte, so wird das Gleichgewicht gestört; möglicherweise kann es aber dadurch

wieder hergestellt werden, daß wir die Größe und Richtung der dritten Kraft ändern. Die Möglichkeit des Gleichgewichts dreier verschieden gerichteter und verschieden starker Kräfte ist also denkbar, aber nicht bewiesen.

2. Wir wollen nun unter Voraussetzung der Möglichkeit untersuchen, ob wir die Größe und Richtung der dritten Kraft bei gegebener Größe und Richtung der beiden anderen aus den bis jetzt gewonnenen Gesetzen bestimmen können. Die beiden gegebenen Kräfte seien P und Q, die gesuchte dritte wollen wir mit $-R$ bezeichnen. Dieser Kraft $-R$ kann durch eine Kraft $+R$ das Gleichgewicht gehalten werden. Die beiden Kräfte P und Q sind demnach in ihrer Wirkung zu ersetzen durch die Kraft $+R$.

3. Da die Kräfte P und Q in einem Punkte angreifen, kann man durch ihre Richtungen eine Ebene E legen (Fig. 59). Es herrscht dann Gleichgewicht zwischen den drei Kräften $P, Q, -R$, wenn der Punkt A in Ruhe bleibt, gleichgültig, in welcher Weise er beweglich gedacht wird. Nehmen wir z. B. an, er sei mitsamt der starr gedachten Ebene drehbar um einen Punkt π dieser Ebene, der zwischen den Kraftrichtungen von P und Q so gelegen ist, daß die Lote auf diese Richtungen, p und q, in dem Verhältnis stehen

$$p : q = Q : P,$$

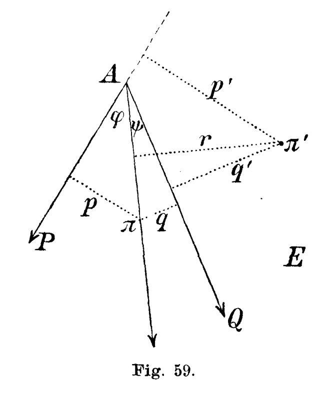


Fig. 59.

dann haben wir in $A\pi$ einen einarmigen Hebel, der nach dem 3ten Hebelgesetz allein durch die Kräfte P und Q im Gleichgewicht ist. Die Kraft $-R$ muß demnach so gerichtet sein, daß sie, für sich allein gedacht, ebenfalls den Hebel $A\pi$ nicht drehen kann. Das ist nur möglich, wenn sie in ihrer Richtung mit der Richtung $A\pi$ zusammenfällt; denn dann wird das Lot von π auf ihre Richtung, und damit ihr statisches Moment gleich 0. Insbesondere fällt also die Kraftrichtung von $-R$, und damit von R in die Ebene E hinein und wir brauchen uns in Zukunft nur mit Bewegungen innerhalb dieser Ebene zu befassen.

Die Lote p und q sind proportional mit $\sin\varphi$ und $\sin\psi$ (Fig. 59). Demnach teilt die Kraftrichtung von $-R$ den Winkel zwischen P und Q so, daß

$$\sin\varphi : \sin\psi = Q : P \tag{1}$$

ist.

4. Denken wir uns jetzt als Drehpunkt einen beliebigen anderen Punkt π', so ist dann Gleichgewicht zwischen den Kräften P, Q, $-R$ vorhanden, wenn die Summe der statischen Momente bezüglich dieses Punktes verschwindet (4[tes] Hebelgesetz), also wenn

$$Pp' + Qq' + (-R)r' = 0,$$

oder wenn

(2) $$Pp' + Qq' = Rr'$$

ist. Es gibt uns diese Gleichung also gleich das statische Moment der Kraft $+R$, d. h. der Kraft, durch die P und Q ersetzbar sind und die wir die „resultierende Kraft" oder kurz die „Resultierende" nennen.

Die Gleichung (2) muß erfüllt sein für jede beliebige Lage des Punktes π' in der Ebene. Eine solche Relation besteht aber für

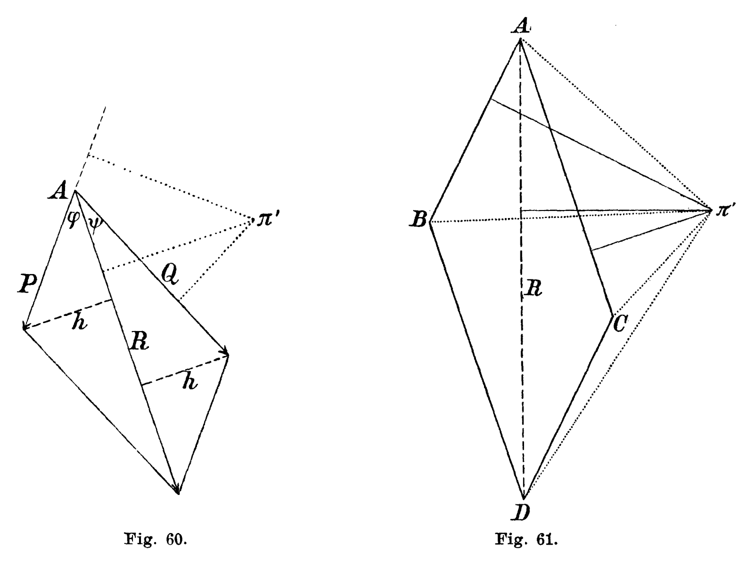


Fig. 60. Fig. 61.

zwei benachbarte Seiten und die ihren Winkel teilende Diagonale eines Parallelogramms (Fig. 60).

Die Richtigkeit dieses geometrischen Satzes ersieht man aus Figur 61. Die Gleichung (2) sagt nichts anderes aus, als daß die Summe der doppelten Dreiecksinhalte von $\triangle A\pi'B$ und $\triangle A\pi'C$ gleich ist dem doppelten Inhalt $\triangle A\pi'D$. Also auch:

$$\triangle A\pi'B + \triangle A\pi'C = \triangle A\pi'D,$$

und daß dies richtig ist, erkennt man, wenn man von B, C, D die Höhen auf $A\pi'$ fällt. Die drei Dreiecke haben dann alle die gleiche

Grundlinie $A\pi'$, und die von D gefällte Höhe ist gleich der Summe der von C und der von B gefällten.

Denken wir uns die Kräfte P, Q vom Punkte A aus in den Richtungen, die sie in Wirklichkeit besitzen, als Längen aufgetragen, indem wir etwa die Gewichtseinheit durch die Längeneinheit darstellen, und vervollständigen wir die Figur zum Parallelogramm, so gibt uns die Länge der Diagonalen die Größe und ihre Richtung die Richtung einer Kraft, die der Bedingung (2) genügt, die also die Kräfte P und Q ersetzt. Die entgegengesetzte Kraft hält den Kräften P und Q das Gleichgewicht.

Es folgt für die Richtung dieser Kraft:

$$\sin\varphi = \frac{h}{P}; \quad \sin\psi = \frac{h}{Q},$$

$$\sin\varphi : \sin\psi = Q : P,$$

was wir schon in Gleichung (1) erkannt hatten.

Wir können das Resultat dieser Betrachtung in Worten zusammenfassen in dem „Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte“:

> Wirken auf einen Punkt zwei beliebig gerichtete Kräfte, so sind diese äquivalent mit einer einzigen Kraft, die nach Richtung und Größe mit der Diagonalen des Parallelogramms übereinstimmt, das man aus den in ihren Richtungen als Längen aufgetragenen Kräften konstruieren kann.

5. Umgekehrt läßt sich sofort erkennen, daß man eine Kraft ersetzen kann durch zwei andere, die man dadurch erhält, daß man ein Parallelogramm konstruiert, in dem die gegebene Kraft Diagonale ist. Dies kann auf unendlich vielfache Weise geschehen. Es ergeben sich vier Größen, die beiden Kräfte und ihre Richtungen. Zwei davon können wir noch willkürlich vorschreiben, die beiden andern ergeben sich dann eindeutig. Man nennt diese beiden Kräfte, die die vorgelegte Kraft ersetzen, ihre „Komponenten“.

Eine der Komponenten oder beide können wir wieder in Komponenten zerlegen, und wir können damit fortfahren und so eine vorgelegte Kraft durch beliebig viele andere Kräfte, Komponenten, ersetzen.

6. Umgekehrt können wir beliebig viele, n, Kräfte, die an einem Punkte angreifen, durch eine einzige ersetzen, indem wir erst zwei nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte zu einer zusammensetzen. Es bleiben dann noch $n-1$ Kräfte übrig. Von diesen setzen wir wieder zwei zusammen, und fahren so fort, bis eine einzige übrig bleibt, die „Resultierende“ der ursprünglichen

Kräfte. Diese Zusammensetzung ist, im Gegensatz zu der Zerlegung, eindeutig. Sie ist vor allem auch von der Reihenfolge des Vorgehens unabhängig; denn käme man bei verschiedenen Reihenfolgen auf verschiedene Resultierende R_1 und R_2, so müßte eine Kraft $-R_2$ der Kraft R_1 das Gleichgewicht halten können, und das ist nur möglich, wenn R_1 nach Größe und Richtung gleich R_2 ist.

7. Die geometrische Konstruktion der Resultierenden läßt sich durch Weglassen aller überflüssigen Zeichnungen sehr vereinfachen. Die auf den Punkt A wirkenden Kräfte P_1, P_2, ... seien durch die mit gleichen Buchstaben versehenen Längen der Figur 62 dargestellt. Wir gehen von einer von diesen aus (P_1) und tragen eine zweite (P_3) nach Größe und Richtung in ihrem Endpunkte an (BC). Es ist dann AC die Diagonale des entsprechenden Parallogrammes, und somit die Resultierende von P_1 und P_3. An C tragen wir ebenso eine dritte der Längen (P_2) an, dann ist AD die Resultierende von AC und P_2, also von P_1, P_3, P_2. So fahren wir fort und kommen schließlich zu einem letzten Punkte (F in der Figur), wenn alle Längen P verwandt sind. Es ist dann $AF = R$ die Resultierende sämtlicher Kräfte P. Wenn wir eine Kraft $-R$ an A anbringen, so hält diese den Kräften $P_1, P_2, \ldots$ das Gleichgewicht. Die Länge R kann unter Umständen gleich 0 werden. Sie wird es z. B., wenn wir noch eine $(n+1)^{\text{te}}$ Kraft $P_{n+1} = -R$ in A anbringen ($n+1$ ist in Figur 62 gleich 6). Dann ist der Punkt A von selbst im Gleichgewicht, und es ergibt sich so der Satz:

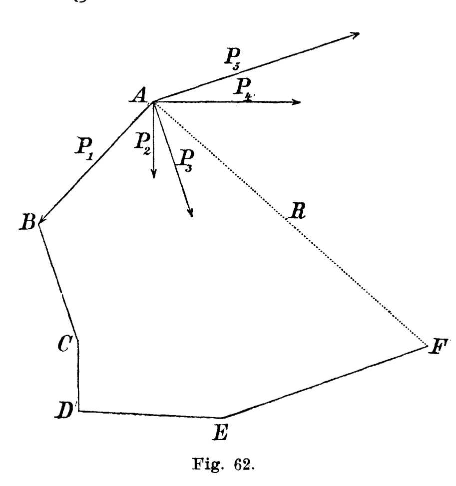


Fig. 62.

> Ein Punkt ist dann im Gleichgewicht, wenn die als Längen nach Größe und Richtung aneinander angetragenen Kräfte sich zum Polygon schließen.

Es ist hierbei nicht nötig, daß die Kraftrichtungen alle in eine Ebene fallen. Das allgemeine Gesetz läßt sich durch Schluß von n auf $n+1$ leicht erkennen.

8. Sind α_1, α_2, α_3, ... die Winkel, die die einzelnen Kraftrichtungen P mit der Resultierenden einschließen, so folgt aus der Figur 62

$$R = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \cdots,$$

und hierdurch ist die Eindeutigkeit der Konstruktion der Länge bewiesen, wenn die der Richtung feststeht. Es ist diese Zusammensetzung, wie man sieht, nichts anderes, als die in § 1 entwickelte „Vektoraddition“.

§ 11. Anwendung. Gleichgewicht auf der schiefen Ebene.

1. Wenn ein Körper gezwungen ist, sich in einer gegebenen starren Fläche zu bewegen, so kann nur eine solche Kraftkomponente eine Wirkung ausüben, die parallel zu dieser Fläche am Orte des Körpers, also tangential gerichtet ist. Es braucht auch nur diese durch eine Gegenkraft kompensiert zu werden, um Gleichgewicht herzustellen.

Ein Körper vom Gewicht G sei befestigt an einem Faden, der über das obere Ende einer schiefgestellten glatten Ebene mittels einer Rolle geführt ist (Fig. 63). Der Körper liege auf der Ebene auf, der Faden sei auf der Strecke zwischen Körper und Rolle parallel der Ebene und an seinem anderen Ende befinde sich ein Gewicht g. Wie groß muß dieses sein, damit der Körper in Ruhe bleibt? Die Kraft G können wir uns zerlegt denken nach dem Parallelogrammgesetz in eine Komponente G_1, die vollkommen wirken kann, also parallel der schiefen Ebene gerichtet ist, und eine, die vollkommen unwirksam, also senkrecht zu ihr gerichtet ist. Das Gewicht g braucht also nur der Komponente G_1 das Gleichgewicht zu halten. Aus der Zeichnung ersieht man, daß $G_1 = G \sin \alpha$ ist, wo α den Neigungswinkel der Ebene gegen die Horizontalebene bedeutet. Die Gleichgewichtsbedingung sagt also aus, daß

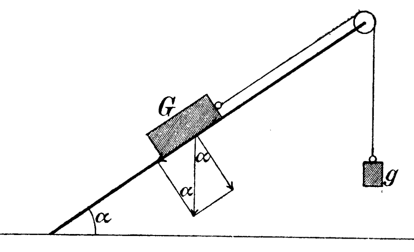


Fig. 63.

$$g = G \sin \alpha$$

sein muß.

2. Wir können dieses Gesetz auch aus dem Hebelgesetz ableiten[1]), indem wir uns den Faden mit der Rolle durch einen Hebel ersetzt denken, was allerdings nur im Falle des Gleichgewichts möglich ist. Dieser Hebel muß so beschaffen sein, daß eine sehr kleine Drehung desselben eine Verschiebung von G und g in der

1) Nach Galilei.

Weise hervorbringt, wie es bei der Fadenanordnung der Fall wäre. Es muß also zunächst der eine Hebelarm senkrecht auf der schiefen Ebene stehen, der andere muß horizontal gerichtet sein (Winkelhebel). Bei dieser Anordnung erfolgen sehr kleine Verschiebungen in gleicher Richtung, wie bei der schiefen Ebene Fig. 63. Außerdem müssen die kleinen Verschiebungen von G und g einander gleich sein, weil bei dem Fadensystem auch mit einer Verschiebung von g eine gleichgroße von G verknüpft ist.

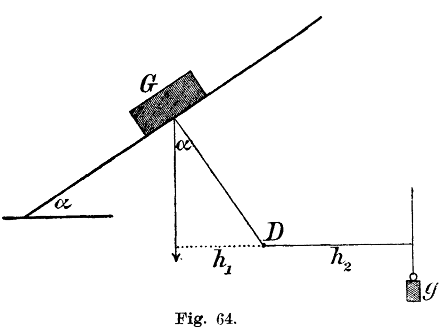


Fig. 64.

Das wird erreicht, wenn man den Hebel gleicharmig macht (Fig. 64). Das dritte Hebelgesetz liefert dann die Bedingung:

$$G h_1 = g h_2,$$

oder, da $h_1 = h_2 \sin \alpha$,

$$G \sin \alpha = g,$$

wenn Gleichgewicht herrschen soll.

§ 12. Das Kräftepaar.[1])

1. In § 8 haben wir gesehen, wie man zwei parallele Kräfte ersetzen kann durch eine im Kräftemittelpunkt angreifende Kraft, die gleich der Summe oder Differenz der Kräfte ist, je nachdem beide Kräfte gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Nennen wir eine bestimmte Richtung die positive, die entgegengesetzte die negative, so ist die ersetzende Kraft stets gleich der positiven algebraischen Summe der beiden Einzelkräfte. Am Schluß des Paragraphen hatten wir bereits erwähnt, daß dieses Gesetz versagt, wenn die beiden Kräfte gleich und entgegengesetzt sind, also bei einem sogenannten Kräftepaar.

Einem Kräftepaar kann durch eine einzige Kraft nicht mehr das Gleichgewicht gehalten werden; wohl aber ist das durch mehrere Kräfte möglich, da man, wie aus dem vorigen Paragraphen hervorgeht, jeder der beiden Kräfte des Paares auf mannigfache Weise das Gleichgewicht halten kann.

Wir wollen in Zukunft speziell unter einem Kräftepaar ein

1) Poinsot, Eléments de Statique.

solches verstehen, bei dem die Kräfte senkrecht auf der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte stehen. Der allgemeinere Fall läßt sich dann durch einfache Verschiebung der Angriffspunkte A, B in Richtung der Kräfte auf diesen Fall zurückführen (Fig. 65).

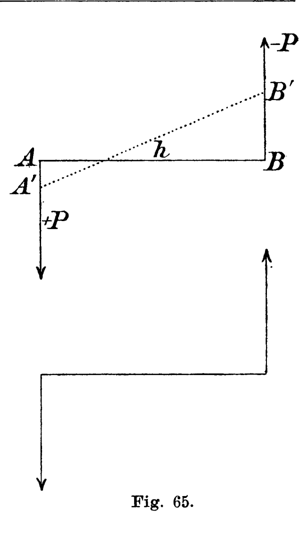


Fig. 65.

Die Angriffspunkte denken wir uns in einem beliebigen räumlichen Gebilde liegen, mit dem wir auch noch beliebige andere Punkte starr verbunden denken können. Wir bezeichnen die Kräfte unter Rücksichtnahme auf ihre Richtungen mit $+P$, $-P$. Die starre Verbindungslinie h ihrer Angriffspunkte nennen wir den „Hebel" des Kräftepaares. Das ganze Kräftepaar bezeichnen wir mit $(+P, -P, h)$. (Vgl. § 3, 6.)

2. Wir wollen uns unsere Aufgabe so stellen: Ein Kräftepaar befindet sich infolge irgend welcher, uns nicht näher bekannter Kräfte, deren Gesamtheit wir mit K bezeichnen wollen, im Gleichgewicht. Durch welche Art anderer Kräftepaare ist es ersetzbar, ohne daß das Gleichgewicht gestört wird?

Durch die Verschiebung der Angriffspunkte in den Richtungen der Kräfte ergibt sich sofort, daß man das Paar durch ein gleiches ersetzen kann, dessen Hebel parallel dem ursprünglichen ist, und gegen diesen senkrecht zu seiner Richtung verschoben erscheint. Oder mit anderen Worten:

Ein Kräftepaar kann parallel einer seiner Kräfte verschoben werden.

Wir werden im folgenden von dem in § 7, 7. bereits ausgesprochenen Satze III. Gebrauch machen: Zu einem System, das im Gleichgewicht ist, kann man ein beliebiges an sich selbst im Gleichgewicht befindliches Kräftesystem hinzufügen oder davon weglassen. Aus diesem leiten wir den Satz ab:

3. Ein Kräftepaar kann in seiner Hebelrichtung verschoben werden.

Zum Beweise denken wir uns in der Verlängerung des Hebels unseres Kräftepaares $(+P, -P, h)$ ein zweites gleiches angebracht $(+P', -P', h)$, so daß also $P' = P$ ist. Um das Gleichgewicht nicht zu stören, müssen wir dieses kompensieren, was auf verschiedene Weise möglich ist. Die zwischen den beiden Hebeln h, h ge-

legene Strecke $BA' = l$ (Fig. 66) machen wir zum Hebel eines neuen Kräftepaares $(-Q, +Q, l)$ und bestimmen Q so, daß $-Q$ und $-P'$

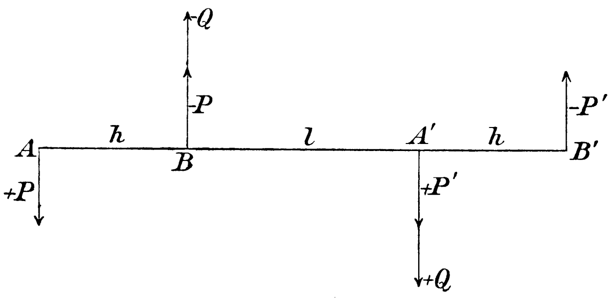


Fig. 66.

durch die in A' angreifende Kraft $+P' + Q$ im Gleichgewicht gehalten wird. Das ist nach den Gesetzen des § 8 dann der Fall, wenn

$$Q : P' = h : l$$

ist. Damit ist nach § 8, 4. unser ganzes System im Gleichgewicht. Es sind aber andererseits auch die in ABA' angreifenden Kräfte $+P$, $-P-Q$, $+Q$ für sich im Gleichgewicht (nach § 8, 4.), so daß wir sie also weglassen können. Die übrigbleibenden Kräftesysteme, also das unbekannte K und das Kräftepaar $(+P', -P', h)$ sind somit ebenfalls im Gleichgewicht, womit Satz 3 bewiesen ist.

4. Die Kombination von 2. und 3. liefert uns dann das Gesetz:

Man kann ein Kräftepaar beliebig in seiner Ebene, d. h. der Ebene, in der der Hebel und die beiden Kräfte liegen, verschieben, wenn der Hebel sich dabei parallel bleibt.

5. Diese letzte Einschränkung zu machen ist nicht nötig. Wir denken uns ein Kräftepaar $+P', -P', h$ (Fig. 67), das dem ursprünglichen gleich ist, dessen Hebel aber um den Mittelpunkt D des ursprünglichen gedreht erscheint, und bringen, um dieses im Gleichgewicht zu halten, an seinen Angriffspunkten die entgegengesetzten Kräfte $-P''$, $+P''$ an. Es soll also $P = P' = P''$ sein. Dann haben wir damit ein im Gleichgewicht befindliches System hinzugefügt. Wenn wir jetzt die Angriffspunkte der Kräfte $+P$, $-P'$

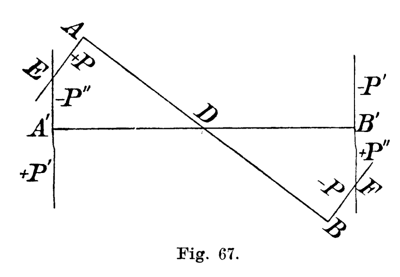


Fig. 67.

in ihren Richtungen bis zum Schnittpunkt E ihrer Richtungen verschieben, so können wir sie nach dem Gesetz des Parallelogramms zu einer Kraft $+Q$ zusammensetzen, und diese hat die Richtung der Winkelhalbierenden der beiden Kraftrichtungen, da die Kräfte und damit die Seiten des Parallelogramms einander gleich sind.

Es ist diese Richtung die von DE. Führen wir dasselbe für die Kräfte $-P$, $+P''$ aus, so setzen diese sich zu einer gleichgroßen aber entgegengesetzt gerichteten Kraft $-Q$ zusammen, die also der Kraft $+Q$ das Gleichgewicht hält, da sie mit dieser in einer Geraden liegt. Somit ist das Kräftesystem $+P$, $-P''$, $-P$, $+P''$ im Gleichgewicht und kann weggelassen werden. Dann bleibt das Kräftepaar $(+P', -P', h)$ übrig, das mit K im Gleichgewicht sein muß. Die Kombination mit 2. und 3. liefert uns den Satz:

Man kann ein Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verschieben und drehen.

6. In einer zu der Ebene des Kräftepaares $(+P, -P, h)$ parallelen Ebene denken wir uns ein gleiches Kräftepaar $(+P', -P', h)$ angebracht, dessen Hebel dem ersten parallel ist, und dieses kompensieren wir durch das entgegengesetzte $-P''$, $+P''$, h wie bei den früheren Beweisen (Fig. 68).

Verbinden wir die Angriffspunkte der beiden Paare kreuzweise miteinander, so schneiden sich diese Verbindungslinien in ihrem Mittelpunkt D. Die Kräfte $+P$ und $+P''$ werden nach § 8, 4. kompensiert durch eine in D angreifende Kraft $-Q = -(P + P'')$, die Kräfte $-P$, $-P''$ durch eine entgegengesetzte im gleichen Punkte $+Q = +(P + P'')$. Die Kräfte $+Q$ und $-Q$ sind demnach für sich im Gleichgewicht und können beliebig hinzugefügt werden. Es ist also damit das aus den Kräften $+P$, $-Q$, $+P''$; $-P$, $+Q$, $-P''$ bestehende System im Gleichgewicht und es bleibt somit das Kräftepaar $(+P', -P', h)$ übrig. Demnach folgt:

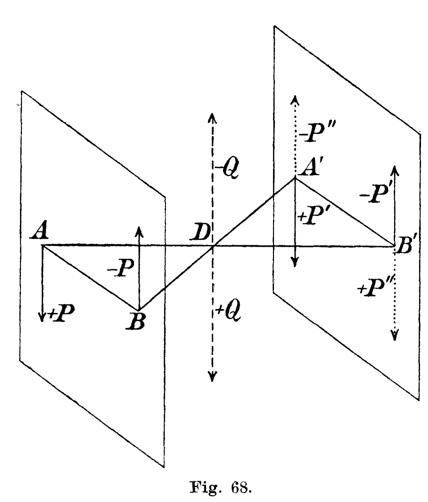


Fig. 68.

Ein Kräftepaar kann in eine zu seiner Ebene parallele Ebene verschoben werden.

7. Wie wir beim Beweis des Satzes 3 bereits gesehen haben, ist das aus den Kräften $+P$, $-P-Q'$, $+Q'$ bestehende System im Gleichgewicht, wenn (Fig. 66, 69)

$$h : l = Q' : P$$

ist. Die Kräfte $-Q'$, $+Q'$ werden also kompensiert durch die Kräfte $+P$, $-P$. Andererseits werden sie aber auch durch die Kräfte $+Q$, $-Q$ $(Q=Q')$ kompensiert, die mit l als Hebel ein Kräftepaar bilden. Demnach ist das Kräftepaar $(+P,\ -P,\ h)$ ersetzbar durch das andere $(+Q,\ -Q,\ l)$, wenn

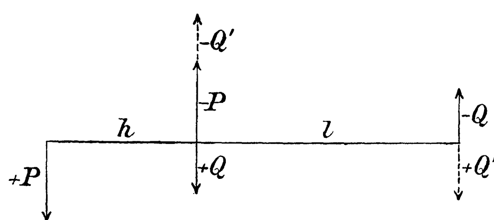


Fig. 69.

$$h : l = Q : P$$

oder wenn

$$P \cdot h = Q \cdot l$$

ist. Nennen wir dieses Produkt aus der positiven Kraft und dem Hebel das „Moment“ des Kräftepaares M, so können wir, wenn wir die Sätze 2 bis 6 dazu nehmen, diesen Satz in die Worte kleiden:

Ein Kräftepaar läßt sich ersetzen durch ein anderes von gleichem Moment, das gegen das ursprüngliche beliebig in seiner Ebene gedreht, und in der eigenen oder einer parallelen Ebene verschoben erscheint.

8. Eine Strecke $AB = h$ sei der Hebel zweier verschiedenen Kräftepaare, $(+P,\ -P,\ h)$ und $(+Q,\ -Q,\ h)$, deren Ebenen einen gewissen Winkel α miteinander einschließen (Fig. 70).

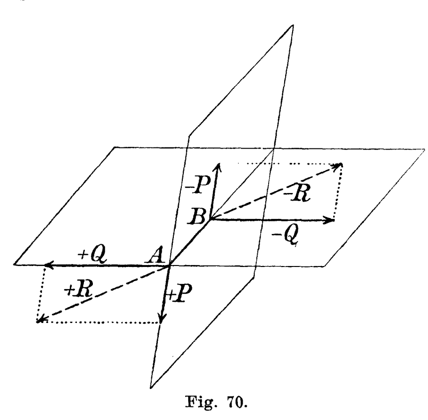


Fig. 70.

Es seien die Momente dieser Paare

$$P \cdot h = M_1, \quad Q \cdot h = M_2.$$

Die Kräfte $+Q$, $+P$ können wir zu einer Resultierenden $+R$ nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte zusammensetzen, ebenso $-P$, $-Q$ zu einer Resultierenden $-R$. Daraus folgt, daß wir die beiden Kräftepaare ersetzen können durch das Kräftepaar $(+R, -R, h)$. Es ist nach dem Kosinussatze (Bd. II, S. 316)

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos\alpha}.$$

Demnach ist das Moment des Kräftepaares $(+R, -R, h)$

$$M_r = R \cdot h = h\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}\,,$$

oder, wenn wir h unter das Wurzelzeichen nehmen und für $P \cdot h$ und $Q \cdot h$ die Momente M_1 und M_2 einführen:

$$M_r = \sqrt{M_1{}^2 + M_2{}^2 + 2M_1M_2\cos\alpha}\,.$$

Es setzen sich also die Momente des Kräftepaares ebenso zusammen wie die Kräfte nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte.

Nehmen wir wieder die früheren Sätze hinzu, so gelangen wir zu dem Fall zweier beliebig im Raume und voneinander ganz unabhängig gelegener Kräftepaare, und für diese gilt der Satz:

> Zwei beliebig gerichtete Kräftepaare lassen sich nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte zusammensetzen, indem man ihre Momente normal zu der Schnittlinie ihrer Ebenen in diesen Ebenen aufträgt.

Die Diagonale gibt die Größe des resultierenden Momentes. Ihre Richtung bestimmt mit der Schnittlinie die Ebene des resultierenden Kräftepaares.

Wir haben zunächst die Richtung allerdings aus dem Parallelogramm der Kräfte P und Q ermittelt. Daß wir aber statt dessen auch die Richtung der Diagonalen des Momenteparallelogramms nehmen dürfen, folgt daraus, daß sich die Winkel nicht ändern, wenn wir jede Seite auf das h-fache vergrößern.

9. Die Zusammensetzung von Kräftepaaren können wir wesentlich anschaulicher gestalten, wenn wir uns die Momente der Kräftepaare geometrisch in anderer Weise durch Längen dargestellt denken, als in 8. geschehen ist. Wir treffen die folgenden Festsetzungen:

Die Ebene, in der das Kräftepaar wirkt, sei die Ebene des Zifferblattes einer Uhr. Die Drehung erfolge in entgegengesetztem Sinne zum Uhrzeiger. Wir nennen dann die zum Beschauer der Uhr hin gerichtete Normale die positive Drehachse. Umgekehrt nennen wir die entgegengesetzt der Uhrzeigerdrehung erfolgende Drehung eine „Rechtsdrehung“ bezüglich der eben definierten Normalenrichtung als Drehachse. In diesem Sinne führt z. B. eine gewöhnliche Holzschraube, die wir in ein Brett einbohren, eine Rechtsdrehung aus, wenn wir die Fortschreitungsrichtung der Schraube, also die Richtung des Eindringens in das Brett, als positive Drehachse definieren. Auch dieses Beispiel könnten wir als Definition der Rechtsdrehung einführen.

Ferner: Wenn wir die rechte Hand nach vorne ausstoßen und sie dabei ungezwungen drehen — jeder, der dies ausführt, wird erkennen, daß sich bei dieser „ungezwungenen Drehung“ der Handrücken von oben nach rechts seitwärts bewegt —, so führt die Hand eine Rechtsdrehung bezüglich der Fortschreitungsrichtung als positive Drehachse aus.

Auf diese Weise definieren wir die „positive Drehachse“, und auf dieser tragen wir das Drehmoment des Kräftepaares in einer beliebig gewählten Längeneinheit als Länge auf. Die Drehachse ist nicht eine festliegende Gerade, sondern nur eine festliegende Richtung. Trotzdem ist das Kräftepaar eindeutig dadurch bestimmt, da nach den früheren Sätzen ein Kräftepaar beliebig verschoben werden kann, wenn es nur in einer parallelen Ebene bleibt. Wir können somit auch die das Kräftepaar darstellende Länge beliebig verschoben denken, wenn wir nur die parallele, sowie die positive Richtung gewahrt lassen.

Denken wir uns nun zwei beliebige Kräftepaare in der angegebenen Weise geometrisch dargestellt, so brauchen wir nur die sie darstellenden Längen parallel mit sich zu verschieben, bis ihre Anfangspunkte zusammenfallen. Wir setzen sie dann nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte zu einer Resultierenden zusammen. Diese gibt dann durch ihre Länge das Drehmoment des resultierenden Kräftepaares und durch ihre Richtung den Drehungssinn desselben.

§ 13. Beliebige Kräfte an einem starren Körper.[1])

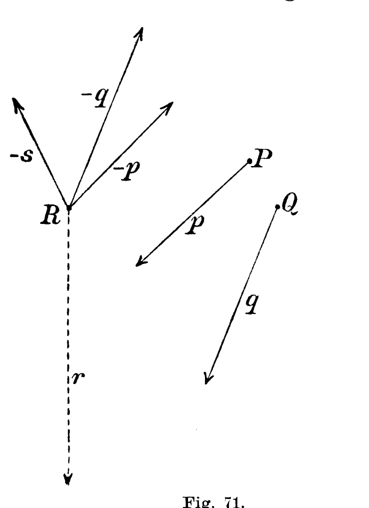


Fig. 71.

1. Die Gesetze der vorigen Paragraphen geben uns darüber Aufschluß, wie sich beliebige Kräfte, die an beliebigen Punkten eines starren Körpers wirken, zusammensetzen. Es seien P, Q, S, ... (Fig. 71) die Punkte des starren Körpers, in denen die Kräfte p, q, s, ... angreifen.

Es lassen sich diese Kräfte zu einer einzigen Resultierenden nach dem Parallelogramm der Kräfte nur dann zusammensetzen, wenn man bei jedem Schritt des Vorgehens immer zwei Kräfte finden kann, die in einer Ebene

1) Möbius, Werke Bd. III, 1. Teil, 5. Kap.

liegen. Denn nur dann schneiden die Richtungen dieser beiden sich in einem Punkte, den man durch Verschieben in der Kraftrichtung zum gemeinschaftlichen Angriffspunkte machen kann. Das Parallelogrammgesetz ist aber nur für Kräfte anwendbar, die in denselben Punkten angreifen.

2. Denken wir uns nun einmal in einem beliebigen Punkte R des starren Körpers Kräfte $-p, -q, -s, \ldots$ angebracht, die den Kräften $p, q, s, \ldots$ parallel und entgegengesetzt gleich sind, so können wir diese, da sie in einem Punkte angreifen, nach dem Parallelogrammgesetz kompensieren durch eine Kraft r, die ihrer Resultierenden gleich und entgegengesetzt ist. Durch das Kräftesystem $-p, -q, -s, \ldots, r$ haben wir damit nur ein an sich im Gleichgewicht befindliches System hinzugefügt. Es wirken jetzt auf den Körper eine Kraft r und n Kräftepaare $[-p, +p, (RP)]$; $[-q, +q, (RQ)]$; $[-s, +s, (RS)]$; $\cdots$. (RP), (RQ) usw. bedeuten hier die kürzesten Abstände zwischen den Kraftrichtungen. Diese Kräftepaare können wir nach § 12, 8. zu einem einzigen Kräftepaar $(+K, -K, h)$ kombinieren, indem wir erst zwei von ihnen zu einem neuen zusammensetzen, dann von den übrigbleibenden $n-1$ wieder zwei und so fort. Da der Punkt R noch willkürlich ist und von seiner Lage die Kräftepaare abhängen, so folgt:

Beliebige an einem starren Körper angreifende Kräfte lassen sich durch eine einzige Kraft und durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, aber nicht in eindeutiger Weise.

3. Die Kraft r wird im allgemeinen nicht parallel der Ebene des Kräftepaares $(+K, -K, h)$ gerichtet sein. Letzteres können wir nun nach § 12, 7. so weit verschieben, bis der Angriffspunkt einer seiner Kräfte, z. B. der von $+K$, mit dem Angriffspunkt von r zusammenfällt. Wir können jetzt r und K nach dem Parallelogrammgesetz zu einer neuen Resultierenden r' zusammensetzen, die mit K nicht parallel ist und sich mit ihr auch nicht schneidet. Daraus folgt also:

Beliebige an einem starren Körper angreifende Kräfte lassen sich durch zwei sich kreuzende (windschiefe) Kräfte ersetzen.

4. In speziellen Fällen werden r und K parallel sein. Dann wird $r' = r + K$ und parallel mit $-K$. Es greifen dann an einem Hebel h zwei parallele verschieden große Kräfte an und

diese lassen sich nach § 8 durch eine einzige Kraft ersetzen. In diesem Falle sind also die Kräfte p, q, s, ... durch eine einzige ersetzbar.

5. Es kann ferner vorkommen, daß die Kräfte $-p, -q, -s, \ldots$ an sich im Gleichgewicht sind, daß also $r = 0$ ist. Dann sind die Kräfte p, q, s, ... durch ein einziges Kräftepaar $(+K, -K, h)$ ersetzbar.

Dynamik.

§ 14. **Zeit und Raum.**

1. Die Geometrie bedurfte als Ausgangsmaterial den Begriff des Raumes, den wir in die Statik und Dynamik unverändert übernehmen können; wir haben höchstens noch die zeitliche Unveränderlichkeit des Raumes zu postulieren.

2. Schon die Statik hat den Begriff der Zeit qualitativ anwenden müssen, indem sie den Zustand des „Gleichgewichts" auf ihn zurückführen mußte. Die Erkenntnis des Gleichgewichtes ist ohne Zeitbegriff unmöglich, wenigstens wenn wir das Gleichgewicht, wie wir es getan haben, als selbständigen Begriff definieren, und nicht etwa durch das erste Hebelgesetz. Wir könnten das erste Hebelgesetz oder ein anderes als Definition des Gleichgewichtes einführen, wodurch das Gleichgewicht ein rein mathematischer Begriff würde, ohne sinnliche Anschaulichkeit. Diesen Weg haben wir nicht gewählt, weil wir in diesem Abschnitt über Physik nichtphysikalische Begriffe tunlichst vermeiden wollten.

Die Dynamik braucht außer diesem qualitativ festgelegten Zeitbegriff, den wir als gegeben voraussetzen wollen, wie den Raum, eine quantitative Zerlegung, d. h. eine „Meßbarkeit" der Zeit. Meßbar wird die Zeit dadurch, daß wir verschiedene Zeitabschnitte als „gleich" bezeichnen, was auf unendlich vielfache Weise möglich ist. Wir setzen willkürlich fest: Die Zeiten, die die Erde zu jeweils einmaligen Umläufen um die Sonne gebraucht, nehmen wir als gleich an.

Diese Annahme hat sich dadurch bewährt, daß sich gewisse einfache mechanische Vorrichtungen, z. B. ein Pendel, das man jeweils aus einem bestimmten Elevationswinkel herabfallen läßt, und dessen Bewegungsdauer bis zum nächsten Umkehrpunkt man betrachtet, sowie andere sich zeitlich wiederholende, „periodische" Vorgänge,

z. B. die Licht- und Schallschwingungen synchron mit der Sonne abspielen, d. h. während jeder Sonnenperiode, also während eines Jahres, immer ihrerseits die gleiche Anzahl von Zeitabschnitten oder Perioden ergeben. Das Gleiche gilt auch für den sogenannten Sternentag, die Zeitdauer, die zwischen zwei Durchgängen eines und desselben Fixsternes durch unseren Meridian verläuft.

Diese periodischen Vorgänge würden also alle den „Gleichheitsbegriff" der Zeit identisch ergeben, wie es der Sonnenumlauf tut; und das ist gerade das Wertvolle, daß der Gleichheitsbegriff nicht aus einem einzigen Vorgange abgeleitet ist. Wir erwarten von ihm, daß er uns in der Physik zu einfachen Gesetzen führt. Die Übereinstimmung, die in den verschiedenen angeführten Vorgängen liegt, lehrt uns, daß für diese jedenfalls Einfachheit zu erwarten ist, und wir schließen hier von Vielem auf Alles.

3. Bei erster, roher Messung könnte man zu dem Resultat kommen, daß auch der Sonnentag denselben Gleichheitsbegriff der Zeit liefert, und in der Tat ist er lange Zeit hindurch dazu verwendet worden. Die verfeinerten Messungen lehrten, daß er sich doch den übrigen genannten Vorgängen nicht anschloß.

Neuerdings lehrt nun die Astronomie, daß die Umlaufszeit der Erde um die Sonne sowohl periodischen als säkularen Änderungen unterworfen ist. Das Gleiche gilt von der Umdrehung der Erde, und auch beim Pendel[1]) werden zeitliche Änderungen vermutet.

Derartige Behauptungen können nur den Sinn haben: die genannten Vorgänge führen eben doch nicht streng zum selben Gleichheitsbegriff der Zeitabschnitte. Die Abweichungen sind allerdings so klein, daß sie für weitaus die meisten physikalischen Untersuchungen nicht im entferntesten in Betracht zu ziehen sind. Hier sind wir also immer noch in der glücklichen Lage, nach einer größeren Anzahl verschiedenartiger Vorgänge unseren Gleichheitsbegriff definieren zu können.

Aber was sollen wir anfangen, wenn einmal unsere Meßmethoden zu solcher Feinheit herangebildet sind, daß sich die Abweichungen bemerkbar machen?

Gerade die Gesetze, die wir unter Zugrundelegung unseres Zeitbegriffes gewonnen haben, sind es, die verlangen, daß z. B. der Sternentag sich infolge von Ebbe und Flut verändert, daß das Jahr durch den Stand der Planeten beeinflußt wird. Es bleibt uns dann also das Mittel, den Gleichheitsbegriff der Zeit so zu wählen, daß eins dieser Gesetze, zu dem wir besonderes Zutrauen gewonnen haben,

1) K. R. Koch, Über Beobachtungen, welche eine zeitliche Änderung der Größe der Schwerkraft wahrscheinlich machen. Ann. d. Phys. 15, p. 146, 1904.

z. B. das Newtonsche Attraktionsgesetz, erhalten bleibt. Wenn wir das nicht wollen, sind wir in derselben üblen Lage, in der wir uns bei der Definition der Temperatur befinden (§ 24).

Ob es, wie man vorgeschlagen hat, möglich sein wird, den Zeitbegriff so zu definieren, daß „die physikalischen Gesetze möglichst einfach werden", müssen wir der Zukunft überlassen. Abzuwägen, bei welcher Definition der Zeit die Gesamtheit aller Naturgesetze das einfachste denkbare System darstellt, können wir uns nicht unterfangen.

4. Mit Hilfe solcher periodischer Vorgänge ist es möglich — gewisse physikalische Erkenntnisse, die eigentlich erst später ihren Platz haben, vorausgesetzt —, Unterabteilungen, also Bruchteile der Zeitabschnitte zu definieren.

Wenn wir z. B. ein Pendel haben, das in einem Jahre eine bestimmte Anzahl Schwingungen ausführt, so können wir ohne Meßbarkeit der Zeit vorauszusetzen konstatieren, ob diese Schwingungszahl im zweiten, dritten, vierten u. s. w. Jahre dieselbe geblieben ist. Ist das über eine beliebige Zahl von Jahren hinaus der Fall[1]), so liegt die Annahme (A) nahe, daß jede seiner Schwingungen unter den gleichen (aus unserem Zeitbegriff erst ableitbaren) physikalischen Bedingungen erfolgt. Beweisen können wir diese Annahme nicht, ohne diese physikalischen Bedingungen zu kennen, zu deren Kenntnis aber wieder die Teilbarkeit der Zeit erforderlich ist.

Die Richtigkeit der Annahme (A) würde uns etwa in folgender Weise zu einer Unterteilung unseres Jahres berechtigen:

Wenn wir statt unseres Pendels ein anderes z. B. kürzeres Pendel wählen, werden wir finden, daß dieses mehr Schwingungen im Jahre ausführt, als das frühere und zwar können wir jede beliebige Schwingungszahl n im Jahre durch Wahl der Pendellänge erhalten. Wir nehmen dann an, daß das Pendel zu jeder seiner Schwingungen $1/n$ eines Jahres braucht, und haben so rationale Bruchteile definiert. Zu irrationaler Teilung müssen wir auf rein mathematischem Wege, wie in Band I, § 30 der 1ten, § 33 der 2ten Aufl., übergehen.

Um die Annahme (A) mehr zu bekräftigen, können wir noch andere periodische Vorgänge zum Zweck der Teilung der Zeit heranziehen, z. B. den Pulsschlag, das Taktgefühl, wenn es sich um Unterteilung bereits kleiner Teile handelt; ferner die Uhr. Hier können wir versuchsweise annehmen, daß der Zeiger gleiche Wegstrecken immer unter gleichen physikalischen Bedingungen zurücklegt, und daß die Zeit proportional dem Weg des Zeigers ist.

1) Beim Pendel ist dies in der Tat der Fall wenn man das Abklingen des Pendels etwa durch erneutes Anstoßen von Zeit zu Zeit vermeidet (Pendeluhr).

Die Zeit, die der Zeiger braucht, $1/n$ des Weges zurückzulegen, den er in einem Jahre zurücklegt, ist dann als „$1/n$ Jahr" zu definieren, und die Annahme (A) gewinnt an Berechtigung, wenn dieses $1/n$ mit dem aus Pendelschwingungen gefundenen übereinstimmt. Bei der Definition der Zeitteile mittels der Uhr ist die Definition irrationaler Bruchteile mit inbegriffen, d. h. auf inkommensurable Strecken zurückgeführt.

5. Es gibt auch periodische Vorgänge, die zu einer anderen Unterteilung der Zeit führen würden. Z. B. würde das der Fall sein, wenn wir den Weg der Erde der Zeit proportional setzen. $1/n$ Jahr auf diese Weise definiert führt zu einer Größe, die nicht mit dem früheren $1/n$ übereinstimmt.

Wenn wir aber eine Anzahl Vorkehrungen kennen, die zur gleichen Unterteilung führen, während andere nicht nur von diesen, sondern auch untereinander abweichen, so ist es zweckmäßig, die ersteren zur Definition der Bruchteile zu wählen. Es ist zu erwarten, daß dann die aus diesem Zeitbegriff abgeleiteten Gesetze besonders einfach ausfallen. Bestätigt sich das später, so bewährt sich damit unsere Wahl, wenn auch rein logisch eine andere Wahl ebenso erlaubt wäre.

6. Nachdem wir so Zeitabschnitte miteinander vergleichen können, dürfen wir irgend einen als Einheit festsetzen. Die Physik wählt gewöhnlich die Sekunde, d. h. den 86 400ten Teil des mittleren Sonnentages als Einheit. Es ist dies die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels (vgl. § 17, D) von 99,356 cm Länge unter 45° geographischer Breite.

7. Die Meßbarkeit des Raumes setzt voraus, daß wir einen zeitlich unveränderlichen Raum besitzen und daß es Körper gibt, deren Dimensionen von der Zeit und dem Ort direkt unabhängig sind. Indirekt abhängig sind alle Körperdimensionen von Ort und Zeit insofern, als sie z. B. von der Temperatur, die Orts- und Zeitfunktion ist, abhängig sind.

Zunächst haben wir freilich kein Kriterium dafür, ob ein solcher Körper direkt oder indirekt von der Zeit oder dem Orte abhängig ist. Denken wir uns z. B. zwei Metallstäbe, die wir als gleich lang erkannt haben, und halten wir unter einen von ihnen eine Flamme, so wird die Gleichheit nach einiger Zeit nicht mehr bestehen. Wir wissen nun, daß der eine Körper, so weit wir es beurteilen können, keiner äußeren Einwirkung ausgesetzt gewesen ist. Also schreiben wir die Schuld an der Änderung der Gleichheit dem zweiten Körper zu, bei dem wir außerdem durch unser Gefühl noch eine weitere Änderung, eine Erwärmung (§ 24), konstatieren können. Unser logisches Vorgehen ist also das, daß wir einen Körper, der

scheinbar keinen ändernden Einflüssen unterworfen ist, als konstant in seinen Dimensionen voraussetzen. Diese Voraussetzung behalten wir so lange bei, als sie sich bewährt, d. h. als wir nicht in Konflikt mit anderen ebenfalls scheinbar unbeeinflußten Körpern kommen. Wenn ein solcher Konflikt eintritt, haben wir zu forschen, ob wir vielleicht irgend einen Einfluß übersehen haben.

Die Tatsache, daß wir eine sehr große[1]) Anzahl von Körpern kennen, die in gleichen Längenverhältnissen bleiben, so lange wir keine der uns durch Forschung bekannten Einflüsse auf sie ausüben, und daß, wo dies scheinbar nicht der Fall war, sich eine Beeinflussung hat nachweisen lassen, berechtigt uns zu der Annahme, daß die Dimensionen der Körper von Zeit und Raum direkt unabhängig sind.

Wir wären auch ebensogut berechtigt, sie in ein und derselben Weise von Raum und Zeit abhängig anzunehmen. Diese Annahme wäre aber weniger naheliegend.

8. Als technische Einheit für die Länge dient uns das Meteretalon, das, in Platin[2]) hergestellt, in Paris aufbewahrt wird. Es sollte dies ursprünglich der zehnmillionte Teil des Meridianquadranten sein; spätere Messungen der Erde haben aber die damaligen Daten als von der Wahrheit meßbar abweichend ergeben. In Wirklichkeit ist der genannte Erdquadrant das 10 000 855,764 fache des Pariser Meters. Die Physik verwendet gewöhnlich als Einheit das Zentimeter. (Vgl. den Artikel „Maß und Messen“ von Runge in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Bd. V, Heft 1.)

9. Der Ausdruck „Zeit“ wird im alltäglichen Leben in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht; einmal als Zeitraum oder Zeitintervall, dann als Grenzpunkt zwischen zwei aneinander grenzenden Zeiträumen. Wegen der strengen Formulierung dieser zwei Begriffe können wir auf den Nachtrag zum zweiten Bande verweisen, der den Begriff Strecke und Raumpunkt behandelt. In der Dynamik müssen die beiden Begriffe unterschieden werden. Wir werden im allgemeinen unter Zeit immer einen Zeitraum verstehen, der von einem jeweils zu wählenden Nullpunkt an gerechnet ist. Da es sich immer um Zeitdifferenzen handelt, werden wir den Nullpunkt der Zeit in mathematischen Ableitungen meist nicht festzulegen brauchen, wenn wir ihn nur während einer Rechnung als fest liegen bleibend voraussetzen.

---

1) Wir reden hier absichtlich nicht von allen Körpern, da wir tatsächlich bei einigen Körpern aus der Veränderung ihrer Länge erst auf einen Einfluß schließen, der uns aber noch unbekannt ist, z. B. beim Wachsen der Bäume.

2) 90 % Platin, 10 % Iridium. Reines Platin ist zu weich.

§ 15. Geschwindigkeit und Beschleunigung.

1. Wenn sich ein Massenpunkt auf einem beliebigen Wege so bewegt, daß jeweils eine von ihm zurückgelegte Wegstrecke proportional mit der Zeit ist, die während dieses Zurücklegens verflossen ist, so nennen wir seine Bewegung „gleichförmig“. Es ist dann also

$$s_1 = v t_1,$$

wenn s_1 den in der Zeit t_1 zurückgelegten Weg bedeutet, und der Proportionalitätsfaktor v heißt die „Geschwindigkeit“.

Ist nach Verlauf einer anderen, größeren Zeit t_2 der Weg s_2, so muß

$$s_2 = v t_2$$

sein, und weiter:

$$s_2 - s_1 = v(t_2 - t_1),$$

(1) $$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

worin wieder $s_2 - s_1$ der im Zeitintervall $t_2 - t_1$ zurückgelegte Weg ist. Die Geschwindigkeit v läßt sich nach (1) als der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg definieren.

2. Ist der Weg nicht mehr der Zeit jeweils proportional, so können wir das dadurch erklären, daß wir v als nicht konstant annehmen. Wir nennen die Bewegung dann beschleunigt oder verzögert, schreiben ihr aber immer noch eine bestimmte, aber von Punkt zu Punkt sich ändernde Geschwindigkeit zu.

Die Gleichung (1) gibt uns dann nicht mehr diese Geschwindigkeit an, sondern einen Mittelwert aller der Geschwindigkeiten, die der Punkt auf der Strecke $s_2 - s_1$ besitzt. Je kleiner wir $t_2 - t_1$ und damit $s_2 - s_1$ machen, um so weniger wird sich dieser Wert von den Einzelwerten unterscheiden und wir können setzen

(2) $$v_s = \operatorname*{Lim}_{t_2 = t_1 = t} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

(vgl. Bd. I, 2te Aufl., § 146), wo s der zur Zeit t zurückgelegte Weg ist.

3. Die Geschwindigkeit ist eine Vektorgröße im Sinne von § 1 und 2, wie eine Verschiebung, aus der die Geschwindigkeit durch Division mit dem zugehörigen Zeitintervall hervorgeht.

Ein Punkt A möge sich in einem beliebig kleinen Zeitintervall t von A nach B bewegen. Wir können die Strecke $\overline{AB} = s$, wenn

wir nur t hinreichend klein machen, als geradlinig ansehen, und die Geschwindigkeit des Punktes ist dann

$$v = \frac{s}{t}.$$

Die Verschiebung s ist gleichwertig mit zwei gleichzeitigen Verschiebungen AC und AD, wenn

$$AC = s \cos \varphi;\ AD = s \cos \psi, \\ = s \sin \varphi$$

ist. D. h. wir können annehmen, daß sich der Punkt A gleichzeitig von A nach C und von A nach D bewegt. Das Resultat wird das gleiche sein; er wird sich nach Ausführung dieser beiden Verschiebungen in B befinden.

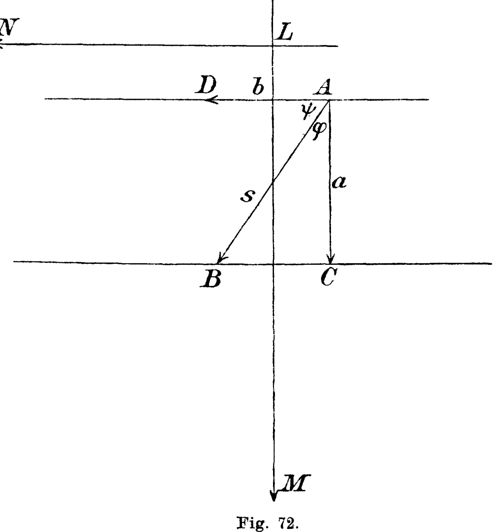


Fig. 72.

Praktisch veranschaulichen kann man sich diese Zerlegung etwa durch eine Tischplatte, auf der der Punkt liegt. Wenn wir die Tischplatte in der Richtung LM, etwa in Richtung der einen Tischkante um die Strecke AC, den Punkt auf der Tischplatte aber parallel LN, der anderen Tischkante, um die Strecke AD verschieben, so kommt er im Raume auf denselben Ort, als wenn wir ihn direkt von A nach B verschieben. Die beiden Einzelverschiebungen erfolgen dann mit den Geschwindigkeiten

$$v_x = \frac{AC}{t} = \frac{s \cos \varphi}{t} = v \cos \varphi,$$

$$v_y = \frac{AD}{t} = v \cos \psi = v \sin \varphi.$$

Denken wir uns also die Geschwindigkeit in irgend einem Maß als Länge in der Richtung der Verschiebung aufgetragen, so geben die Projektionen auf zwei zueinander senkrechte Richtungen die Geschwindigkeiten, die durch Vektoraddition die wahre Geschwindigkeit ergeben.

In gleicher Weise erkennt man, daß man die Geschwindigkeit auch nach zwei schiefwinkligen Richtungen nach dem Parallelogrammgesetz zerlegen kann.

Umgekehrt können wir zwei Geschwindigkeiten zu einer „Resultante“ zusammensetzen, so daß bewiesen ist, daß wir auf die Geschwindigkeit die Vektorenrechnung anwenden dürfen.

4. Die Geschwindigkeit ist im allgemeinen eine Funktion der Zeit. Wenn sie mit der Zeit zunimmt, heißt die Bewegung „beschleunigt“, wenn sie mit der Zeit abnimmt, verzögert. Für die Rechnung können wir beide Fälle als „Beschleunigung“ auffassen, wenn wir die Verzögerung als negative Beschleunigung bezeichnen.

Wächst die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um den gleichen Betrag, ist also die Zunahme der Geschwindigkeit in einem Zeitintervall diesem Zeitintervall proportional, so heißt die Bewegung „gleichförmig beschleunigt“. Es ist dann

$$(v_2 - v_1) = p(t_2 - t_1),$$

wo v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten zu den Zeiten t_1 und $t_2 > t_1$ bedeuten. Der Proportionalitätsfaktor p heißt die „Beschleunigung“. Es ist

(3) $$p = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

die in der Zeiteinheit erfolgende Zunahme der Geschwindigkeit.

Wenn die Geschwindigkeit sich nicht proportional der Zeit verändert, ist die Bewegung „ungleichförmig beschleunigt“. Wir können dann ebenso wie bei der Geschwindigkeit schließen

(4) $$p_s = \operatorname{Lim}_{t_2 = t_1 = t} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

und p ist dann eine Funktion der Zeit, resp. des Ortes.

5. Daß die Beschleunigung ebenfalls eine Vektorgröße ist, läßt sich leicht erkennen.

Ein bewegter Punkt wird dann eine Beschleunigung besitzen, wenn seine Geschwindigkeit im allgemeinsten Falle sich nach Ort und Zeit ändert. Ist $\boldsymbol{v}_1$ der Geschwindigkeitsvektor in einem bestimmten Moment, $\boldsymbol{v}_2$ derselbe nach Ablauf einer beliebig klein zu wählenden Zeit τ, so ist die Vektordifferenz $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ ein neuer Vektor, die Geschwindigkeitsänderung, dessen Komponente nach einer beliebigen Richtung s gleich dem Geschwindigkeitszuwachs $v_{2s} - v_{1s}$ nach dieser Richtung ist. Daraus folgt durch Division mit τ, daß der Vektor

$$\boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{\tau}$$

als die „Beschleunigung“ des Punktes angesehen werden darf, deren Projektionen die Beschleunigungskomponenten sind.

Die Beschleunigung fällt ihrer Richtung nach im allgemeinen nicht mit der der Geschwindigkeit zusammen, da die Vektordifferenz mit den einzelnen Vektoren nicht zusammenfällt. Man übersieht dies auch leicht folgendermaßen: Senkrecht zur Bahnrichtung besitzt der Punkt keine Geschwindigkeitskomponente; wohl aber kann ein Geschwindigkeits*zuwachs* in dieser Richtung — also vom Werte 0 an — erfolgen. Es wird also dann eine Beschleunigungskomponente in dieser Richtung existieren, so daß die *resultierende* Beschleunigung sicher nicht mehr in die Bahnrichtung fällt.

Der Erfolg einer solchen Beschleunigungskomponente normal zur Bahnrichtung ist der, daß der Punkt aus seiner geradlinigen Bahn abweicht. Umgekehrt, wenn sich ein Punkt nicht geradlinig bewegt, muß er eine Beschleunigungskomponente normal zur Bahnrichtung besitzen.

6. Als Einheit der Geschwindigkeit wählt man in der Physik (vgl. Bd. I, § 29 der 1[ten], § 32 der 2[ten] Aufl.) gewöhnlich die Geschwindigkeit eines Punktes, der in der Zeiteinheit, einer Sekunde, die Wegeinheit, ein Zentimeter, zurücklegt. Diese Geschwindigkeit nennen wir $1\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, in Worten: ein Zentimeter pro Sekunde, oder durch Sekunde, entsprechend der Gleichung:

$$v = \frac{(s_2 - s_1)\,\text{cm}}{(t_2 - t_1)\,\text{sec}} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$

Die neue Einheit der Geschwindigkeit durch diesen Quotienten cm/sec zu bezeichnen, ist rechnerisch praktisch, da wir beim Übergang aus einem Einheitssystem zum anderen die Gesetze der Division befolgen können. Wollen wir z. B. die Zeit statt in Sekunden in Minuten messen, die Geschwindigkeit also durch den in einer Minute zurückgelegten Weg, so können wir einfach in der Gleichung

$$v = a\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

für sec den Wert $\frac{1}{60}$ min einsetzen. Dann folgt

$$v = a\,\frac{\text{cm}}{\frac{\text{min}}{60}}$$

und nach den Divisionsgesetzen

$$v = 60\,a\,\frac{\text{cm}}{\text{min}}.$$

In der Tat legt ein Körper in einer Minute — bei konstanter Geschwindigkeit natürlich — den 60fachen Weg zurück, wie in einer Sekunde.

Die Geschwindigkeit ist eine Länge, dividiert durch eine Zeit, was wir dadurch kennzeichnen, daß wir der Geschwindigkeit die „Dimensionen“ „Länge durch Zeit“ zuschreiben, indem wir den Begriff der „Dimensionen“ aus der Geometrie erweitern.

Um die Dimensionen einer Größe in mathematischer Form durch eine Gleichung ausdrücken zu können, setzt man die betreffenden in der Gleichung vorkommenden Buchstaben in eckige Klammern. Die Gleichung

$$[v] = \frac{[l]}{[t]}$$

sagt also nur aus: Die Dimensionen von v sind gleich der Dimension von l, dividiert durch die Dimension von t, oder „v hat die Dimension Länge durch Zeit“. Über Zahlenwerte sagt diese Gleichung nichts aus.

7. Die Einheit der Beschleunigung besitzt weiterhin der Körper, dessen Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die Geschwindigkeitseinheit, also um $1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ zunimmt. Die Beschleunigungseinheit ist also entsprechend Gleichung (3)

$$\frac{1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}}{1 \text{ sec}} = 1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Die Dimensionen der Beschleunigung sind „Länge durch Zeit im Quadrat“

$$[p] = \frac{[l]}{[t]^2}.$$

§ 16. Kraft.

1. In der Statik haben wir Kräfte dadurch zu vergleichen gelernt, daß wir sie durch geeignete mechanische Vorrichtungen dazu bringen, sich im Gleichgewicht zu halten, d. h. daß sie an verschiedenen Körpern, auf die sie wirken, keine Bewegung erzeugen. Diese Bewegung ist dabei relativ gegen die Kraftzentren zu verstehen. Dabei ist die Kenntnis der Kraftzentren nötig, eine Frage, die von Fall zu Fall auf dem Wege der Experimentalphysik untersucht werden muß.

Von zwei Kräften, K_1, K_2, können wir K_1 als n mal so groß wie K_2 bezeichnen, wenn wir die beiden Kräfte an zwei Hebelarmen a_1, a_2 eines zweiarmigen Hebels angreifen lassen können, der dann in Ruhe bleibt, wenn wir $a_1 = a_2/n$ machen. Ein derartiges Verfahren wird in der Physik oft angewandt, auch zum Vergleich

verschiedenartiger Kräfte. Zum Messen elektrischer Kräfte lassen wir z. B. auf eine Wagschale die Kräfte eines elektrisierten Körpers wirken, während wir auf die andere Wagschale so lange Gewichte aufsetzen, bis die anziehenden Kräfte der Erde den elektrischen Kräften das Gleichgewicht halten.

Dadurch haben wir ein quantitatives Maß für verschiedene Kräfte erhalten, bei dem wir noch willkürlich eine Einheit wählen können. Der qualitative Begriff der Kraft war uns dadurch gegeben, daß ein frei beweglicher, aber in Ruhe befindlicher Körper sich unter gewissen Umständen zu bewegen beginnt. Eben diese Tatsache definieren wir dadurch, daß wir erklären: Wenn sich ein Körper zu bewegen beginnt, so beginnt eine Kraft auf ihn zu wirken. Nur wenn keine Kraft oder mehrere sich gegenseitig aufhebende Kräfte auf ihn wirken, bleibt er in Ruhe.

2. Denken wir uns jetzt einen gleicharmigen Doppelhebel mit zwei gleichen Massenpunkten an seinen Enden, auf die die Erdanziehung wirkt. Dieser Hebel befindet sich in jeder möglichen Stellung im Gleichgewicht. Welche Lage gegen die Horizontale er auch haben möge, die Kräfte, die auf ihn wirken, werden sich immer aufheben. Wenn wir aber einem der Massenpunkte einen tangentialen Stoß versetzen, so wird der Hebel in Rotation geraten und die Rotation wird eine zeitlang andauern, auch wenn der Stoß aufgehört hat zu wirken. Er wird sich also weiter bewegen, obwohl im Sinne der Statik keine, oder doch nur sich aufhebende Kräfte auf ihn wirken. Daraus folgt: Die Bewegungslosigkeit ist zwar ein hinreichendes, aber nicht notwendiges Kriterium für die gegenseitige Aufhebung von Kräften.

3. In letzter Instanz hatten wir in der Statik eine Kraft dadurch erkennen gelernt, daß sie eine Bewegung einleitet. Nachdem die Existenz einer Kraft so festgestellt war, konnten wir andere Kräfte durch Gleichgewichtsgesetze mit ihr vergleichen.

Die Dynamik leitet den Begriff der Kraft und ihr Maß direkt aus der Bewegung ab. Dann muß auch aus der Bewegung die Gleichheit von Kräften zu konstatieren sein, und es zeigt sich, daß der daraus definierte Gleichheitsbegriff nicht im Widerspruch steht mit dem der Statik.

Das „Einsetzen“ einer Bewegung ist nur ein Spezialfall der „Änderung“ einer Bewegungsart, nämlich die Änderung der Geschwindigkeit Null. Wir definieren jetzt willkürlich zunächst qualitativ:

> Wenn ein Körper seine Geschwindigkeit ändert, so nehmen wir an, daß auf ihn eine Kraft wirkt.

Diese Definition enthält die der Statik zugrunde gelegte, und sie erklärt auch das in Abschnitt 2 angeführte Beispiel; denn es folgt aus ihr das sogenannte „Trägheitsprinzip“:

Ein Massenpunkt behält die Geschwindigkeit, die er einmal hat — also auch die Geschwindigkeit Null —, so lange bei, als keine Kräfte auf ihn wirken.

4. Dieses Gesetz hat einen Sinn nur als Ergänzungsgesetz zu anderen Gesetzen. Denn wenn auf einen Körper keine Kräfte wirken, so kann das nur dann eintreten, wenn sich der Massenpunkt allein im Weltenraume befindet. Ob er sich dann aber überhaupt bewegt, und wie er sich bewegt, ist durch kein Kriterium zu entscheiden. Es führt dies zu der schwierigen Frage: Gibt es eine absolute Bewegung?

Erst wenn ein zweiter Körper im Weltenraume vorhanden ist, der irgend welche Kräfte auf ihn ausübt, wird das Gesetz der Trägheit in Kraft treten. Die Bewegung des Massenpunktes wird sich dann so gestalten, als ob er erstens nach dem Trägheitsprinzip seine Bewegung beibehielte, zweitens die Kräfte diese Bewegung nach einem gleich zu besprechenden Gesetz beeinflussen. Diese Kräfte können sich, wie bei dem erwähnten Doppelhebel, kompensieren. Die Rotation des Hebels wird dann in alle Ewigkeit fortdauern. Daß sie praktisch wirklich aufhört, erklären wir durch gewisse sogenannte „Reibungskräfte“, die wir aber hier außer acht lassen wollen. Tatsache ist, daß durch diese Festsetzung die Bewegung eines Körpers so beschrieben wird, wie sie sich experimentell erweist.

5. Das quantitative Gesetz, das wir dem Begriffe der Kraft zugrunde legen, ist das folgende:

Eine auf einen Massenpunkt wirkende Kraft ruft eine Beschleunigung hervor, die der Kraft proportional ist und die Richtung der Kraft besitzt.

Die nach diesem Gesetz erfolgende Bewegung addiert sich zu der nach dem Trägheitsprinzip erfolgenden nach dem Gesetze der Vektoraddition.

Wir können das Gesetz mathematisch so ausdrücken:

$$K = ap,$$

worin a ein Proportionalitätsfaktor ist, der sich für ein und denselben Massenpunkt nicht ändert, K die Kraft und p die Beschleunigung bedeutet.

Es würde hieraus folgen, daß zwei Kräfte, die auf den gleichen

Körper wirken, dann gleich sind, wenn jede für sich die gleiche Beschleunigung hervorruft. Richten wir es so ein, daß beide Beschleunigungen gleichzeitig, aber nach entgegengesetzten Richtungen auftreten, so resultiert die Beschleunigung Null, und der Körper bleibt in Ruhe, wenn er sich einmal in Ruhe befindet. Das war aber das Kriterium gleicher Kräfte in der Statik und das entspricht also dem der dynamisch definierten Kräfte.

6. Experimentell ergibt sich weiter: Nehmen wir den Massenpunkt aus demselben Material m mal so groß, so wird der Faktor a m mal so groß.

Es ist schon von vornherein plausibel, daß wir die doppelte Kraft aufwenden müssen, wenn wir einem doppelt so großen Körper die gleiche Beschleunigung erteilen wollen.

Wir können nun schreiben

$$K = c \cdot m \cdot p,$$

wo c eine andere Konstante bedeutet, die wir so wählen, daß $m = 1$ wird, wenn der Massenpunkt 1 ccm Wasser von der Temperatur 4^0 C. ist. Daß wir hier die Temperatur angeben müssen, erklärt sich dadurch, weil sich im mechanischen Sinne das Material mit der Temperatur ändert. 4^0 C. werden gewählt, weil bei dieser Temperatur die gleiche Wassermenge den kleinsten Raum einnimmt. m heißt die Masse unseres Massenpunktes.

Nehmen wir statt Wasser von 4^0 ein anderes Material, so wird auch für dieses eine ähnliche Gleichung gelten:

$$K = c_1 \cdot \mu \cdot p,$$

wo μ mit dem Volumen proportional ist, c_1 von der Materie abhängt.

Wenn wir dieses Volumen nun stetig verändern, so wird sich die Kraft K, die die Beschleunigung p hervorruft, ebenfalls stetig ändern, und wir können ein $\mu = \mu_0$ finden, bei dem zu demselben p dasselbe K erforderlich ist, wie bei 1 ccm Wasser von 4^0. Dann ist

$$K = c \cdot 1 \cdot p,$$
$$K = c_1 \cdot \mu_0 \cdot p,$$

also

$$c_1 \cdot \mu_0 = c.$$

μ_0 vertritt wieder die Stelle der „Masse", und wir sind berechtigt, $\mu_0 = 1$ zu setzen. Nach dieser Festsetzung wird $c_1 = c$, also eine „universelle Konstante", d. h. eine Konstante, die von der Masse unabhängig ist. Wir haben damit die Festsetzung getroffen:

Bei beliebigem Material nennen wir die Masse gleich 1, die zur

gleichen Beschleunigung die gleiche Kraft erfordert, wie 1 ccm Wasser von 4°. Diese Masse 1 nennen wir 1 Gramm (1 gr). Nach dieser Festsetzung gilt für beliebiges Material die Gleichung

$$K = cmp. \tag{5}$$

Oder in Worten:

Die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft ist proportional mit der Beschleunigung, die sie dem Massenpunkte erteilt, proportional mit der Masse dieses Massenpunktes, und ist mit der Beschleunigung gleichgerichtet.

7. Indem wir den Faktor m für 1 ccm Wasser gleich 1 gr gesetzt haben, haben wir für die Masse eine Einheit gewählt. Der Faktor c bedeutet dann laut Gleichung (5) die Kraft, die der Masse 1 gr die Beschleunigung 1 cm/sec² erteilt. Es steht uns frei, diese Kraft als die Krafteinheit aufzufassen. Dann wird $c = 1$ und wir können über die Dimensionen von c ebenfalls noch frei verfügen. Wir fassen c als dimensionslose Zahl auf. Dann folgt aus (5)

$$K = mp \frac{\text{gr cm}}{\text{sec}^2}$$

und

$$[K] = \frac{[m][l]}{[t]^2} = [m][l][t]^{-2},$$

wenn wir unter $[m]$ die Dimension der Masse verstehen. Die Einheit der Kraft heißt kurz 1 Dyne (vom griechischen δύναμις = Kraft), und es ist

$$1 \text{ dyn} = 1 \frac{\text{gr cm}}{\text{sec}^2}.$$

8. Daß die Kraft eine Vektorgröße ist, folgt nach unseren Ableitungen von selber. Die Multiplikation eines Vektors, der Beschleunigung, mit einer skalaren[1]) Größe, der Masse, kann die Eigenschaften des Vektors nicht beeinflussen. In der Tat hatten wir schon in der Statik erkannt, daß man Kräfte nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzen, d. h. also, daß wir die Gesetze der Vektoraddition auf sie anwenden können (§ 10).

1) Unter einer skalaren Größe verstehen wir eine im Raume variable „Ortsfunktion“, die an jedem Punkte des Raumes durch eine einzige Zahlenangabe gegeben ist, und nicht, wie ein Vektor, noch die Angabe einer Richtung erforderlich macht. Ein Vektor mit einer solchen skalaren Größe multipliziert, kann nur an jedem Punkte seinen Betrag, nicht seine Richtung ändern. Ein Beispiel einer skalaren Größe ist die Temperaturverteilung in einem Raume.

§ 17. **Anwendungen.**

A. Der freie Fall.

1. Als empirisch gewonnenes Gesetz legen wir unseren folgenden Ausführungen die Tatsache zugrunde, daß jeder Körper, in erreichbarem Abstande von der Erde losgelassen, eine gleichförmige Beschleunigung

$$g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

durch die Erde und normal gegen deren Oberfläche erhält.[1])

Nach diesem Gesetz ist die Kraft, die die Erde auf einen Körper von der Masse m ausübt,

$$G = gm.$$

Diese Kraft heißt „das Gewicht" des Körpers, wobei aber gewöhnlich eine andere, als die nach vorigem Paragraphen definierte Einheit zugrunde gelegt wird. In der Technik definiert man als Gewichtseinheit die von der Erde auf die Masse ein Gramm ausgeübte Kraft. Danach ist

$$g \text{ dynen} = g \frac{\text{gr cm}}{\text{sec}^2} = 1 \text{ Gr},$$

wenn wir mit 1 Gr, in Worten „Ein Grammgewicht", diese Einheit bezeichnen.

2. Um die Bewegung des fallenden Körpers zu analysieren, ist es, wie aus 1. folgt, nicht erforderlich, die Kraft zu kennen. Die Bewegung ist durch die Beschleunigung gegeben, und hier also von der Masse unabhängig. Die gleichmäßige Beschleunigung von der Größe g sagt aus, die Geschwindigkeit wächst proportional der Zeit und in der Sekunde um den Zahlwert von g. Von dem Moment des Loslassens unseres Körpers an gerechnet, muß also nach Ablauf der Zeit t der Körper die Geschwindigkeit

$$v = gt \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

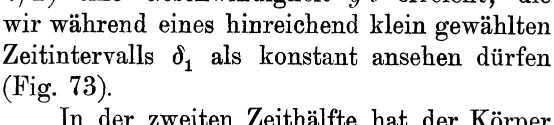
besitzen.

---

1) Dieses Gesetz gilt für einen im luftleeren Raume fallenden Körper. Das Gesetz der Fallbewegung ist für alle Körper das gleiche, also auch die Geschwindigkeit, die sie in gleichen Zeiten erlangen. Im lufterfüllten Raume erfahren die Gesetze eine Abänderung infolge der sog. Reibung, die den leichteren Körper langsamer fallen läßt, als den schwereren. Näher wollen wir hier auf die Reibungsprobleme nicht eingehen (vgl. § 18).

3. Um den in diesen t sec zurückgelegten Weg, die „Fallhöhe", zu ermitteln, denken wir uns den Zeitraum t durch einen Zeitpunkt in zwei gleiche Teile $t/2$ geteilt.

Innerhalb der ersten Zeithälfte hat der Körper nach Ablauf eines Zeitraumes τ (also $\tau < t/2$) eine Geschwindigkeit $g\tau$ erreicht, die wir während eines hinreichend klein gewählten Zeitintervalls δ_1 als konstant ansehen dürfen (Fig. 73).



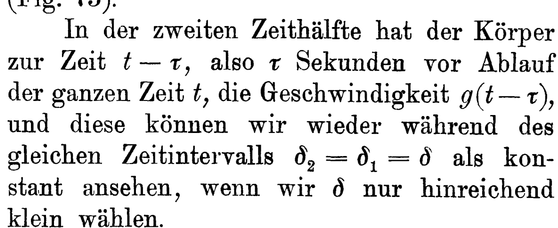


Fig. 73.

In der zweiten Zeithälfte hat der Körper zur Zeit $t - \tau$, also τ Sekunden vor Ablauf der ganzen Zeit t, die Geschwindigkeit $g(t-\tau)$, und diese können wir wieder während des gleichen Zeitintervalls $\delta_2 = \delta_1 = \delta$ als konstant ansehen, wenn wir δ nur hinreichend klein wählen.

Innerhalb der beiden Zeitintervalle $\delta_1 + \delta_2$ legt der Körper einen Weg zurück, der ebenso groß sein muß, als ob er während eines Zeitintervalls δ die Summe der Geschwindigkeiten besessen hätte, denn es ist dieser Weg

$$g\tau\,\delta_1 + g(t-\tau)\delta_2 = \{g\tau + g(t-\tau)\}\,\delta_1.$$

Die Summe dieser beiden Geschwindigkeiten ist aber

$$v = g\,t,$$

also unabhängig von τ.

Es läßt sich so zu jedem Zeitelement δ_1 der ersten Hälfte ein gleichgroßes δ_2 der zweiten finden, so beschaffen, daß die Bewegung innerhalb dieser beiden δ identisch der Bewegung mit der Geschwindigkeit $g\,t$ während eines einzigen, δ_1, ist. Diese Geschwindigkeit wäre also über die sämtlichen δ_1 konstant und der in der ganzen ersten Zeithälfte zurückgelegte Weg wäre somit

$$s = g\,t \sum \delta_1,$$

und da $\sum \delta_1 = \frac{t}{2}$ ist,

$$s = \frac{g\,t^2}{2}.$$

Dies ist also auch der von dem Körper in Wirklichkeit bei einer variablen Geschwindigkeit $v = gt$ in der Zeit t zurückgelegte Weg.

B. Die schiefe Ebene.

4. Die reibungslose Bewegung eines Körpers auf einer schief gegen die Erdoberfläche gerichteten Ebene lehrt uns ein neues Gesetz kennen, das mit den in § 15, 5. angestellten Betrachtungen in logischem Zusammenhange steht, indem es die vektorielle Zerlegung der Beschleunigung nach beliebigen Richtungen praktisch verwertbar macht. Das Gesetz besagt:

Eine materielle Unterlage unter einem Körper, auf den eine Kraft wirkt, kompensiert die zu der Unterlage normale Kraftkomponente.

Es ist dies nichts anderes als das Gesetz der „Actio et Reactio", das eine Unterlage durch eine Kraft ersetzt, die gleich der von dem Körper auf sie ausgeübten Druckkraft, aber von entgegengesetzter Richtung ist. Durch dieses Gesetz können wir eine „zwangsweise" Bewegung, die an eine materielle Bahn gebunden ist, durch eine freie Bewegung ersetzen, indem wir in jedem Moment der Bewegung eine gewisse Kraft vektoriell hinzufügen.

5. Die Normalkomponente der Kraft zu der schiefen Ebene ist nach Figur 74

$$mg \cos \alpha.$$

Sie wird durch die schiefe Ebene kompensiert und es bleibt als wirkende Kraft nur noch die tangentiale Komponente

$$mg \sin \alpha$$

übrig, die dem Körper eine Beschleunigung

$$g \sin \alpha$$

erteilt, konstant während der ganzen Bewegung, ebenso wie beim freien Fall. Das Problem der Bewegung auf der schiefen Ebene läßt sich also auf das des freien Falles zurückführen, wenn wir g durch $g \sin \alpha$ ersetzen.

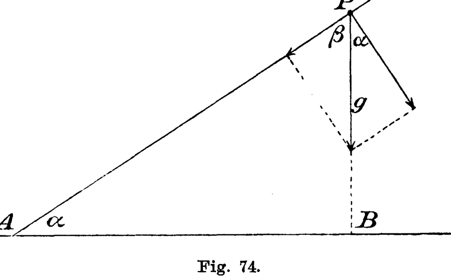


Fig. 74.

Daraus folgt: Die Geschwindigkeit des Körpers nach Ablauf der Zeit t von Beginn der Bewegung an ist

$$v = g \sin \alpha \cdot t,$$

der in dieser Zeit t zurückgelegte Weg

$$s = \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2}.$$

6. Ist $l = PA$ der Weg, den der Punkt von Beginn der Bewegung an bis zu dem Moment, wo er die Erde berührt, zurücklegt, so folgt aus der letzten Gleichung, daß er zu diesem Wege die Zeit

$$t_0 = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$$

braucht. Die Geschwindigkeit, die der Punkt in dieser Zeit erreicht, d. h. die Geschwindigkeit, mit der er unten ankommt, ist somit:

$$v_0 = \sqrt{2lg \sin \alpha}.$$

Wäre der Punkt P direkt heruntergefallen, so hätte er den Weg PB zurückgelegt, und dazu nach den Gesetzen des freien Falles die Zeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot PB}{g}}$$

gebraucht. In dieser Zeit hätte er die Geschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2 PB \cdot g}$$

erlangt; und da $PB = l \sin \alpha$ ist, so wäre

$$v_1 = \sqrt{2lg \sin \alpha}.$$

Es folgt daraus: Bei der Bewegung auf der schiefen Ebene erreicht der Punkt die Erde mit der gleichen Geschwindigkeit, mit der er sie beim freien Fall aus gleicher Höhe erreichen würde, ein Gesetz, das auch aus der „Erhaltung der Energie" folgt, worauf wir später zu sprechen kommen.

C. Die Wurfbewegung.

7. Aus den Gesetzen des freien Falles können wir die Bewegung eines geschleuderten Körpers bestimmen, indem wir diese Bewegung aus zwei verschiedenen zusammengesetzt denken. Durch den Wurf in horizontaler Richtung würde der Körper, wenn die Schwere nicht wirkte, eine konstante Geschwindigkeit v_0 erhalten — Reibung in der Luft sei ausgeschlossen —, die ihn in der ersten Sekunde von A nach B (Fig. 75) befördert, in der zweiten nach C, in der dritten nach D und so fort. Wenn aber die Schwere wirkt, so wird der Körper gleichzeitig fallen und er wird allgemein in

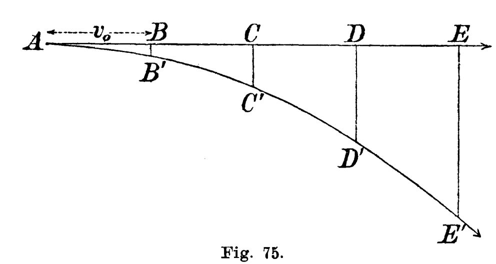


Fig. 75.

der Zeit t von der Geraden AE nach den Fallgesetzen vertikal nach unten um die Strecke $gt^2/2$ abgewichen sein, also in der ersten Sekunde um die Strecke $g/2$, die durch die Länge BB' dargestellt werde. Nach der zweiten Sekunde wird er von C um die Strecke $4g/2$, nach der dritten von D um die Strecke $9g/2$, nach der vierten Sekunde von E um die Strecke $16g/2$ u. s. f. entfernt sein. Der Weg, den der Körper also wirklich zurücklegt, ist die gekrümmte Linie $AB'C'D'E'$, eine Kurve, die sich als „Parabel" darstellt.

8. Die gleichen Betrachtungen können wir anstellen, wenn der Wurf nicht horizontal, sondern um einen Winkel α gegen die Horizontale geneigt erfolgt. Von der Geraden AE, in der sich der Körper ohne Einfluß der Schwere mit konstanter Geschwindigkeit v_0 bewegen würde, weicht er durch die Schwere in t Sekunden um den Weg $gt^2/2$ nach unten ab und beschreibt infolgedessen wieder eine gekrümmte Bahn $AB'C'D'E'$ (Fig. 76), die ebenfalls ein Stück einer Parabel ist.

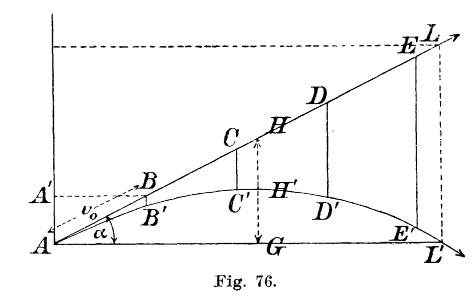


Fig. 76.

9. Analytisch ist der Beweis für die parabolische Bahn leicht zu erbringen. Bezeichnen wir den horizontalen Abstand des Körpers vom Anfangspunkte der Bahn (Fig. 76) in einem bestimmten Moment, also etwa AG, mit x, den vertikalen, also $H'G$, mit y, so wird

$$\begin{aligned} x &= AH \cdot \cos\alpha \\ &= v_0 t \cos\alpha; \\ y &= GH - HH' \\ &= v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Durch Elimination von t folgt hieraus eine Beziehung zwischen x und y der Form:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2\,v_0^{\,2}\cos^2\alpha} \cdot x^2,$$

welche sich (nach Bd. II, § 69) als die Gleichung einer Parabel erkennen läßt. Brennpunkt und Leitlinie sind hieraus durch Koordinatentransformation leicht zu ermitteln.

10. Der Körper bewegt sich bei positivem Winkel α anfangs nach oben und kehrt dann nach unten um. Die Geschwindigkeit v_0, mit der sich der Körper ohne Wirkung der Schwere längs AE be-

wegen würde, besitzt nämlich eine Komponente AA' in Richtung der Normalen auf die Erde, die ihn so lange aufwärts treibt, so lange die ihm durch die Erde erteilte Geschwindigkeit nach unten $v = gt$ noch kleiner ist als AA'. Diese „Normalkomponente" hat die Größe

$$v_0 \sin \alpha .$$

Der Höhepunkt ist also erreicht in dem Momente t, wo $v = v_0 \sin \alpha$ geworden ist, also wenn

$$g t_0 = v_0 \sin \alpha$$

ist, d. h. die „Wurfhöhe" H' ist erreicht zur Zeit

$$t_0 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} .$$

Die Wurfhöhe selber können wir folgendermaßen ermitteln: In der Zeit t_0 würde der Körper ohne Einfluß der Schwere einen Punkt H erreichen, der gegeben ist durch den in der Zeit t_0 zurückgelegten Weg

$$AH = v_0 t_0 = \frac{v_0{}^2 \sin \alpha}{g} .$$

Er hätte jetzt über dem Erdboden die Höhe

$$HG = AH \cdot \sin \alpha = \frac{v_0{}^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

erlangt, und von dieser Höhe geht der Weg ab, den er nach den Fallgesetzen in der Zeit t_0 nach unten zurückgelegt hat, d. h. der Weg

$$HH' = \frac{g t_0{}^2}{2} = \frac{v_0{}^2 \sin^2 \alpha}{2g} .$$

Somit ist die Wurfhöhe

$$H'G = \frac{v_0{}^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0{}^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0{}^2 \sin^2 \alpha}{2g} .$$

11. In ähnlicher Weise läßt sich auch die Wurfweite ermitteln. Denken wir uns den Körper vom Erdboden aus geschleudert, so ist die Wurfweite dann erreicht, wenn er wieder den Erdboden berührt. In der Zeit t_1, die er hierzu braucht, würde er ohne Einwirkung der Schwere um die Höhe

$$LL' = v_0 t_1 \sin \alpha$$

gehoben sein. Durch Einwirkung der Schwere muß er in dieser Zeit t_1 um das gleiche Stück LL' gefallen sein. D. h. es muß sein:

$$LL' = \frac{g t_1{}^2}{2} ,$$

also:

$$v_0 t_1 \sin \alpha = \frac{g t_1^2}{2}.$$

Diese Gleichung liefert uns zwei Werte t_1, in denen beiden der Körper den Erdboden berührt. Der eine Wert ist $t_1 = 0$. Er gehört dem Anfang A der Bewegung an. Der zweite Wert ist

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g},$$

und dies ist die Zeit, nach der der Körper zum zweiten Male, also bei L' den Boden erreicht, die „Wurfdauer". Aus diesem Werte von t_1 ergibt sich die Länge

$$AL = \frac{2 v_0^2 \sin \alpha}{g}$$

und hieraus geometrisch die Länge AL', d. h. die Wurfweite l:

$$l = AL \cos \alpha = \frac{2 v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha,$$

oder, da $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$,

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Noch einfacher lassen sich die Ergebnisse der zwei letzten Abschnitte analytisch unter Zugrundelegung von Nr. 9. ermitteln.

12. Aus letzter Gleichung läßt sich umgekehrt der zu einer bestimmten Wurfweite l gehörige „Elevationswinkel" α berechnen. Es ist

$$\sin 2\alpha = \frac{l g}{v_0^2}.$$

Da ein Winkel durch seinen Sinus zweideutig bestimmt ist, so ergeben sich zwei Werte von 2α, von denen der eine um ebensoviel größer ist als 90^0, wie der andere kleiner. α selbst liegt also beide Male zwischen 0^0 und 90^0.

Eine bestimmte Wurfweite kann daher mit zwei verschiedenen Elevationswinkeln α erreicht werden, von denen der eine um ebensoviel größer ist als 45^0, wie der andere kleiner.

Der $\sin 2\alpha$ erhält seinen größten Wert, nämlich den Wert 1, wenn $2\alpha = 90^0$, also $\alpha = 45^0$ ist. Bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit wird somit die Wurfweite am größten, gleich l_0, wenn der Elevationswinkel 45^0 beträgt. Es ist dann

$$l_0 = \frac{v_0^2}{g},$$

und es werden beide Werte von α einander gleich.

13. Lassen wir den Winkel α gleich 90^0 werden, so geht der schiefe Wurf in den vertikal nach oben gerichteten Wurf über. Es ergibt sich jetzt von selbst die Wurfhöhe

$$H'G = \frac{v_0^2}{2g},$$

während die Wurfweite selbstverständlich gleich 0 wird, da $\cos 90^0 = 0$ ist. Das Problem des vertikalen Wurfes läßt sich also so auffassen, als ob sich der geschleuderte Körper mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 aufwärts bewegt und von dieser Geschwindigkeit in jedem Moment die durch die Erdanziehung erlangte konstant wachsende Geschwindigkeit verliert. Wenn die letztere gleich der Geschwindigkeit v_0 geworden ist, dann ist der Höhepunkt der Bewegung erreicht, und von jetzt an beginnt der Körper einfach nach den Gesetzen des freien Falles seine Abwärtsbewegung.

D. Das Pendel.

14. Das in Nr. 4 dieses Paragraphen aufgestellte Prinzip ermöglicht es uns, die Bewegung eines schwingenden mathematischen Pendels, d. h. eines an einem gewichtlosen Faden befestigten Massenpunktes zu bestimmen. Bevor wir das eigentliche Problem beginnen, wollen wir eine Betrachtung anstellen, die uns bei der Lösung von Nutzen sein wird.

Auf einem Kreise mit dem Radius a, der zunächst nichts mit der Kreisbahn des Pendels zu tun hat, bewege sich ein Punkt A mit konstanter Geschwindigkeit v' (Fig. 77). Vollendet der Punkt A einen ganzen Umlauf — d. h. den Weg $2a\pi$ — in der Zeit T, so ist seine Geschwindigkeit

$$v' = \frac{2a\pi}{T}.$$

Wir denken uns jetzt den Punkt A in jedem Moment auf einen Durchmesser BCB' projiziert, und wollen fragen, wie bewegt sich der Projektionspunkt P während der gleichförmigen Bewegung von A. Braucht A zur Zurücklegung eines kleinen Weges AA' — den wir uns so klein denken wollen, daß wir ihn als geradlinig ansehen können — die Zeit t, so ist

$$v' = \frac{AA'}{t}.$$

In dieser Zeit kommt P bis P' und P besitzt somit die Geschwindigkeit

$$v = \frac{PP'}{t}.$$

Nun ist

$$PP' = AE = AA' \sin \alpha,$$

und da

$$\sin \alpha = \frac{AP}{AC} = \frac{AP}{a}$$

und ferner

$$AA' = \frac{2a\pi}{T} t$$

ist, so folgt:

$$PP' = \frac{2a\pi}{T} \frac{AP}{a} t$$

und

(1) $\quad v = \frac{2a\pi}{T} \sin \alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot AP.$

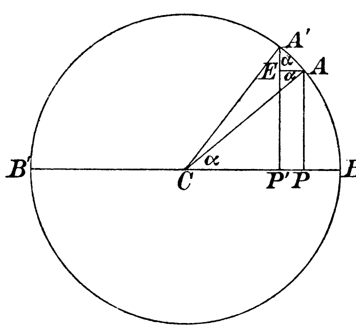


Fig. 77.

Die Geschwindigkeit von P ist also variabel. Sie ist gleich 0 an den Punkten B und B', da hier $AP = 0$ ist, und sie ist am größten im Zentrum. Hier ist $AP = a$, und es wird in diesem Moment $v = v'$ sein.

Um die Beschleunigung des Punktes P zu bestimmen, betrachten wir seine Geschwindigkeit in den Punkten P und P', in denen sie die Werte $v_1 = 2\pi/T \cdot AP$ und $v_2 = 2\pi/T \cdot A'P'$ annimmt. Durch Subtraktion dieser beiden Werte finden wir die Zunahme der Geschwindigkeit während der kleinen Zeit t

$$v_2 - v_1 = \frac{2\pi}{T}(A'P' - AP) = \frac{2\pi}{T} A'E.$$

Also ist die Beschleunigung

$$p = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{2\pi}{T} \frac{A'E}{t} = \frac{2\pi}{T} \frac{AA'}{t} \cos \alpha = \frac{2\pi}{T} v' \cos \alpha,$$

und wenn wir den Wert von v' einsetzen:

$$p = \frac{4\pi^2}{T^2} a \cos \alpha.$$

Nun ist $a \cos \alpha = CP$ der Abstand, den der Punkt P in jedem Moment vom Zentrum hat. Setzen wir diesen der Kürze halber gleich s, so folgt

$$p = \frac{4\pi^2}{T^2} s.$$

Es ist also die Beschleunigung in jedem Moment proportional dem Abstande des Punktes P vom Zentrum. Eine solche Bewegung, wie sie P ausführt, heißt eine „Schwingung“. T ist die Zeit, die der Punkt P zu einem einmaligen Hin- und Rückgange braucht; man nennt deshalb T die „Schwingungsdauer“.

15. Wir können hieraus folgenden Schluß ziehen: Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden hin und her unter dem Einflusse einer Kraft, die ihm in jedem Moment in der Richtung der Bewegung eine Beschleunigung erteilt, die proportional dem jeweiligen Abstande des Punktes von einem festen Zentrum ist, oder — in einer Gleichung ausgedrückt — ist

$$p = ks,$$

wo k eine Konstante ist, so steht der Proportionalitätsfaktor k zu der Schwingungsdauer in der Relation:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2},$$

oder es ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

16. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß auf den Massenpunkt eines mathematischen Pendels — wenigstens angenähert — eine solche Kraft wirkt.

Das Pendel, von der Länge $OP = l$ (Fig. 78), sei in einem betrachteten Moment um den Winkel α aus seiner Ruhelage erhoben. Auf den Punkt P wirkt die Erdanziehung mit einer Kraft mg. Diese Kraft können wir uns zerlegt denken in eine Komponente in der Bahnrichtung

$$PL = mg \sin \alpha$$

und eine zur Bahnrichtung senkrechte Komponente, die für die Bewegung aber verloren geht, da die Festigkeit des Fadens ihr entgegenwirkt. Die Komponente PL übt auf den Punkt P eine Beschleunigung aus

$$p = g \sin \alpha$$

oder

$$p = \frac{g}{l} \cdot C'P.$$

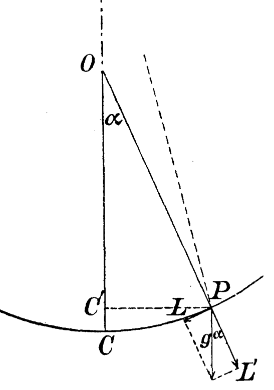


Fig. 78.

Der Punkt P entspricht jetzt dem auf dem Durchmesser des Hilfskreises sich bewegenden Fußpunkte P, der Durchmesser dieses Hilfskreises dem Wege, den der Pendelpunkt bei einem Hin- oder Rückgange beschreibt.

Nimmt nun der Winkel α überhaupt nur sehr kleine Werte an, d. h. wird das Pendel

nur sehr wenig aus seiner Ruhelage erhoben, so können wir $C'P$ durch die nahezu geradlinige Strecke $PC = s$ ersetzen (Bd. I, § 114 der 1ten, § 127 der 2ten Auflage) und erhalten

$$p = \frac{g}{l}\, s.$$

Es ist also hier die Konstante k gleich g/l und es ergibt sich die Schwingungsdauer des Pendels:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

woraus sich folgern läßt, daß die Schwingungsdauer unabhängig vom „Elevationswinkel", d. h. vom größten Ausschlage des Pendels ist. Diesen Winkel nennt man die „Amplitude" der „oszillatorischen" Bewegung.

Die Gleichung für die Schwingungsdauer T lautet, nach g aufgelöst:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

und sie wird in dieser Form praktisch dazu verwandt, die Gravitationskonstante g aus der Länge und Schwingungsdauer eines Pendels zu bestimmen.

Es folgt aus dieser Gleichung, daß die Schwingungsdauer eines Pendels um so kürzer ist, je kürzer das Pendel ist.

17. Unter einem Sekundenpendel versteht man ein Pendel, das in einer Sekunde eine halbe Schwingung, d. h. einen einmaligen Hin- oder Rückgang vollendet. Für ein solches muß also

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$l = \frac{g}{\pi^2}$$

sein. Die Gravitationskonstante g ist von der geographischen Breite abhängig. Sie beträgt in der Breite von Straßburg (48,58°) 9,8090, wenn die Länge in Metern gemessen wird. Daraus folgt die Länge des Sekundenpendels

$$l_1 = 0{,}99386 \text{ m}.$$

In Berlin (52,50°) ist

$$g = 9{,}8128,$$

$$l = 0{,}99424.$$

18. Die hier angestellten Betrachtungen gelten zunächst nur für ein sogenanntes „mathematisches" Pendel, bei dem ein Massenpunkt an einem gewichtlosen Faden aufgehängt ist. Ein solches läßt sich

nicht realisieren. Dem Experiment sind nur „physische“ Pendel zugänglich, bei denen eine Verteilung von Masse über einen endlichen Raum, die Pendelkugel und den Aufhängefaden, vorliegt. Wir haben hier streng genommen eine unendliche Zahl von Pendeln von allen denkbaren Längen, die ihre gegenseitige Schwingung beeinflussen. Die Schwingungsdauer des ganzen Systems fällt infolgedessen kleiner aus als die des längsten unter ihnen. Eine Vorrichtung, die es gestattet, die Länge des gleichschwingenden mathematischen Pendels zu ermitteln, ist das Reversionspendel, das wir bei späterer Gelegenheit besprechen werden.

19. Die Geschwindigkeit v_0, die der Pendelpunkt an seiner tiefsten Stelle besitzt, läßt sich leicht ermitteln, da sie gleich der Geschwindigkeit sein muß, die der auf dem Hilfskreise (Fig. 77) konstant rotierende Punkt hat (S. 103: $v = v'$). Dieser Kreis hat den Radius $l \sin \alpha$ (oder genähert $l\alpha$), also den Umfang $s = 2\pi l \sin \alpha$.

Zum Umlaufen dieses Kreises braucht der Punkt die Zeit $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, also ist

$$v_0 = \frac{s}{T} = \sqrt{lg} \sin \alpha.$$

Es ist aber (Fig. 78):

$$l \sin \alpha \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = CC' = h,$$

da $\sphericalangle CPC' = \alpha/2$, wenn CP die Sehne, nicht den Bogen bedeutet. Bei kleinen Ausschlägen ist angenähert $\operatorname{tang} \alpha/2 = \alpha/2 = 1/2 \sin \alpha$, also $\sin \alpha \operatorname{tang} \alpha/2 = 1/2 \sin^2 \alpha$, und es wird

$$v_0 = \sqrt{2hg}.$$

Der Pendelpunkt erreicht also die Geschwindigkeit, die er beim freien Fall aus gleicher Höhe auch erreichen würde. Nach dem Energieprinzip ist dies streng richtig.

§ 18. Reibungskräfte.

1. Den Begriff der Reibung haben wir bereits öfter zu erwähnen Gelegenheit gehabt. Wir können mit seiner Hilfe gewisse erfahrungsgemäße Abweichungen von den bisher gewonnenen Gesetzen erklären. So wird ein Körper, der statt im luftleeren Raume in der Luft, oder gar in einer Flüssigkeit fällt, keineswegs den Gesetzen des freien Falles genügen; er wird sich vor allem nach einer gewissen Zeit, die bei zähen Flüssigkeiten sehr bald erreicht ist, nicht mehr beschleunigt, sondern mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

2. Wir definieren: Die Reibungskräfte sind Kräfte, die erst auftreten, wenn sich der Körper bewegt, die wir also statisch niemals nachweisen können. Sie wirken der Bewegung immer entgegen, und sind um so größer, je größer die Geschwindigkeit ist.

Daraus folgt, daß der Körper durch die Beschleunigung nach Ablauf einer gewissen Zeit τ eine Geschwindigkeit von der Größe erreicht, daß die ihr entsprechende Reibungskraft von der „treibenden" Kraft nicht mehr merklich abweicht, und der Körper bewegt sich nun mit annähernd konstanter Geschwindigkeit weiter.

3. Die einfachste Annahme, die den Bedingungen 2. genügt, ist die, daß die Reibungskraft der Geschwindigkeit proportional ist. Dann geht die „Bewegungsgleichung" (5) in § 16 über in

$$K - bv = mp, \tag{1}$$

wenn K die treibende Kraft, v die Geschwindigkeit, m und p Masse und Beschleunigung bedeuten. b ist die „Reibungskonstante". Die Differenz der linken Seite ist im Sinne der Vektorenaddition zu verstehen. Nach Ablauf der Zeit τ wird

$$K = bv \tag{2}$$

geworden sein, also folgt:

Die Geschwindigkeit ist der Kraft proportional. Die Geschwindigkeit, und damit die Bahn, hat die Richtung der Kraft.

An diesem Ergebnis kann man die Berechtigung unserer Annahme der Proportionalität von Reibungskraft und Geschwindigkeit experimentell prüfen.

4. Wie groß die Zeit τ ist, ist außer von den Ansprüchen an die Genauigkeit (streng genommen ist $\tau = \infty$) von der Größe von b und m abhängig und b wieder ist von dem Körper und dem umgebenden Medium abhängig. Je größer b, um so rascher wird v die der Gleichung (2) genügende Geschwindigkeit erreicht haben. Je kleiner m bei gleichem K und b ist, um so größer wird die einem bestimmten Momente entsprechende Beschleunigung sein, also wieder um so rascher die der Gleichung (2) genügende Geschwindigkeit erreicht sein.

Bei sehr großem Werte b/m wird die Zeit τ gegen alle in Betracht kommenden Zeiten zu vernachlässigen sein. Dann heißt die Bewegung eine „Bewegung ohne Trägheit".

§ 19. Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment.

1. Bei den bisher betrachteten Bewegungen handelte es sich stets darum, wie sich ein starrer Körper unter dem Einflusse von Kräften bewegt, die auf ihn wirken, während jeder seiner Teile in gleicher Weise diesem Einflusse ausgesetzt ist, also den Kräften in Gesamtheit oder nur gewissen ihrer Komponenten folgen kann. Es hatte z. B. die schiefe Ebene einen Bewegungszwang ausgeübt, der allen Teilen des Körpers, der auf ihr gleitet, gleichmäßig zukam. Alle Teile unterlagen dem Einflusse der gleichen Kraftkomponenten und hatten in jedem Moment die gleiche Geschwindigkeit.

Beim Pendel hatten wir den bewegten Körper, als einen Massenpunkt aufgefaßt, der an einem gewichtlosen Faden hing. Fassen wir nun die Punkte des gewichtlosen Fadens als zum bewegten Körper gehörig auf, so sehen wir schon hier, daß die verschiedenen Punkte desselben Körpers verschiedenartige Bewegungen ausführen. Je näher ein Punkt des Pendels dem Drehpunkt gelegen ist, um so kleiner wird der Weg sein, den er von einem Ende seiner Bahn bis zum anderen zurücklegt; allgemein: um so kleiner wird der Weg sein, den er in ein und demselben Zeitabschnitte zurücklegt.

Konstant aber bleibt der Winkel, den der von dem betreffenden Punkte nach dem Drehpunkt hin gezogene Radiusvektor in einer bestimmten Zeit beschreibt. Das gilt nicht nur für ein mathematisches Pendel, sondern allgemein für einen beliebigen starren Körper, der um eine Drehachse beweglich ist, wie der Augenschein lehrt.

Ziehen wir von beliebigen Punkten eines um eine Achse drehbaren Körpers die Lote auf die Drehachse, so beschreiben diese Lote alle den gleichen Winkel in der gleichen Zeit, wenn sich der Körper bewegt.

2. Wir können nun ebenso, wie wir eine Geschwindigkeit und Beschleunigung definiert haben, auch eine Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung definieren. Ist φ_1 der Winkel, den das Lot zur Zeit t_1, von einer einmal festgelegten Richtung an gemessen, besitzt, φ_2 das Gleiche in einem um weniges späteren Zeitpunkt t_2, so ist die Winkelgeschwindigkeit:

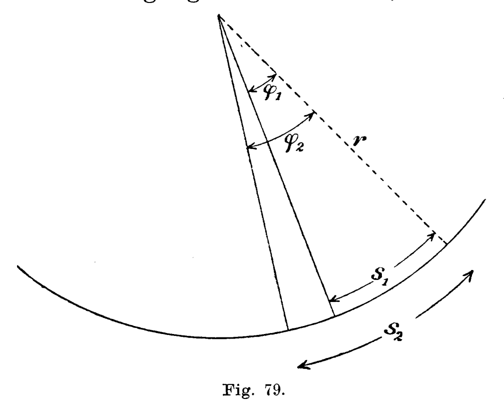


Fig. 79.

$$\varphi' = \operatorname*{Lim}_{t_2 = t_1} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}.$$

Sind φ_1', φ_2' die Winkel-

geschwindigkeiten in zwei Zeitpunkten t_1, t_2, so ist

$$\varphi'' = \operatorname*{Lim}_{t_2 = t_1} \frac{\varphi_2' - \varphi_1'}{t_2 - t_1}$$

die Winkelbeschleunigung des Körpers.

3. Es sei r das Lot, das wir von einem Punkte P unseres Körpers auf die Drehachse fällen. In dem Zeitraume t_1 habe der Punkt einen Weg s_1 und r einen Winkel φ_1 von einer gegebenen Nullage aus zurückgelegt. Dann ist

$$s_1 = r\varphi_1,$$

wenn wir φ in Bogenmaß messen. Ebenso ist zur Zeit t_2

$$s_2 = r\varphi_2.$$

Die Geschwindigkeit ist nach § 15, 2.

$$v = \operatorname*{Lim}_{t_2 = t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

also

$$v = r \cdot \operatorname{Lim} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = r\varphi';$$

ebenso wird die Beschleunigung in der Bahnrichtung

$$p = r\varphi''.$$

Daraus folgt:

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung in der Bahnrichtung eines Punktes erhält man durch Multiplikation von Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung mit dem Radiusvektor.

4. Wir denken uns jetzt wieder einen Apparat, ähnlich wie es unser mathematisches Pendel war. An einem starren gewichtlosen Faden DP sei eine Masse m_1 in beliebigem Abstande r_1 von D aus angebracht. Das ganze System sei um D drehbar und in P greife irgend eine Kraft an, in m_1 aber nicht. Die Erdanziehung auf m_1 möge durch irgend welche Vorrichtung als kompensiert angesehen werden, etwa dadurch, daß man die Drehachse normal zur Erde gelegen denkt. Die wirksame, also die in die Bahnrichtung des Punktes P fallende Komponente der Kraft heiße K_s (Fig. 80).

In der Statik haben wir gesehen, daß wir im Falle des Gleichgewichtes — nach den Hebelgesetzen § 7 — diese Kraft K_s durch eine in m_1 angreifende zu K_s parallele Kraft von der Größe

$$K_s \frac{r}{r_1}$$

ersetzen können.

Wir wollen es jetzt als experimentell erwiesene Tatsache ansehen, daß, auch wenn die Kräfte nicht im Gleichgewicht gehalten sind, diese Kräfte K_s in P und $K_s \frac{r}{r_1}$ in m_1 einander gleichwertig sind.

Es gilt dann die Bewegungsgleichung:

$$K_s \frac{r}{r_1} = m_1 p = m_1 r_1 \varphi'',$$

wenn $p = r_1 \varphi''$ die Beschleunigung bedeutet, die der Körper m_1 durch die Kraft erfährt. Also ist

$$K_s r = m_1 r_1^2 \varphi''.$$

5. Befindet sich starr mit dem System DP verbunden irgendwo ein zweiter Massenpunkt m_2 (Fig. 80), so muß ein Teil K_1 der Kraft K_s dazu verwandt werden, die Masse m_1, ein anderer K_2 die Masse m_2 in Bewegung zu setzen. Wie groß K_1 und K_2 sind, wissen wir vorerst nicht. Jedenfalls aber muß

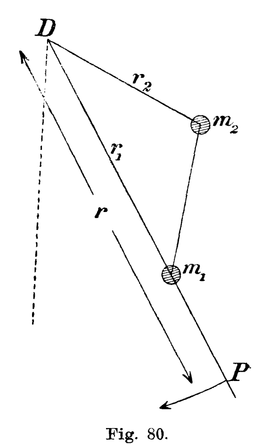


Fig. 80.

$$K_1 + K_2 = K_s$$

sein. Wir haben demnach

$$K_1 \frac{r}{r_1} = m_1 r_1 \varphi'';$$

$$K_2 \frac{r}{r_2} = m_2 r_2 \varphi'',$$

oder durch Addition nach Multiplikation mit r_1 resp. r_2:

$$K_s r = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\,\varphi''.$$

Entsprechend wird für mehr als zwei Massen $m_1, m_2, \ldots$

$$K_s r = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\,\varphi''.$$

Die linke Seite dieser Gleichung $K_s r = D$ haben wir in der Statik unter dem Namen „Drehungsmoment" kennen gelernt. Den Klammerausdruck der rechten Seite nennt man das „Trägheitsmoment" des drehbaren Systems bezüglich der Drehachse D. Wir wollen es mit R bezeichnen. Dann erhalten wir eine Bewegungsgleichung für drehbare Körper, die ähnlich der Kraftgleichung § 16, (5) gebaut ist:

$$D = R\varphi'';$$

in Worten:

Das Drehungsmoment ist gleich dem Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung

Das Drehungsmoment ersetzt hier die Kraft der zitierten Kraftgleichung, das Trägheitsmoment die Masse und die Winkelbeschleunigung die Beschleunigung.

§ 20. Zentrifugalkraft und Zentripetalbeschleunigung.

1. Wir haben beim Pendel gesehen, daß ein Teil der Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt, durch den Widerstand des Pendelfadens vernichtet wird. Er dient nur dazu, den Faden gespannt zu halten.

Etwas ähnliches findet ganz allgemein statt, wenn sich ein Körper zwangsweise auf einer gekrümmten Bahn bewegt. Infolge des Trägheitsprinzips sucht der Körper sich geradlinig zu bewegen, also nach außen von seiner Bahnrichtung abzuweichen. Eine scheinbare Kraft wird ihn daher gegen die Bahn pressen, zu der sich natürlich noch andere Kräfte vektoriell addieren können.

Diese Kraft, die sich lediglich aus der Trägheit erklärt, heißt die Zentrifugalkraft.

Anderseits können wir die den Bewegungszwang ausübende Kurve in der Idee oder auch in Wirklichkeit durch eine Kraft ersetzen, die jeweils gleich der Zentrifugalkraft und dieser entgegengesetzt ist. Sie heißt die Zentripetalkraft.

2. Es sei als Bahn ein Kreis vom Radius a vorgeschrieben. Ein Massenpunkt soll sich mit konstanter Geschwindigkeit v auf dieser Bahn bewegen. Welche Beschleunigung müssen wir dem Punkte jeweils erteilen, damit er die Kreisbahn nicht verläßt?

P sei der Massenpunkt. Wenn er sich selbst in einem Moment frei überlassen würde, würde er sich in gerader Linie tangential zum Kreise fortbewegen und nach Ablauf eines sehr klein zu denkenden Zeitteilchens Δt nach einem Orte P' kommen, der um die Strecke $PP' = v\Delta t$ von P entfernt ist. Um den Punkt auf dem Kreis zu erhalten, müssen wir ihn gleichzeitig gegen den Kreis hin verschieben. In dem Moment, wo er P passiert, hat er keine Geschwindigkeit in Richtung PC (Fig. 81). Wenn er aber weiterhin auf dem Kreis bleiben soll, muß er, z. B. wenn er nach P_1 kommt, in einer zu PC parallelen Richtung eine Geschwindigkeit erlangen. Die Geschwindigkeit parallel PC muß also von Null

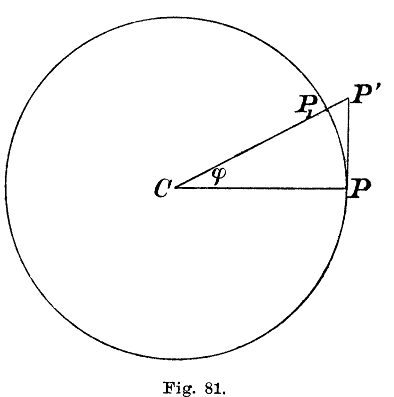


Fig. 81.

an wachsen. Wir müssen ihm eine „Beschleunigung“ in dieser Richtung erteilen, also in Richtung des Radiusvektors, die „Zentripetalbeschleunigung“. Diese Beschleunigung muß so groß sein, daß sie den Punkt nach P_1 führt. Wir können danach die wahre Bewegung auffassen, als ob sie sich zusammensetzte aus der geradlinigen Bewegung PP' nach dem Trägheitsgesetz, und einem gleichzeitigen Fall von P' nach P_1.

Ist φ der Winkel, um den sich in der Zeit Δt der Radiusvektor gedreht hat, so ist

$$P_1 P' = a\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) = a\,\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{2a\sin^2\frac{\varphi}{2}}{1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Nehmen wir Δt hinreichend klein, so wird φ so klein werden, daß wir den Sinus durch den Bogen ersetzen und im Nenner $2\sin^2\frac{\varphi}{2}$ gegen 1 vernachlässigen können. Es bleibt

$$P_1 P' = a\,\frac{\varphi^2}{2}$$

als Fallhöhe. Die zu berechnende Beschleunigung können wir jedenfalls über die kleine Strecke $P_1 P'$ hin als konstant ansehen, so daß wir die Gesetze des freien Falles hier anwenden können. Nach diesen Gesetzen ist (vgl. § 17, 3.)

$$P_1 P' = a\,\frac{\varphi^2}{2} = p\,\frac{\Delta t^2}{2},$$

wenn wir unter p die Zentripetalbeschleunigung verstehen, und somit ist

$$p = a\left(\frac{\varphi}{\Delta t}\right)^2 = a\varphi'^2,$$

wenn die Winkelgeschwindigkeit $\varphi/\Delta t$ mit φ' bezeichnet wird.

3. Da diese Beschleunigung normal zur Bahnrichtung steht, so kann sie die Geschwindigkeit in der Bahnrichtung nicht beeinflussen, die also konstant $(= v)$ bleibt. Die Zentripetalbeschleunigung ist somit nur von der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit, oder da

$$a\varphi' = v,$$

also

$$p = \frac{v^2}{a}$$

ist, nur von der jeweiligen Geschwindigkeit und dem Radius des Kreises abhängig.

4. Wenn die Geschwindigkeit v nicht konstant ist, so können wir uns in gleicher Weise die Bahnrichtung durch eine nach dem Mittelpunkt hin gerichtete Beschleunigung

$$p = \frac{v^2}{a},$$

worin aber v jetzt den jeweiligen Wert der Geschwindigkeit bedeutet, erhalten denken. Das geht deswegen, weil wir während des kleinen Zeitteilchens Δt die Geschwindigkeit in Bahnrichtung als konstant ansehen dürfen. Dieses p ist aber auch die einzige zur Bahnrichtung senkrechte Beschleunigungskomponente, die wir annehmen dürfen. Jede weitere Komponente würde ja den Körper aus der Bahn wieder herausführen.

In Richtung der Bahn wird der Körper eine weitere Beschleunigungskomponente besitzen, die sich berechnet als

$$p_s = \lim_{\Delta t = 0} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}.$$

Die Veränderlichkeit von v in der Bahnrichtung kann im allgemeinen von einer beliebig gerichteten Beschleunigung herrühren. Immer aber können wir sie ersetzen durch eine Komponente in der Bahnrichtung, p_s, und eine dazu normale Komponente, die Zentripetalbeschleunigung, von der Größe

$$p = \frac{v^2}{a}.$$

5. Ist die Bahn kein Kreis, sondern eine beliebige stetig gekrümmte Kurve, so gilt immer noch die gleiche Betrachtung, da wir ein kleines Stück PP_1 einer solchen Kurve als Kreisstück ansehen können, nämlich als Stück des „Krümmungskreises" (in Bd. II, § 81 für Kegelschnitte durchgeführt). Daher wird auch bei einer beliebig gekrümmten Bahn die Zentripetalbeschleunigung $p = v^2/a$ sein, aber a bedeutet jetzt den Krümmungsradius, und die Beschleunigung ist nach dem jeweiligen Krümmungsmittelpunkt hin gerichtet.

6. Die Kraft, die angewandt werden muß, um dem Massenpunkt von der Masse m diese Zentripetalbeschleunigung zu erteilen, heißt die Zentripetalkraft.

Ist eine solche Kraft in Wirklichkeit nicht vorhanden, sondern wird die Bahn durch einen Zwang, etwa durch eine gekrümmte Unterlage oder wie beim Pendel durch einen Faden, aufrecht erhalten, so übt der Massenpunkt auf diese Unterlage oder den Faden eine Kraft von der Größe der Zentripetalkraft, aber ihr entgegengesetzt aus. Diese Kraft heißt „Zentrifugalkraft". Von einer

Zentrifugalbeschleunigung kann man nur sprechen, wenn man sie relativ zum bewegten Körper auffaßt. Ein von einem rotierenden Körper durch die Zentrifugalkraft abgeschleuderter Massenpunkt wird sich, wenn keine anderen Kräfte auf ihn wirken, im Raume unbeschleunigt weiter bewegen. Denken wir uns aber ein im rotierenden Körper festes Koordinatensystem, das also mit ihm rotiert, so wird die Bewegung des abgeschleuderten Körpers in diesem Koordinatensystem eine ungleichförmig beschleunigte sein. Der Anfangswert der Beschleunigung kann als die Zentrifugalbeschleunigung aufgefaßt werden, die nach dem Gesetz von „Aktion und Reaktion“ (§ 21, 12.) durch die Zwangsvorrichtung gerade kompensiert wird, so daß eine Beschleunigung nicht eintritt.

7. Die Zentrifugalkraft spielt z. B. bei der Rotation der Erde eine Rolle. Es werden Körper am Äquator infolge der Rotation ein geringeres Gewicht haben, als an den Polen. Die Kraft, die die Erde auf einen Körper von der Masse m ausübt, ist am Äquator $g\,m = 978{,}1\,m$ dyn. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt 2π pro Tag, also

$$\varphi' = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{1}{\text{sec.}} = 0{,}0000727 \frac{1}{\text{sec.}}.$$

Der Erdradius am Äquator hat ungefähr die Größe

$$a = 637\,800\,000 \text{ cm}.$$

Die Kraft $g\,m$ setzt sich zusammen aus der eigentlichen Gravitation ($x\,m$ dyn) und der ihr entgegen gerichteten Zentrifugalkraft. Demnach ist die eigentliche Gravitation gegeben durch die Gleichung:

$$m\,g = m\,x - m\,\varphi'^2 a,$$

$$978{,}1 = x - \left(\frac{\pi}{12 \cdot 60 \cdot 60}\right)^2 \cdot 6378 \cdot 10^5.$$

Es ist $\varphi'^2 a = 3{,}373$, also

$$x = 981{,}5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2},$$

die der Erdanziehung allein zukommende Beschleunigung.

Interessant ist die folgende Frage:

Wievielmal schneller müßte sich die Erde drehen, als sie es wirklich tut, damit am Äquator die Schwere gerade durch die Zentrifugalkraft kompensiert wäre?

Es müßte sein:

$$m\,x = m\,a\,\psi'^2,$$

$$m \cdot 981{,}5 = m \cdot 6378 \cdot 10^5 \cdot (n\varphi')^2,$$

worin n die gesuchte Zahl bedeutet, also $\psi' = n\varphi'$ die gesuchte Rotationsgeschwindigkeit ist. Daraus folgt:

$$n = 17{,}06.$$

Würde sich also die Erde 17 mal so schnell drehen, als sie es tut, wäre ein Tag ein Siebzehntel unseres Tages, dann wäre am Äquator die Schwere gerade kompensiert.

§ 21. Die Keplerschen Gesetze und das Gesetz von der Massenanziehung.

1. Auf empirischem Wege hat Kepler[1]) für die Bewegung der Planeten um die Sonne die folgenden Gesetze gefunden.

1. Die Planetenbahnen sind ebene Kurven, und die von der Sonne nach den Planeten gezogenen radii vectores beschreiben Flächen, die der Zeit proportional sind.
2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich das Sonnenzentrum befindet.
3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Die Abweichung der Planetenbahnen von der geradlinigen Bahn erklären wir entsprechend früherem durch eine Beschleunigung, die die Planeten andauernd erfahren und wir wollen untersuchen, welche Gesetzmäßigkeit sich aus diesen drei Gesetzen für die Beschleunigung und die die Beschleunigung hervorrufende Kraft ergibt.

2. Richtung der Beschleunigung. Es sei (Fig. 82) S der Mittelpunkt der Sonne, P der Ort des Planeten in einem bestimmten Zeitmoment, sagen wir zur Zeit t. Nach Verlauf der Zeit Δt sei der Planet nach P_2 gelangt, und es sei Δt so klein angenommen, daß die Sehne $\overline{PP_2}$ von dem Bogen $\widehat{PP_2}$ nicht mehr zu unterscheiden ist (in Figur 83 ist ein Teil der Figur 82 etwas größer und deutlicher wiederholt). Es sei PP' die Tangente an die Bahn in Punkt P und PP_1P_2P' ein Parallelogramm.

1) Johannes Kepler (Keppler) ist am 27. Dez. 1571 zu Magstadt in Württemberg geboren und in Regensburg am 15. Nov. 1630 gestorben. Sein erster Schulunterricht war sehr mangelhaft, bis er die Klosterschule zu Adelberg, später die zu Maulbronn besuchte. In Tübingen gedachte er sich dem theologischen Studium zu widmen. Bei den Vorstudien erkannte er und sein Lehrer Mästlin sein Talent für Mathematik, der er sich, da er sich mit der Orthodoxie nicht befreunden konnte, dann ganz widmete. Er wurde 1594 Professor der Mathematik in Graz, später in Prag und in Linz. Kepler hat während seines ganzen Lebens mit Mißgeschick und Geldnot zu kämpfen gehabt.

3. Nach dem ersten Keplerschen Gesetz ist die Fläche des Dreiecks $SP_2P = c\varDelta t$, worin c eine zu dem betreffenden Planeten gehörige Konstante ist. Ebenso groß ist aber auch die Fläche des Dreiecks $SP'P$, weil beide die gemeinsame Grundlinie SP haben und die Verbindungslinie P_2P' ihrer Spitzen zur Grundlinie parallel ist. Diese Fläche ist aber auch gleich $\frac{1}{2}PP' \cdot h$, wenn h das von S auf die Bahntangente gefällte Perpendikel ist. Also ist

(1) $$h \cdot \overline{PP'} = \overline{SP} \cdot \overline{P_2R} = 2c\varDelta t.$$

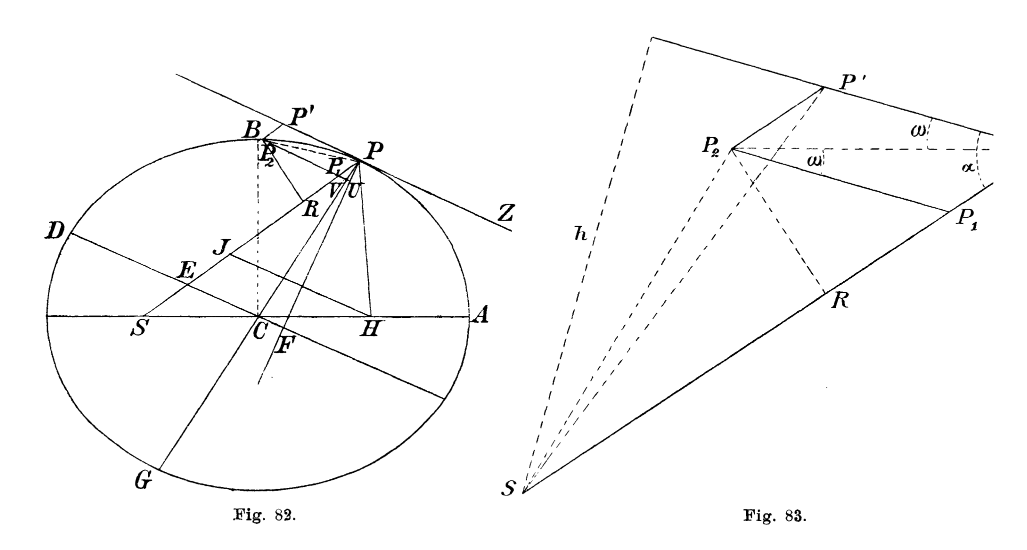


Fig. 82. Fig. 83.

4. Ist v die Geschwindigkeit, die der Planet im Punkt P wirklich hat, und v' die Geschwindigkeit, die er haben müßte, um in der Zeit $\varDelta t$ von P nach P' zu gelangen, so ist

(2) $$\overline{PP_2} = v\varDelta t, \quad \overline{PP'} = v'\varDelta t.$$

Ferner folgt aus dem Dreieck PP_2P' nach dem Sinussatze:

$$\overline{P'P_2} = \overline{PP'}\, \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha - \omega)},$$

und nach dem Kosinussatze:

$$\overline{PP_2} = \sqrt{\overline{PP'}^2 + \overline{P'P_2}^2 + 2\,\overline{PP'}\cdot\overline{P'P_2}\cos\alpha}$$

$$= \overline{PP'}\sqrt{1 + \frac{\sin^2\omega}{\sin^2(\alpha-\omega)} + \frac{2\sin\omega\cos\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}},$$

also nach (2):

(3) $$v = v'\sqrt{1 + \frac{\sin^2\omega}{\sin^2(\alpha-\omega)} + \frac{2\sin\omega\cos\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}}.$$

Wenn nun Δt unendlich klein wird, so wird ω unendlich klein, weil die Tangente die Grenzlage der Sehne ist, während α als der Winkel, den die Tangente mit dem Radiusvektor bildet, einen unveränderten Wert behält und daraus ergibt sich nach (3):

$$v = v', \tag{4}$$

d. h. es ist P' der Punkt, den der Planet P in der unendlich kleinen Zeit Δt erreichen würde, wenn er sich einfach nach dem Trägheitsgesetz bewegte.

Für die Konstante c ergibt sich aus (1) und (2):

$$c = \tfrac{1}{2} h v.$$

5. Die wahre Planetenbahn PP_2 läßt sich demnach an jedem Punkte während einer unendlich kleinen Zeit durch zwei Bewegungen ersetzen, nämlich:

1. Der Planet führt entsprechend seiner Trägheit eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit v aus.
2. Gleichzeitig fällt er von P nach P_1, d. h. auf die Sonne zu.

Also während der Zeit Δt erfährt er aus seiner geradlinigen Bahn gegen die Sonne hin eine Beschleunigung, die so groß ist, daß sie ihn in der Zeit Δt von P nach P_1 befördert.

I. Die Beschleunigung des Planeten ist gegen die Sonne hin gerichtet.

Diese Tatsache erklären wir dadurch, daß die Sonne auf den Planeten eine „anziehende Kraft" ausübt.

6. Größe der Beschleunigung eines Planeten.[1])

Stellen wir uns die Bewegung 2. des vorigen Abschnittes als freien Fall vor, so können wir sie nach den Gesetzen von § 17, A. behandeln. Die hier wirkende Beschleunigung können wir in jedem Moment als konstant ansehen, wenn wir sie nur eine unendlich kleine Zeit Δt hindurch wirkend denken. Es wird dann die Fallhöhe

$$PP_1 = \frac{p(\Delta t)^2}{2},$$

wo p die zu bestimmende Beschleunigung bedeutet. Also ist

$$p = 2\,\frac{PP_1}{(\Delta t)^2},$$

1) Ableitung nach Newton „Principia mathematica" 1. Buch, Abschnitt II. Deutsch von J. Ph. Wolfers.

und hieraus ergibt sich nach (1)

(5) $$p = \frac{8\,c^2 \overline{PP_1}}{\overline{P_2 R}^2} \cdot \frac{1}{\overline{SP}^2}.$$

7. Da der Inhalt der ganzen Ellipse mit den Halbachsen a und b

$$s = ab\pi \quad \text{(vgl. Bd. II, § 103)}$$

ist, so muß

(6) $$ab\pi = cT$$

sein, wenn wir unter T die ganze Umlaufszeit, d. h. die Zeit verstehen, die der Planet zum einmaligen Durchlaufen seiner Bahn braucht; denn der Radiusvektor beschreibt in der Zeit T die ganze Fläche der Ellipse.

8. Satz: Die Größe $\frac{PP_1}{(P_2R)^2}$ (vgl. Gl. 5) ist eine Konstante der betreffenden Ellipse.

Beweis (vgl. Fig. 84):

Es sei $DC \parallel PP'$. Dann sind DC und CP konjugierte Halbmesser der Ellipse (vgl. Bd. II, § 80, 3.).

Ferner sei $HJ \parallel DC$, wenn H den zweiten Brennpunkt der Ellipse bedeutet. Dann folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SJH und SEC

(7) $$JE = ES.$$

Da

$$\sphericalangle HJP = \sphericalangle JPP',$$
$$\sphericalangle JHP = \sphericalangle HPZ$$

und

$$\sphericalangle HPZ = \sphericalangle JPP' \quad \text{(vgl. Bd. II, § 78, 7.)},$$

ist, so ist

$$\sphericalangle HJP = \sphericalangle JHP,$$

also ist HJP ein gleichschenkliges Dreieck und folglich

(8) $$PJ = HP.$$

Aus (7) und (8) folgt weiter:

$$EP = EJ + JP = SE + HP$$
$$= \frac{1}{2}(SP + PH),$$

und wegen der Definition der Ellipse (Bd. II, § 66) ist also

(9) $$EP = AC.$$

Es ist

$$\frac{P_1P}{PV} = \frac{EP}{PC} = \frac{AC}{PC},$$

also

$$\frac{P_1 P}{GV \cdot PV} = \frac{AC}{GV \cdot PC}.$$

Nun ist aber (nach Bd. II, § 80, 2. (4) (unser Punkt V entspricht dort dem Punkt P, der auf die y-Achse gerückt zu denken ist))

$$\frac{GV \cdot PV}{\overline{P_2 V}^2} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{CD}^2},$$

also

(10) $$\frac{P_1 P}{\overline{P_2 V}^2} = \frac{AC \cdot PC}{GV \cdot \overline{CD}^2}.$$

Statt $P_2 V$ können wir $P_2 P_1$ setzen, denn

(11) $$P_2 V = P_2 P_1 \pm P_1 V$$

($\pm$ je nachdem P oberhalb oder unterhalb von AC liegt),

$$P_1 V = P_1 P \cdot \frac{\sin P_1 PV}{\sin P_1 VP}$$

nach dem Sinussatz. Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes:

$$P_1 V = PP_2 \cdot \sin P_1 P_2 P \cdot \frac{\sin P_1 PV}{\sin P_1 VP \cdot \sin P_2 P_1 P}$$

$$= PP_2 \cdot \sin P_1 P_2 P \cdot \frac{\sin P_1 PV}{\sin P_1 VP \cdot \sin VP_1 P}.$$

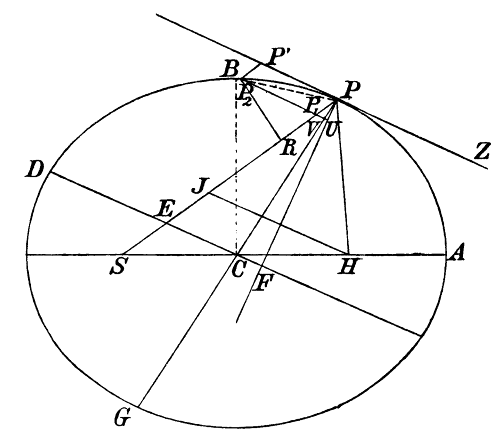


Fig. 84.

Die beiden im Nenner stehenden Sinus können niemals — d. h. für keine Lage von P auf der Ellipse — gleich Null werden, außer wenn die Ellipse zur geraden Linie degeneriert; denn sie sind die Sinus der Winkel, die die Tangente in P mit den nach dem Mittelpunkt und dem Brennpunkt der Ellipse gezogenen Leitstrahlen bildet.

Lassen wir nun P_2 an P_1 unendlich nahe heranrücken, so wird $P_2 V$ und $P_2 P$ unendlich klein, $\sin(P_1 P_2 P)$ ebenfalls unendlich klein, also auch $P_1 V / PP_2$ unendlich klein. Nach (2) und (4) ist aber

$$\frac{PP_2}{PP'} = \frac{PP_2}{P_1 P_2} = 1,$$

und folglich ist auch P_1V/P_1P_2 unendlich klein. Demnach folgt aus (11)

$$\frac{P_2V}{P_1P_2} = 1.$$

Also wird aus (10)

$$\frac{P_1P}{P_2P_1{}^2} = \frac{AC \cdot PC}{GV \cdot CD^2}.$$

Ferner ist, da RP_2P_1 und FPE ähnliche Dreiecke sind ($FP \perp PP'$),

$$(P_2P_1)^2 : (P_2R)^2 = (EP)^2 : (FP)^2 = (AC)^2 : (FP)^2,$$

und da nun umgeschriebene Parallelogramme flächengleich sind (vgl. Bd. II, § 80, 4.)

$$AC \cdot CB = PF \cdot DC,$$

also

$$\frac{(P_2P_1)^2}{(P_2R)^2} = \frac{(DC)^2}{(CB)^2}.$$

Dadurch wird

$$\frac{P_1P}{P_2R^2} = \frac{AC \cdot PC}{GV \cdot CB^2}.$$

Wenn P_2 an P_1 unendlich nahe heran rückt, wird bis auf unendlich kleine Glieder

$$GV = 2 \cdot PC,$$

und setzen wir die beiden halben Achsen der Ellipse gleich a und b ein, so folgt:

$$\frac{P_1P}{P_2R^2} = \frac{a}{2b^2},$$

also gleich einer Konstanten für die Ellipse.

9. Es geht dadurch die Gleichung (5) für die Beschleunigung des Planeten, wenn wir den Radiusvektor SP mit r bezeichnen, über in

$$p = 4\frac{c^2a}{b^2}\frac{1}{r^2}$$

oder wegen Gleichung (6) in

$$p = 4\pi^2\frac{a^3}{T^2}\frac{1}{r^2}.$$

10. Dieses Gesetz, das wir in die Form schreiben können

$$p = C^2 \cdot \frac{1}{r^2}, \tag{12}$$

gilt zunächst für einen Planeten. C ist eine Konstante für die Bahn dieses Planeten und abhängig von deren großer Halbachse und der Umlaufszeit. Von vornherein müssen wir annehmen, daß C^2 für jeden anderen Planeten einen anderen Wert annimmt. Im übrigen aber wird Gleichung (12) für jeden Planeten gelten.

Das dritte Keplersche Gesetz aber enthält die Tatsache, daß C^2 für alle Planeten den gleichen Wert besitzt.

Es ist nämlich

$$C^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

und nach dem dritten Keplerschen Gesetz ist für alle Planeten

$$a^3 = e \cdot T^2,$$

also $\frac{a^3}{T^2}$ eine Konstante für alle Planeten.

11. Es gilt also die Gleichung (12) allgemein für alle Planeten. Unser Resultat lautet in Worten:

„Die Beschleunigung, die die Planeten erfahren, ist auf die Sonne zu gerichtet und ist nur von dem Abstand abhängig, den der betreffende Planet jeweils von der Sonne hat. Dem Quadrat dieses Abstandes ist die Beschleunigung umgekehrt proportional."

12. Die Massenanziehung. Das Newtonsche Gesetz.

Nach § 16, 7. ergibt sich aus der Gleichung (12), daß die Kraft K, die die Sonne auf einen Planeten mit der Masse m ausübt,

$$K = C \frac{m}{r^2} \tag{13}$$

ist. Die auf die verschiedenen Planeten ausgeübten Kräfte sind den Massen der Planeten proportional.

Newton hat das Prinzip der „Aktion und Reaktion" in folgenden Worten aufgestellt: „Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung." Nach diesem Prinzip kann nicht ein Körper einseitig eine Kraft auf einen anderen ausüben; es wird zwischen beiden Körpern eine Kraft existieren, jeder wird von dem anderen die gleiche Kraft erfahren.

Das Gesetz der „Aktion und Reaktion" verlangt also, daß die gleiche Kraft, die die Sonne auf den Planeten m ausübt, der Planet seinerseits auch auf die Sonne ausübt, d. h. daß zwischen den zwei Körpern eine gleichgroße Anziehung wirkt. Diese Analogie läßt schließen, daß die Kraft K ebensogut, wie sie der Planetenmasse proportional ist, auch der Masse der Sonne M proportional sein muß. Die Sonnenmasse muß demnach in der Konstanten C als Faktor enthalten sein, was dem in 11. aufgestellten Gesetz nicht widerspricht, da die Sonnenmasse ja für alle Planeten dieselbe bleibt. Wir setzen

$$C = f \cdot M,$$

so daß Gleichung (13) übergeht in

$$K = f \cdot \frac{Mm}{r^2}. \tag{14}$$

Dieser Ausdruck für die Kraft heißt das „Newtonsche Gesetz“. Wir können es verallgemeinern, indem wir annehmen, daß das gleiche Gesetz für ganz beliebige Massen gilt.[1]) Zwei beliebige Massenpunkte — zunächst zwei beliebige Himmelskörper, dann aber auch beliebige irdische Massen, deren Dimensionen hinreichend klein gegen ihren Abstand voneinander sind — üben aufeinander eine Kraft aus, die durch die Gleichung (14) gegeben ist, wenn wir unter M und m die Massen der beiden Körper verstehen. Diese Kraft hat die Richtung der Verbindungslinie der zwei Massenpunkte und zwar sucht sie die Verbindungslinie zu verkleinern.

13. Die Erdbeschleunigung g, die in § 17 wiederholt besprochen wurde, ist ebenfalls einer der Gleichung (14) entsprechenden Kraft zuzuschreiben. Hat ein Körper in der Nähe der Erdoberfläche eine Masse m, so übt die Erde nach Gleichung (14) eine Kraft auf ihn aus von der Größe

$$K = f \cdot \frac{Mm}{r^2},$$

worin M die Masse der Erde, r der Abstand ist, den m vom Mittelpunkt der Erde hat. Fällt der Körper frei, so erfährt er die Beschleunigung g und die Kraft, die diese Beschleunigung hervorruft, ist also

$$K = mg,$$

also

$$g = f \cdot \frac{M}{r^2},$$

1) Diese Verallgemeinerung hat — streng genommen in umgekehrtem Sinne — Newton zuerst vorgenommen. Er hat in seinen „Philosophiae naturalis principia mathematica“, III. Buch, zuerst ausgesprochen, daß die Kraft, die die Erde auf irdische Körper ausübt, derselben Ursache zuzuschreiben ist, wie die der Sonne auf die Planeten und die der Planeten untereinander.

Isaak Newton wurde am 5. Januar 1643 zu Woolsthorpe, Lincoln, geboren und starb am 21. März 1727 in London. Erst in seinem 12. Jahre kam er zur Schule und im Juni 1660 bezog er, so schlecht wie möglich vorbereitet, das Trinity College in Cambridge. Durch eigene Geisteskräfte überwand er die daraus erwachsenden Schwierigkeiten. 1669 übernahm er in Cambridge die mathematische Professur, die sein Lehrer Barrow inne gehabt hatte. Diese Professur legte er 1703 nieder, nachdem sich sein Leben von 1695 an glänzender gestaltet hatte. Er lebte dann in London, überhäuft von Ehrungen von wissenschaftlicher und staatlicher Seite. Seine optischen und mechanischen Arbeiten haben seinen Namen berühmt gemacht. (Rosenberger, Geschichte der Physik, Bd. II, p. 188, und „Isaak Newton und seine physikalischen Prinzipien“, von demselben Verfasser, Leipzig 1895).

und somit streng genommen nicht unabhängig vom Abstand des Punktes m vom Erdmittelpunkt. Da aber r eine sehr große Zahl ist, am Äquator gleich 6 378 367 Meter, so können wir g im Gebiet von einigen hundert Metern mit einer Genauigkeit, die für die gewöhnlichen Zwecke ausreicht, als konstant ansehen.

In der Tat ist g am Pol, wo wir wegen der Abplattung der Erde vom Mittelpunkt 6 356 764 Meter entfernt sind, merklich von dem g am Äquator verschieden. Es ist

am Äquator	$g = 978{,}1$ cm/sec²,
bei 50° geogr. Br.	$g = 981{,}1$ „ ,
am Nordpol	$g = 983{,}2$ „ ,

aber diese Abweichungen lassen sich nicht durch die Unterschiede der Radien und der Zentrifugalkraft allein erklären.[1])

14. Der Faktor f kann nach Gleichung (14) aus der Anziehung zweier beliebiger Massen berechnet werden[2]), indem man z. B. unter eine Masse, die an einem Wagebalken äquilibriert hängt, eine andere, möglichst schwere Masse bringt. Das Mittel einer Anzahl neuerer Messungen von f, ausgeführt von verschiedenen Beobachtern, ergibt

$$f = 6{,}675 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm^3 sec^{-2} gr^{-1}}.$$

Kennt man den Faktor f, so kann man die Masse und damit die mittlere Dichte der Erde berechnen.

§ 22. Arbeit und Energie.

1. Wie den Begriff der Kraft, so haben wir auch einen weiteren Begriff, den der Arbeit, ursprünglich einem rein subjektiven Anstrengungsgefühl zu verdanken, und lange Zeit hat es gedauert, bis es gelang, rein logisch die beiden Begriffe exakt zu trennen. Verwechslung beider Begriffe hat oft Irrtümer und Mißverständnisse herbeigeführt, bevor durch Robert Mayer, durch Helmholtz, Joule und andere Klärung in die wechselnden Begriffe gebracht wurde, gleichzeitig mit der Entdeckung des großen Gesetzes, das die Welt beherrscht, des Energieprinzips.

1) Dieser Abschnitt 13 soll nur eine Tatsache anführen, ohne sie streng zu beweisen. Das Newtonsche Gesetz gilt nur für Massenpunkte, und es müßte erst bewiesen werden, daß wir die Erde, wenn wir sie als eine homogene Kugel ansehen, durch ihre in ihrem Mittelpunkt konzentrierte Masse ersetzen dürfen.

2) Über die Methoden zur Bestimmung von f vergleiche den Artikel über Gravitation von J. Zenneck im V. Band der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“.

2. Daß die Anziehungskraft der Erde in erreichbaren Abständen über der Oberfläche merklich konstant ist, haben wir schon erkannt. Sicherlich aber ist es für unser Gefühl nicht das Nämliche, ob wir ein Gewicht einen Meter oder zwei von dem Erdboden in die Höhe heben. Wenn wir einen Körper in der Richtung einer konstanten Kraft und zwar gegen diese verschieben, so wird die Ermüdung, die wir empfinden, sowohl mit der Kraft als mit der Länge des Weges der Verschiebung wachsen.

In welcher quantitativen Abhängigkeit unsere Ermüdung von diesen zwei Größen steht, läßt sich nicht angeben, da unsere subjektiven Empfindungen nicht hinreichend meßbar sind.

Es läßt sich im Gegenteil umgekehrt aus der Kraft und aus der Länge des Weges vielleicht ein Maß finden für das, was wir bei einer solchen Verschiebung leisten, wenn auch nicht gerade für die Ermüdung.

Wir wollen sagen: Wenn wir einen Körper gegen eine auf ihn wirkende Kraft verschieben, so leisten wir eine „Arbeit“, und wollen annehmen, daß diese Arbeit auf das n-fache wächst, wenn wir entweder die Kraft oder den Weg der Verschiebung aufs n-fache steigern, und daß sie aufs $m \cdot n$-fache wächst, wenn wir die Kraft aufs n-fache, den Weg aufs m-fache steigern. Es muß dann die Arbeit A gegeben sein durch:

$$A = cKs,$$

wenn K die Kraft, s den Weg bedeutet. c ist eine Konstante, die wir willkürlich gleich 1 setzen wollen. Dann ist

$$A = Ks. \tag{1}$$

Die gegen eine Kraft geleistete Arbeit ist gleich dem Produkt aus dieser Kraft und der Länge des Verschiebungsweges.

3. Die Gleichung (1) enthält zunächst eine willkürliche Definition einer neuen Größe. Wir hätten auch eine beliebige andere Funktion von Kraft und Weg als „Arbeit“ definieren können. Aber gerade diese Funktion bewährt sich, wie wir sehen werden, weil sie eine Form einer Invarianten ist, der Energie.

4. Wenn die Kraft K längs eines Weges s nicht konstant ist, sondern sich sprungweise ändert, so können wir s in eine Summe

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \cdots$$

so zerlegen, daß längs jeder Strecke s_n eine konstante Kraft herrscht. Die Arbeit bei einer Verschiebung über s_n ist dann nach unserer bisherigen Definition $K_n s_n$; und wir wollen unsere Definition der

Arbeit dahin erweitern, daß wir die Arbeit bei aufeinander folgenden, voneinander unabhängigen Verschiebungen als die Summe der Einzelarbeiten auffassen:

$$A = K_1 s_1 + K_2 s_2 + \cdots = \sum_n K_n s_n; \tag{2}$$

und hieraus können wir leicht zu der Verschiebung über eine stetig variable Kraft übergehen, wenn wir die s_n so klein annehmen, daß längs eines solchen s_n die Veränderung von K_n unmeßbar klein wird. Dann wird n selber mit abnehmendem s_n immer größer, und schließlich wird die Summe $\sum_n K_n s_n$ eine Summe aus unendlich vielen unendlich kleinen Gliedern (ein „Integral"). Diese Summe kann dabei eine endliche Größe behalten.

5. Legen wir die Dimensionen und Einheiten für die Kraft nach § 16, 7. zugrunde, so bekommt die Arbeit die Dimensionen

$$[A] = [m]\,[l]^2\,[t]^{-2},$$

und die Einheit, die wir als „ein Erg" bezeichnen, wird:

$$1 \text{ erg} = 1 \, \frac{\text{gr cm}^2}{\text{sec}^2}.$$

Ein Erg ist die Arbeit, die wir leisten, wenn wir einen Körper, auf den eine Dyne wirkt, um einen Zentimeter gegen die Richtung der Kraft verschieben.

In der Technik ist als Einheit aus Zweckmäßigkeitsgründen die Arbeit eingeführt, die man leistet, wenn man ein Kilogramm um einen Meter — gegen die Erdschwere — hebt. Diese „Arbeitseinheit" heißt „ein Kilogrammeter". Die Erde wirkt auf ein Kilogramm mit einer Kraft von $981 \cdot 1000$ dyn (§ 17, 1.). Daraus folgt, daß ein Kilogrammeter gleich $9{,}81 \cdot 10^7$ erg ist.

6. Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen: Wer oder was leistet die Arbeit? Wir haben uns bisher einen Menschen gedacht, der einen Körper verschiebt, z. B. hebt. Offenbar ist hier selber wieder eine Kraft erforderlich, die diese Verschiebung gegen andere Kräfte ausführt, die Kraft unserer Muskeln.

Denken wir uns mit horizontal ausgestrecktem Arm ein Gewicht gehalten, so wird das Gewicht dann in Ruhe sein, wenn wir ihm durch den Arm von unten nach oben die gleiche Kraft erteilen, die die Erde darauf von oben nach unten ausübt. Machen wir die von uns ausgeübte Kraft um unendlich weniges größer, so heben wir das Gewicht, freilich wegen der kleinen Überkraft auch nur unendlich langsam; denn nach § 16, 7. muß die Geschwindigkeit unendlich langsam von 0 an wachsen. Dann aber können wir die Kraft der Erde

in Gleichung (1) durch die nur unendlich wenig davon verschiedene Kraft unserer Muskeln ersetzen.

Statt unserer Muskelkraft können wir auch eine beliebige andere Kraft zur Arbeitsleistung verwenden und wenn sie nur unendlich wenig von der Kraft verschieden ist, gegen die sie wirkt, wird die Bewegung nur unendlich langsam vor sich gehen.

Umgekehrt können wir bei hinreichend langsamer Verschiebung den Zahlenwert der Kraft, gegen die die Arbeit geleistet wird, durch den Zahlenwert derjenigen ersetzen, die die Arbeit leistet. Das gilt dann für die Gleichungen (1) und (2) in gleicher Weise.

> Die von einer Kraft geleistete Arbeit ist bei hinreichend langsamer Verschiebung gleich dem Produkt aus dieser Kraft und der Verschiebung, oder bei nicht konstanter Kraft gleich der Summe der entsprechenden Produkte.

7. Übt eine Kraft ein Drehmoment aus, so folgt nach § 19, 5. leicht, daß bei hinreichend langsamer Drehung die von ihr geleistete Arbeit gleich dem Produkt aus Drehmoment und Drehungswinkel ist. Danach ergibt sich dann, daß das Drehmoment selber die Dimensionen einer Arbeit besitzt, wenn wir dem Winkel keine Dimensionen zuschreiben.[1]) Das Drehmoment ist die bei Drehung um den Winkel 1 geleistete Arbeit.

Ein Mühlenrad, das sich dreht, erfährt durch die drehenden Kräfte eine Arbeitsleistung.

8. Wenn wir die Verschiebung nicht gegen die Kraftrichtung einer Kraft K, sondern in einer Richtung s, die um den Winkel α gegen diese Richtung geneigt ist, verschieben, so werden wir eine Arbeit nur gegen die nach s gerichtete Komponente der Kraft leisten, also gegen die Kraft $K \cos \alpha$. Diese Arbeit ist

$$K \cos \alpha \cdot s,$$

wenn s die Länge der Verschiebung bedeutet. Und demnach ist allgemein die Arbeit gleich dem Produkt der Verschiebung und Kraftkomponente in der Verschiebungsrichtung, oder gleich dem Produkt aus Kraft und Projektion der Verschiebung auf die Kraftrichtung.

9. Wenn wir ein Gewicht P gr um a cm vom Erdboden heben, so leisten wir eine Arbeit von

$$Pag \text{ erg.}$$

Das Gewicht P ist nun seinerseits imstande, beim Herunter-

---

1) Das Drehmoment hat mit der Arbeit an sich ebensowenig zu tun, wie die Kraft. Erst durch die Multiplikation mit dem Winkel wird es eine Arbeitsgröße.

fallen aus dieser Höhe auf den Erdboden wieder eine Arbeit zu leisten infolge der Kräfte, die darauf wirken. Wir können uns z. B. denken, daß wir das Gewicht auf die Schaufeln eines Mühlenrades legen, das sich gegen eine Gegenkraft langsam dreht, oder daß wir es an einem über eine Rolle geführten Faden befestigen, an dessen anderem Ende ein um unendlich weniges kleineres Gewicht $P - \varDelta P$ hängt. Die Arbeit, die P bei seinem Herabsinken leisten könnte, wäre dann ebenfalls bis auf unendlich kleines gleich

$$Pag \text{ erg},$$

und diesen Betrag können wir als einen Arbeitsvorrat auffassen, den der Körper P mehr besitzt, wenn er sich a cm über dem Erdboden, als wenn er sich auf ihm befindet. Die Größe

$$F = Phg \text{ erg}, \tag{3}$$

worin h die von irgend einem beliebigen Niveau an gerechnete Höhe des Körpers bedeutet, heißt seine „potentielle Energie". Diese ist also der Arbeitsvorrat, den der Körper infolge seines Abstandes von der Erde besitzt. Der absolute Wert der potentiellen Energie ist unbestimmt, da wir h von einem beliebigen Niveau an rechnen können. Wir wissen nur, wie sich die potentielle Energie ändert, wenn wir seine Lage ändern. Aus unserer Definition können wir ableiten: Die potentielle Energie eines Körpers ändert sich nicht, wenn wir ihn in einer horizontalen Ebene verschieben.

10. Außer der potentiellen Energie kennen wir noch eine große Anzahl anderer Arten von „Arbeitsvorrat". So besitzt z. B. eine zusammengepreßte Spiralfeder einen Arbeitsvorrat, eine „aufgespeicherte Energie". Ein solcher Arbeitsvorrat kommt immer einer gewissen Konstellation von Körpern oder Körperteilen zu, einem „System", so z. B. der Konstellation „Erde und Gewicht" oder der Konstellation der einzelnen Teile der Feder. Nicht etwa die einzelnen Teile besitzen die Energie, sondern das ganze System.

Ein weiteres Beispiel eines Arbeitsvorrates aus ganz anderem Gebiete bildet die chemische Energie. Ein brennbares Gas, mit Luft oder Sauerstoff gemischt, besitzt einen Arbeitsvorrat. Durch Entzündung können wir es zur Explosion bringen, und dadurch Arbeit gewinnen, wie es bei Gasmotoren in der Tat geschieht. Auch hier besitzt weder das Gas, noch die Luft die Energie, sondern das System Gas und Luft. Ähnlich liegt die Sache z. B. beim Schießpulver.

11. Den Begriff der potentiellen Energie wollen wir auf ein beliebiges, dem Einfluß beliebiger Kräfte ausgesetztes System von Massenpunkten erweitern. Bei einer Verschiebung eines solchen

Punktes $P^{(i)}$ gegen die auf ihn wirkende Kraft $K_n^{(i)}$ um eine Strecke, die sich aus Elementen $s_n^{(i)}$ zusammensetzt, leisten wir nach Gleichung (2) die Arbeit

$$\sum_n K_n^{(i)} s_n^{(i)},$$

und wenn wir sämtliche Massenpunkte des Systems in dieser Weise verschieben, führen wir die Arbeit

$$\sum_i \sum_n K_n^{(i)} s_n^{(i)}$$

aus. Die Indizes i beziehen sich hier auf die einzelnen Massenpunkte, die Indizes n auf die Wegelemente, aus denen sich der Weg eines einzelnen Massenpunktes zusammensetzt. Wir definieren: Wir haben die „potentielle Energie des Systems" um den Betrag

$$\Delta F = \sum_i \sum_n K_n^{(i)} s_n^{(i)} \tag{4}$$

vermehrt. Die Kräfte des Systems selber würden bei der entgegengesetzten Verschiebung uns diese Arbeit liefern. Die Doppelsumme wird sich in gewissen besonderen Fällen in eine einfache Form bringen lassen, wie z. B. in dem Falle der gravitierenden Kräfte der Erde (vgl. Nr. 13, Ableitung der kinetischen Energie).

Es steht uns noch frei, eine beliebige Anfangsverteilung der Massenpunkte als Normalverteilung anzusetzen, dieser den Betrag Null der potentiellen Energie zuzuschreiben, und so einen absoluten Betrag der potentiellen Energie bei jeder anderen Verteilung zu definieren. In Worten sagt die Gleichung (4) aus:

Die Zunahme der potentiellen Energie ist gleich der gegen die wirkenden Kräfte geleisteten Arbeit, oder gleich der negativen Arbeit der Kräfte. Die Abnahme der potentiellen Energie ist dem entsprechend gleich der von den Kräften geleisteten Arbeit.

12. Wir wollen uns einmal ein Geschoß vorstellen, das mit Hilfe von Schießpulver aus einem Gewehre herausgeschleudert worden ist.

Das Geschoß möge sich in einem Raume bewegen, in dem keine Kräfte darauf wirken (§ 17, C). Dann wird es mit unverminderter Geschwindigkeit weiterfliegen, bis es irgendwo auf eine sich ihm entgegenstellende Kraft trifft. Wir können uns etwa denken, daß es auf die Schaufeln eines Mühlenrades trifft. Wenn diese Schaufeln hinreichend widerstandsfähig sind, wird das Mühlenrad in Drehung versetzt, und seinerseits imstande sein, Arbeit zu leisten. Das Geschoß liefert uns also diese Arbeit. Wenn es hinreichend lange arbeitet,

wird es selber allmählich zur Ruhe kommen und nun weiter keine Arbeit mehr leisten können. Wir müssen daraus schließen, daß das Geschoß, so lange es sich bewegt, einen Arbeitsvorrat besitzt, eben infolge seiner Bewegung, und diesen nennen wir seine „kinetische Energie". Die chemische Energie des Pulvers ist, wenn das Geschoß den Lauf verlassen hat, nicht mehr vorhanden, dagegen finden wir jetzt kinetische Energie. Es liegt also nahe anzunehmen, daß die eine Energie die andere hervorgebracht hat. Energien können ineinander übergeführt werden.

13. Wir wollen jetzt versuchen festzustellen, wie groß die kinetische Energie eines bewegten Körpers ist. Der Körper habe das Gewicht m gr und bewege sich mit einer Geschwindigkeit von v cm/sec (in dem Moment, in dem wir ihn in Betracht ziehen). Es stelle sich ihm jetzt eine konstante Kraft K entgegen, gegen die er Arbeit zu leisten hat. Nach Ablauf einer Zeit t und Durchlaufen eines Weges l wird er durch die Gegenkraft K, die wir uns so wirken denken können, daß sie ihm konstant eine Beschleunigung gegen seine Richtung erteilt, in Ruhe gekommen sein. Der Arbeitsvorrat des Körpers muß demnach (Gl. (1)) gleich

$$Kl$$

sein. Die Geschwindigkeit v nimmt in jeder Sekunde um die durch K erzeugte Beschleunigung

$$p = \frac{K}{m}$$

ab. p ist über den ganzen Weg l konstant, da es K sein soll, und die ganze Bewegung gestaltet sich ebenso wie der vertikal nach oben gerichtete Wurf (§ 17, 13.). Es wird die Wurfhöhe, also hier l, gegeben sein durch

$$l = \frac{v^2}{2p},$$

und somit wird der Arbeitsvorrat:

$$A = \frac{mv^2}{2}. \tag{5}$$

14. Wir kommen zu dem gleichen Resultat, wenn wir statt der konstanten Kraft K eine beliebige andere annehmen, gegen die sich das Geschoß von einem gegebenen Moment an bewegt. Lassen wir zunächst statt K eine sprungweise sich ändernde Kraft K_1, $K_2, \ldots, K_n$ mit den Beschleunigungen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ über die entsprechenden Wege $s_1, s_2, \ldots, s_n$ wirken, so können wir zur Berechnung von A stufenweise vorgehen. Es sei die ursprüngliche Geschwindigkeit v_0. Nach Vollendung der Wege s_1 sei sie v_1 u. s. f. Die Zeiten, nach denen die sprungweisen Änderungen eintreten, seien

$t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$, und nach der Zeit t_n sei die Geschwindigkeit gerade vernichtet.

Dann ist zunächst nach Ablauf des Weges s_{n-1}, also zur Zeit t_{n-1}, die kinetische Energie:

$$A_{n-1} = \frac{m\, v_{n-1}^2}{2}.$$

Auf dem Wege s_{n-1} liefert der Körper die Arbeit

$$m\, p_{n-1}\, s_{n-1},$$

und durch Anwendung der Gleichung § 17, 13. auf zwei verschiedene Ausgangspunkte des Wurfes bei entsprechenden Anfangsgeschwindigkeiten folgt:

$$s_{n-1} = \frac{v_{n-2}^2}{2\, p_{n-1}} - \frac{v_{n-1}^2}{2\, p_{n-1}},$$

und somit wird die kinetische Energie

$$A_{n-2} = m p_{n-1} s_{n-1} + A_{n-1} = \frac{m\, v_{n-2}^2}{2}.$$

So kommen wir schließlich zu dem Resultat, daß zur Zeit t_0, also wenn die Geschwindigkeit den Wert v_0 besitzt, die kinetische Energie den durch (5) gegebenen Wert

$$A = \frac{m {v_0}^2}{2}$$

besitzt.

Wir können schließlich zu unendlich vielen, unendlich kleinen Stufen übergehen, und sehen, daß die Arbeit, die ein Körper infolge seiner Geschwindigkeit leisten kann, unabhängig ist von der Kraft, gegen die er sie leistet.

Die kinetische Energie ist nur von Masse und Geschwindigkeit abhängig.

15. Wir können jetzt die Vorgänge bei der Pendelbewegung vom energetischen Standpunkte aus betrachten (§ 17, D). Wenn das Pendel aus seiner Ruhelage bis zu einem gewissen Winkel gehoben wird, so besitzt es eine potentielle Energie gegenüber der Ruhelage, aber keine kinetische, da die Geschwindigkeit Null ist. Lassen wir es los, so nimmt die potentielle Energie ab und die kinetische statt dessen zu. In der Gleichgewichtslage, d. h. an seiner tiefsten Stelle, hat das Pendel das Maximum der kinetischen Energie, und das Minimum der potentiellen. Das Pendel fliegt über die Ruhelage hinaus und erreicht wieder eine höchste Lage, wenn die potentielle Energie ein Maximum, die kinetische ein Minimum, gleich 0, ist.

So wiederholt sich das Spiel, indem immer potentielle Energie und kinetische miteinander wechseln.

Wir können das so ausdrücken: Die kinetische Energie wird beim Ansteigen des Pendels in potentielle umgewandelt, beim Abfallen aus der potentiellen gewonnen.

Wie in diesem Beispiel, können wir ganz allgemein konstatieren, daß, wenn eine Energieart auftritt, eine andere dafür verschwinden muß, und daß umgekehrt, wenn eine Energieart verschwindet, eine andere dafür auftritt. Energiearten können ineinander umgewandelt werden. Diese Tatsache scheint in einigen Fällen eine Ausnahme zu finden, und davon soll der nächste Paragraph handeln.

§ 23. **Das Energieprinzip.**

1. Die Arbeit sowohl, wie alle die Größen, aus denen wir Arbeit gewinnen können, also z. B. die kinetische und potentielle Energie, fassen wir unter dem Namen „Energien“ zusammen, und speziell sind die bisher besprochenen Energiearten, außer der erwähnten chemischen, „mechanische Energien“.

Daß eine mechanische Energie in eine andere mechanische übergeführt werden kann, haben wir im vorigen Paragraphen beim Pendel erkannt. Es läßt sich nun zeigen, daß dies beim idealen mathematischen Pendel quantitativ erfolgt. Beim Herabfallen der Pendelmasse m aus der höchsten Lage, in der es keine kinetische Energie besitzt, in seine niedrigste, um den vertikalen Abstand h tiefere, verliert diese Masse an potentieller Energie den Betrag

$$\varDelta F = mgh$$

und gewinnt eine kinetische Energie

$$A = \frac{mv^2}{2},$$

wo v die Geschwindigkeit bedeutet, die die Masse in dem betrachteten Moment besitzt.

Diese Geschwindigkeit ist nach § 17, 19.

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Demnach wird

$$A = mgh$$

und

$$\varDelta F = A. \tag{1}$$

Ebenso ergibt sich umgekehrt, wenn das Pendel wieder steigt,

$$A = \Delta F,$$

die kinetische Energie verwandelt sich wieder quantitativ in potentielle.

Beim freien Fall und bei der schiefen Ebene läßt sich leicht berechnen, daß die gewonnene kinetische Energie in jedem Moment gleich der bis dahin verlorenen potentiellen Energie ist.

Ist z. B. ein frei fallender Körper um die Höhe h gefallen, so hat er an potentieller Energie den Betrag mgh verloren, wo

$$h = g\,\frac{t^2}{2}$$

ist (§ 17, 3.). Es ist also

$$\Delta F = \frac{m\,g^2 t^2}{2}.$$

Er hat dabei die Geschwindigkeit

$$v = gt,$$

also die kinetische Energie

$$A = m\,\frac{v^2}{2} = \frac{mg^2t^2}{2}$$

erlangt, so daß also die Gleichung (1) in jedem Moment des Falles erfüllt ist.

Beim Fall auf der schiefen Ebene liegen die Verhältnisse nicht anders, da hier nach Durchlaufen eines bestimmten Vertikalabstandes die Geschwindigkeit dieselbe ist, wie beim freien Fall.

2. Diesen drei Beispielen, dem freien Fall, der schiefen Ebene und dem Pendel liegt als Ausgangspunkt die Tatsache zugrunde, daß ein beliebiger Körper von der Erde eine von Form und Gewicht des Körpers unabhängige Beschleunigung g erhält. Das ist streng richtig für einen im luftleeren Raume fallenden Körper, und wir wollen annehmen, daß das Gesetz an einem solchen experimentell geprüft worden sei, obwohl in Wirklichkeit die Prüfung komplizierter ist. Die schiefe Ebene und das mathematische Pendel sind Abstraktionen. Wir haben s. Z. ihre physikalischen Grundlagen nicht kritisch geprüft, sondern uns mit der Angabe begnügt, daß deren Bewegung „reibungslos“ erfolgen solle.

In Wirklichkeit haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß diese Bewegungen nur zwei Bedingungen unterworfen seien, erstens der beschleunigenden Kraft der Erde, zweitens einem Bewegungszwang, dem Zwang, sich in einer vorgeschriebenen Bahn zu bewegen. Weitere Bedingungen sollen nicht vorliegen; d. h. z. B. in der erlaubten Bahn soll der Körper ebenso frei beweglich sein, als ein im

luftleeren Raume befindlicher Körper. Für unsere mathematischen Berechnungen genügte dies. Physikalisch müßten wir erst prüfen, wie weit die Bedingungen erfüllt sind, und das könnte etwa dadurch geschehen, daß wir prüfen, wie weit eine physikalische Ausführung z. B. des Pendels die mathematischen Resultate bestätigt.

3. Das Gesetz von Gleichung (1) ist ein Resultat der mathematischen Ableitung, und wir können sagen, es geht bei den angeführten Beispielen keine Energie verloren. Die einmal vorhandene Energie eines Systems bleibt erhalten.

Physikalisch dagegen zeigt sich, daß die Gleichung (1) nie streng erfüllt ist. Beim Pendel z. B. finden wir, daß die Ausschläge immer kleiner werden, daß also die potentielle Energie immer abnimmt, und somit die Gleichung (1) nicht erfüllt sein kann. Es lassen sich zwar Anordnungen treffen, z. B. durch Aufhängung des Pendels an sehr feinen Schneiden, so daß die Abnahme der Ausschläge sehr vermindert wird. Ganz vermeiden aber läßt sie sich nicht.

Der fallende Körper kommt, wenn er den Erdboden berührt, zur Ruhe. Die kinetische Energie, die aus seiner potentiellen entstanden ist, ist nicht mehr da; aber auch die potentielle ist verschwunden.

Sehr auffällig ist auch die Abweichung von dem mathematischen Resultat bei der schiefen Ebene. Die zu erwartende Geschwindigkeit wird unter Umständen auch nicht annähernd erreicht.

Und doch geht keine Energie verloren.

Das erkannt zu haben ist in erster Linie das Verdienst von R. Mayer.

4. Immer nämlich, wenn Energie verloren zu sein scheint, zeigt sich an irgend einer Stelle des Systems eine Erwärmung. Die schiefe Ebene, auf der der Körper gleitet, wird warm, die Unterlage, auf die wir einen Körper fallen lassen, wird es, und ebenso wird es die Drehachse des Pendels. Und diese Erwärmung steht in einer bestimmten Beziehung zu der scheinbar verlorenen Energie, sie liefert das Äquivalent dazu. In welcher Weise das der Fall ist, wollen wir uns jetzt vergegenwärtigen, müssen aber vorher einen neuen Begriff, den der Wärmemenge, kennen lernen.

§ 24. Temperatur und Wärmemenge.

1. Der Begriff der Temperatur, oder in der Volkssprache der Wärme, entstammt, wie so vieles andere, unserem subjektiven Gefühl. Gewisse unterscheidbare Empfindungen beim Berühren von Körpern z. B. erklären wir dadurch, daß wir den Körpern verschiedene Tem-

peratur zuschreiben. Wodurch diese Temperaturen der Körper hervorgebracht werden können, ist seit alters her bekannt.

Hand in Hand mit einer durch das Gefühl nachweisbaren Temperaturzunahme geht nun eine Vergrößerung der Dimensionen der heißer werdenden Körper. Wenigstens ist das bei weitaus den meisten Körpern der Fall. Das kann uns ein Mittel liefern, auf objektivem Wege Temperaturveränderungen wahrzunehmen und Temperaturgleichheit zu konstatieren.[1]) Es ist nämlich Erfahrungstatsache, daß zwei verschieden warme Körper durch Berührung ihre Temperaturen ausgleichen, jedenfalls bis zu einem gewissen Gleichgewichtszustand. Davon können wir uns noch durch das Gefühl überzeugen.[2])

Haben wir uns nun einen Standardkörper als Meßinstrument ein für allemal gewählt, z. B. eine Quecksilbermenge, die in ein Gefäß eingeschlossen ist und in einem Faden endet, so können wir jedem Volumen dieses Standardkörpers eine bestimmte Temperatur in ihm selbst zuschreiben.

Wir bringen nun diesen Meßkörper in Berührung mit zwei anderen Körpern, die wir für verschieden warm halten, und die in der Tat durch diese Berührung den Meßkörper auf verschiedene Volumina bringen mögen.

Die beiden Körper sollen sich jetzt für längere Zeit berühren und mögen dann wieder während der Berührung jeder mit dem Meßkörper längere Zeit in Berührung gehalten werden. Es zeigt sich dann, daß diese Berührungen jetzt dem Meßkörper gleiches Volumen erteilen.

Es wird also durch die Berührung der beiden Körper untereinander jedenfalls das erreicht, daß sie den Meßkörper auf gleiche Temperatur bringen.

Da das bei verschiedenen Körpern und verschiedenen Meßinstrumenten immer wieder der Fall ist, so sind wir zu der folgenden Definition berechtigt:

Mehrere Körper haben untereinander gleiche Temperatur, wenn sie durch Berührung mit einem unter ihnen, den wir als Meßkörper auffassen, dessen Temperatur nicht ändern.

1) Vgl. M. Planck, Vorlesungen über Thermodynamik. 1. Abschn., 1. Kap., speziell § 2 und 3.

2) Hier, wie in vielen anderen Fällen zeigt sich, daß das ursprüngliche Kriterium, das eine Untersuchung einleitet, also das Gefühl, beim Fortschreiten der Forschung nicht nur nicht ausreicht, sondern sogar falsche, d. h. mit unseren neu geschaffenen Kriterien nicht übereinstimmende Resultate liefert. So fühlt sich ein Metall bei niederer Temperatur kühler an, als ein gleich temperierter Stein. Die fortgeschrittene Forschung hat das zu deuten verstanden.

Dabei könnten wir noch eins übersehen haben, nämlich, daß die Änderung unwahrnehmbar langsam erfolgt. Davon können wir uns überzeugen, wenn wir absichtlich eine Temperaturänderung eines der Körper vornehmen.

2. Wir können nun mit Hilfe eines bestimmten Körpers eine Temperaturskala aufstellen, die aber einer weit größeren Willkür unterworfen ist, als etwa die Zeitskala. Es geschieht dies mit Hilfe der verschiedenartigen Thermometer.

3. Wollen wir die Temperatur*zunahme* meßbar machen, und eine Einheit für Temperaturdifferenzen[1]) festlegen, so müssen wir zunächst imstande sein, Gleichheit von Temperaturdifferenzen feststellen zu können, wie wir erst Gleichheit von Zeiten, also von Zeitdifferenzen nachweisbar machen mußten. Das geschieht etwa dadurch, daß wir ein Volumen v eines Körpers, z. B. Quecksilber nehmen, wo v eine Variable mit der Temperatur ist, und nun festsetzen: Solche Temperaturzunahmen, die v auf $v\left(1+\frac{1}{n}\right)$ wachsen lassen, nennen wir gleich. Also jedesmal, wenn das Volumen durch die Erwärmung um $1/n$ seines vorhergehenden Wertes wächst, soll die Temperatur um das Gleiche gewachsen sein. n ist eine willkürliche Konstante.

Ganz ähnlich sind wir auch bei der Definition von Zeitgleichheit vorgegangen; nur bot sich da der große Vorteil, daß eine große Zahl von Vorrichtungen den gleichen Begriff der Zeitgleichheit lieferte. Bei der Temperatur gibt es *nicht zwei* Körper, die den entsprechenden Gleichheitsbegriff gleich liefern. Das wird durch folgendes klar werden. Wählen wir zwei Substanzen, die zu Temperaturmessungen verwandt werden, Quecksilber und Weingeist, und legen wir mit Hilfe des Quecksilbers im kalten Winter ein Temperaturintervall fest dadurch, daß wir das Quecksilber sich auf $1/n$ seines Volumens durch Erwärmen vergrößern lassen, und bestimmen wir den Bruchteil $1/m$, um den sich im gleichen Temperaturintervall ein gegebenes Weingeistvolumen vermehrt hat, so wird im heißen Sommer, also beim Erwärmen von einer höheren Temperatur aus, der Wert $1/m$ ein anderer sein. Umgekehrt, sehen wir das $1/m$ für Weingeist als konstant an zur Definition von Temperaturgleichheit, so ist bei Quecksilber die Änderung des Volumens bei höherer Temperatur nicht mehr die gleiche in dem festgelegten Temperaturintervall, also nicht mehr $1/n$.

---

1) Das Wort Temperatur unterliegt hier demselben Begriffsdualismus, wie das Wort Zeit als Zeitpunkt und Zeitraum.

Nur angenähert führen verschiedene Stoffe zu demselben Gleichheitsbegriff, am besten die Gase.

Die Tatsache, daß je nach der Wahl des Meßkörpers der Gleichheitsbegriff verschieden ausfällt, stellt die Brauchbarkeit eines einzelnen daraus herausgegriffenen in Frage. Gleichwohl bleibt uns nichts übrig, als diesen Weg einzuschlagen.

4. Über die Wahl der Einheit, der „Celsiusgrade", und die Einrichtung des Thermometers wollen wir hier nicht weiter sprechen. Nur erwähnt sei, daß die Konstanz des Gefrierpunktes und Siedepunktes erst hat nachgewiesen sein müssen, bevor wir sie bei der Einheitswahl benutzen konnten. Jeder Körper nimmt ein bestimmtes Volumen immer wieder ein, sobald man ihn in gefrierendes Wasser (schmelzendes Eis) bringt. Das berechtigt zu dem Schluß (oder besser zu der Hypothese), daß der Eispunkt konstant ist. Für den Siedepunkt gilt das zunächst nicht, wohl aber, wenn man auf Konstanz des Atmosphärendruckes achtet.

Die Unterteilung des Quecksilberfadens eines Thermometers zwischen Gefrier- und Siedepunkt in 100 gleiche Teile entspricht nicht genau der Formel $v(1+1/n)$, aber sehr angenähert. Denn wenn, wie wir vorausgesetzt haben, das Volumen bei gleicher Temperaturdifferenz immer um denselben Prozentsatz zunimmt, so wächst das Volumen in geometrischer Progression, wenn die Temperatur in arithmetischer Progression wächst. Es ist also, wenn die Temperatur um p Grad gewachsen ist, das Volumen v auf $v\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$ gewachsen. Wenn aber $\frac{1}{n}$ sehr klein ist, so können wir dafür nach dem binomischen Lehrsatz (Bd. I, § 55 der 1ten, § 60 der 2ten Aufl.) näherungsweise $v\left(1+\frac{p}{n}\right)$ setzen.

Der Wasserstoff, der auch zu thermometrischen Zwecken verwandt wird, dehnt sich innerhalb eines Celsiusgrades von Null Grad an um $\frac{1}{273}$ seines Volumens aus, andere Gase um angenähert ebensoviel. Es liegt demnach nahe, bei allen Temperaturen als Temperaturdifferenz 1 Grad das Intervall anzunehmen, das den Wasserstoff in der Nachbarschaft von Null Grad um $\frac{1}{273}$ seines Volumens ausdehnt. Tatsächlich geschieht das in der Physik.

Als Zeichen für die Benennung Grad wird bei Temperaturen das gleiche Zeichen wie bei Winkelgraden (also t^0) gebraucht. Eine Dimension wird der Temperatur nicht zugeschrieben.

5. Wenn wir ein Stück Blei und ein ebenso schweres Stück Eisen nacheinander in ein und dieselbe Flamme hinein halten, so

werden wir bei dem Eisen etwa dreimal solange zu warten haben, bis es eine gewünschte Temperatur angenommen hat, als bei dem Blei. Suchen wir nach der Ursache dazu, so werden wir sie zunächst in verschiedenen Tatsachen vermuten können.

Ein grob sinnliches Analogon dazu aus dem täglichen Leben kann uns dabei einfallen. Wenn wir nämlich zwei verschieden weite Gefäße unter einem laufenden Brunnen füllen wollen, wird bei dem weiteren Gefäß eine längere Zeit erforderlich sein, um das Wasser bis zu einer bestimmten Höhe einzufüllen. Das Analogon zu der Temperatur wäre also hier die Wasserhöhe.

Das Erwärmen würde sich also so verhalten, als ob wir dem zu erwärmenden Körper mittels der Flamme irgend ein Etwas — das wir uns nicht als einen greifbaren Stoff vorzustellen brauchen — zufügten, das die Temperatur in dem Körper steigerte, wie das einfließende Wasser die Höhe steigert.

Es könnte sich freilich der Zeitunterschied in der Erwärmung auch so erklären, wie er sich bei zwei gleich großen Gefäßen erklären würde, deren eines eine kleinere Einflußöffnung hat, so daß mehr Wasser daneben fließt als beim anderen. Auch diese Annahme würde uns zu dem Bilde eines „masselosen Stoffes“ führen, der dem erwärmten Körper mitgeteilt wird und den wir vorerst, rein qualitativ definiert, als „Wärmemenge“ bezeichnen wollen. In der Tat liegen Erscheinungen vor, die beiden Vergleichsexperimenten analog sind. Die erste Analogie von den zwei verschieden weiten Gefäßen — und auf diese kommt es uns hier nur an — wollen wir uns durch einen weiteren Vergleich versinnlichen, bei dem wir alles Zeitliche ausschalten, also damit das Bild der verschieden weiten Eintrittsöffnungen unzutreffend machen.

6. Wir wählen zwei verschieden weite zylindrische Gefäße, die wir am unteren Ende mittels eines Rohres mit Hahn in Verbindung setzen können. Im einen Gefäß stehe das Wasser höher als im anderen. Verbinden wir die Gefäße, so stellen sich beide Wasserhöhen gleich und eine einfache Rechnung, die darauf basiert, daß aus dem einen Gefäß ebenso viel Wasser aus- wie ins andere eingeflossen sein muß, zeigt, daß diese gemeinsame Höhe näher an der ursprünglichen des weiteren Gefäßes liegen wird, als an der des engeren. Wenn die Gefäße gleich weit sind, ist die definitive Höhe das arithmetische Mittel der ursprünglichen Höhen.

Bringen wir analog zwei gleich schwere, aber verschieden heiße Stücke von Eisen und Blei aneinander, so daß sie ihre Wärme austauschen können, was allerdings so geschehen muß, daß kein dritter Körper, z. B. Luft, mit an dem Wärmeaustausch teilnehmen kann, so

finden wir, daß die endgültige Temperatur näher an der ursprünglichen des Eisens liegt, als an der des Bleies.

7. Dem vorigen Bilde entsprechend machen wir jetzt die erste quantitative Definition:

Die Wärmemenge, die ein Körper enthält, ist eine eindeutige Funktion der Temperatur.[1]) D. h. bei einer gewissen Temperatur t_1 enthält ein gegebener Körper eine bestimmte Wärmemenge q mehr, als bei einer tieferen Temperatur t_0, so oft wir ihn auch von einer auf die andere bringen. q ist von der Größe des Körpers und dem Material abhängig, bei einmal gegebenen Temperaturen t_1 und t_0 aber konstant. Es ist also q eine Funktion von t_1 und t_0. Im allgemeinen genügt es nicht, q nur von der Temperaturdifferenz abhängig anzunehmen, wenn dies auch näherungsweise bisweilen erlaubt ist.

8. Wir können nach dieser Festlegung bereits eine Einheit für die Wärmemenge wählen, ohne daß es uns allerdings vorerst möglich ist, in dieser Einheit andere Wärmemengen zu messen. Wir definieren diejenige Wärmemenge, die ein Gramm Wasser bei 16° Celsius mehr besitzt, als bei 15°, als eine Einheit, eine Kalorie, auch Grammkalorie oder kleine Kalorie genannt, im Gegensatze zu der Kilogrammkalorie oder großen Kalorie, bei der ein Kilogramm Wasser zugrunde gelegt ist. Es werden auch wohl als Temperaturen 0° und 1° zugrunde gelegt. Dann spricht man von einer Nullpunktskalorie. Oder man wählt 0° und 100° und nennt die Wärmemenge q_{100}, die die eine Temperatur in die andere umwandelt, 100 Kalorien. Eine solche Kalorie heißt dann „mittlere Kalorie“. Die letztere Definition können wir einstweilen noch nicht verstehen, da wir die Wärmemenge q_{100} noch nicht in 100 Teile zu teilen imstande sind.

9. Wenn wir n einzelne Gramm Wasser von je t_1 Grad vorsichtig, d. h. hinreichend langsam, zusammengießen, hat die Mischung nachher ebenfalls eine Temperatur von t_1 Grad. Ebenso hat, wenn wir ein Gramm in n Teile zerlegen, jeder Bruchteil nach der Zerlegung t_1 Grad. Daraus können wir folgern, daß n ccm n mal soviel Kalorieen besitzen, als ein Kubikzentimeter; denn die Temperaturmessung zeigt, daß keines der einzelnen Gramm Wasser Wärme verloren hat. Vorausgesetzt ist freilich, daß ein Gramm Wasser sich

1) Den absoluten Wert dieser Wärmemenge brauchten wir nicht zu definieren. Wir könnten auch annehmen, daß er nichts konstantes ist. Nur müssen wir das festlegen, daß er sich bei einer bestimmten Temperaturänderung, d. h. zwischen zwei gegebenen Temperaturen bei einem und demselben Körper, immer um den gleichen Betrag ändert.



in seinen Wärmeeigenschaften wie das andere verhält. Das ist eine Voraussetzung, die plausibel ist, wenn die einzelnen Wassermengen aus dem gleichen Gefäße entnommen sind, und die wir solange aufrecht erhalten dürfen, als wir dadurch zu praktisch verwertbaren Resultaten kommen, die mit dem Experiment nicht in Widerspruch stehen.

Das hier gewonnene Resultat gilt auch für andere Körper. Die n-fache Masse eines Körpers wird die n-fache Wärmemenge enthalten.

10. Das unter 6. besprochene Ergebnis, daß zwei verschieden warme Körper (Blei und Eisen) durch gegenseitige Berührung auf eine gemeinsame mittlere Temperatur gebracht werden, kann jetzt dadurch gedeutet werden, daß der eine Körper eine Wärmemenge q_1 verloren, der andere eine Wärmemenge q_2 aufgenommen hat.

Es fragt sich nun: Sind wir berechtigt, anzunehmen, daß die Wärmemenge, die der wärmere Körper verloren hat, auf den kälteren übergegangen ist, d. h. daß q_1 und q_2 quantitativ gleich sind?

11. Der Temperaturausgleich zwischen zwei verschieden warmen Körpern geht nicht plötzlich vor sich, sondern mehr oder weniger langsam. Das kann uns dazu dienen, die Anzahl Gramm Wasser zu ermitteln, die von einem vorgegebenen Körper von 15° auf 16° erwärmt wird, wenn er selber sich von einer Temperatur t_1 auf eine andere t_0 durch den Kontakt mit dem Wasser abkühlt.

Wir müssen den auf t_1 Grad erwärmten Körper in ein Quantum Wasser tauchen, herausheben, sobald er t_0 Grad besitzt, und nun mit systematisch veränderter Wassermenge diesen Versuch wiederholen, bis wir eine Wassermenge gefunden haben, die sich während des Experimentes gerade von 15° auf 16° erwärmt. Es sei hier vorausgesetzt, daß t_0 und t_1 größer als 16° sind.

Beträgt die gefundene Wassermenge a Gramm, so können wir jedenfalls aussagen, das Wasser hat a Kalorien aufgenommen.

Das Experiment lehrt nun folgendes. Dieser Wert a ist um so größer, je größer die Temperaturdifferenz $t_1 - t_0$ von einem bestimmten t_0 aus gerechnet ist (aber er ist dieser Differenz nicht proportional). Er ist ferner um so größer, je größer der eingetauchte Körper bei vorgeschriebenem Material ist, und zwar ist er dann der Masse proportional. Und weiter ergibt sich ein quantitatives Resultat: Wenn der Körper beim Abkühlen von t_1 auf t_0 Grad a Kalorien im Wasser erzeugt, beim Abkühlen von $t_2 > t_1$ auf t_1 Grad b Kalorien, so erzeugt er beim Abkühlen von t_2 auf t_0 Grad $a + b$ Kalorien.

12. Das sind die Eigenschaften, die wir von der nach (7) definierten Wärmemenge voraussetzen müssen. Wir sind also, da uns

kein anderer Zwang auferlegt ist, berechtigt, die durch Abkühlung eines Körpers im Wasser erzeugten Kalorien als Maß der Wärmemenge aufzufassen, die (nach 7.) ein Körper bei t_1 Grad mehr besitzt, als bei t_0 Grad.

13. Für die Ausführung der Experimente sei hier erwähnt, daß sich das Resultat nicht ändert, wenn wir den Körper A nicht direkt in Wasser, sondern erst an einem zweiten, B, von t_1 auf t_0 Grad abkühlen. Der Körper B wird sich dabei von einer Temperatur t_0' auf t_1' erwärmen und wenn wir ihn nun wieder in Wasser auf t_0' abkühlen, werden wir die gleiche Menge Wasser von 15^0 auf 16^0 erwärmen können, wie wenn wir den Körper A selber in Wasser getaucht hätten.

Das lehrt uns, daß wir, statt die Wassermenge a auszuprobieren, den Körper von t_1 auf t_0 Grad in einer beliebigen Wassermenge von 15^0, die weniger als a Gramm beträgt, abkühlen dürfen. Das Wasser wird dann wärmer als 16^0, und wir erhalten die richtige Wassermenge a, wenn wir es jetzt mit weiterem Wasser von 15^0 mischen, bis wir im gesamten 16^0, erreicht haben. Wir können uns auch durch ein für allemal angestellte Messungen eine Skala aufstellen, die direkt aus der Temperatur der zu kleinen Wassermenge die Anzahl Kalorien ablesen läßt, die wir schließlich erhalten würden.

Wir können also auf diese Weise direkt bestimmen, wie viele Kalorien ein Gramm Wasser bei einer beliebigen Temperatur mehr besitzt, als bei einer beliebigen tieferen. (Dies gibt uns auch ein Mittel, die in 8. besprochene mittlere Kalorie streng zu definieren.)

14. Die Brauchbarkeit der Definition 12. wird sich wesentlich verbessern, wenn es gelingt, nachzuweisen, daß umgekehrt beim Erwärmen des benutzten Körpers A von t_0 auf t_1 Grad durch einen anderen Körper diesem wieder die gleichen a Kalorien entzogen werden, daß also zu seiner Erwärmung von t_0 auf t_1 Grad ebensoviele Kalorien erforderlich sind, als er bei entsprechender Abkühlung selber abgibt. Der experimentelle Beweis hierfür läßt sich in folgender Weise erbringen.

Der Körper A gebe bei seiner Abkühlung von t_1 auf t_0 Grad a Kalorien ab. Wir wollen ihn jetzt wieder auf t_1 Grad erwärmen, indem wir ihn mit einem hinreichend heißen Körper B die erforderliche Zeit in Berührung bringen.

Der Körper B habe vor der Berührung die Temperatur t_3. Zunächst ermitteln wir einmal, welche Wärmemenge er abgibt, um sich auf eine beliebig festgesetzte Temperatur — zweckmäßig sind z. B. 16 Grad — abzukühlen. Diese Wärmemenge sei b. Wir erwärmen ihn nun wieder auf $t_3{}^0$ und bringen ihn dann mit dem Körper A so-

lange in Berührung, bis sich A von $t_0{}^0$ auf $t_1{}^0$ erwärmt hat, wobei er von B eine Wärmemenge a' aufgenommen haben möge.

Der Körper B wird sich dabei auf eine Temperatur t_2 abgekühlt haben, die zwischen t_1 und t_3 liegt. Wir können jetzt die Wärmemenge c bestimmen, die er abgibt, bis er sich wieder auf 16^0 weiter abkühlt. Diese Wärmemenge c muß wegen der in 13. besprochenen Tatsache, daß man beliebige Zwischenglieder beim Abkühlen einschalten kann, um a' kleiner sein, als b. Das Experiment zeigt aber, daß

$$b - c = a$$

ist, also ist

$$a' = a,$$

und damit ist bewiesen, daß ein Körper zur Erwärmung von einer Temperatur t_0 auf eine andere t_1 ebensoviele Kalorien aufnimmt, als er bei Abkühlung von t_1 auf t_0 abgibt.

Die beiden in 13. und 14. angeführten Beispiele lehren uns, daß die nach 7. und 12. definierte Wärmemenge eine bei den angeführten Versuchen unveränderliche Größe ist. Sie geht nur von einem Körper auf den anderen über, bleibt aber in ihrer Gesamtheit konstant.

15. Es fehlt uns noch eine Definition der Wärmemenge für Temperaturen unter 15 Grad. Diese ist aber nach dem Resultat von 14. leicht, indem wir die Abkühlung einfach durch eine Erwärmung ersetzen dürfen. Ein Körper von einer Temperatur unter 15 Grad werde in Wasser von 16 Grad gebracht, und die Wassermenge bestimmt, die durch seine Erwärmung auf eine vorgegebene Temperatur gerade auf 15^0 abgekühlt wird.

Die Wärmemenge zu ermitteln, die ein Körper zwischen 15^0 und 16^0 besitzt, ist dadurch möglich, daß wir ihn mit Wasser von einer z. B. größeren Temperatur in Berührung bringen. Die Ausführungen in 13. lehren dann das weitere Vorgehen.

16. Die in den vorigen Abschnitten besprochenen Experimente oder Versuche sind in Wirklichkeit vielleicht niemals ausgeführt worden. Ihr Resultat folgt aber aus einer außerordentlich großen Zahl von anderen Experimenten. Da wir hier nicht imstande sind, rein historisch die Entwicklung des Begriffs „Wärmemenge" abzuleiten, müssen wir ideale Experimente anführen, denen sich vielleicht zum Teil sehr große experimentelle Schwierigkeiten in den Weg stellen würden. Dasselbe gilt übrigens auch für viele der in früheren Paragraphen angeführten Versuche, z. B. für die Bestimmung der Erdbeschleunigung durch den freien Fall im Vakuum (§ 23, 2.).

17. Wir wollen hier noch die Definition einer weiteren Größe aus dem Gebiete der Wärmelehre anführen. Die Wärmemenge, die ein Gramm einer gegebenen Substanz von einer Temperatur auf die um einen Grad höhere Temperatur erwärmt, heißt die „spezifische Wärme" ($= c$) der Substanz. Diese ist von der Ausgangstemperatur selbst abhängig. Sogar innerhalb eines Grades ist streng genommen die Wärmemenge, die ein Gramm um einen vorgegebenen Bruchteil eines Grades wärmer macht, von der Ausgangstemperatur innerhalb dieses Grades abhängig, wenn auch nur in geringem Maße. Ähnlich wie bei der Definition der Geschwindigkeit müßten wir also streng genommen die spezifische Wärme durch einen Grenzwert definieren:

$$c_{t_1} = \lim_{t_2 = t_1} \frac{q}{t_2 - t_1},$$

worin q die zur Erwärmung von t_1 auf t_2 erforderliche Wärmemenge bedeutet.

Es wäre logisch auch richtiger, die Wärmeeinheit als einen Grenzwert zu definieren; dann wäre die Wärmeeinheit dem Zahlenwert nach identisch mit der spezifischen Wärme des Wassers bei 15 Grad.

Die Wärmemenge, die einen Körper von gegebener Masse um ein Grad erwärmt, heißt der „Wasserwert" des betreffenden Körpers. Dieser Wasserwert ist also das Produkt aus spezifischer Wärme und Masse des Körpers, und dem Zahlenwert nach gleich der Anzahl Gramm Wasser von 15 Grad, die durch die gleiche Wärmemenge um 1 Grad erwärmt wird. Daraus erklärt sich der Namen „Wasserwert".

§ 25. Das Energieprinzip (Fortsetzung) und Ergänzungsgesetze.

1. Außer durch den Kontakt mit wärmeren Körpern können wir Körper auch auf rein mechanischem Wege erwärmen — z. B. durch Reiben zweier gleich temperierter Körper aneinander —, aber immer nur unter Aufwendung einer äußeren Arbeit, die nachher als mechanische Energie nicht mehr vorhanden ist. Umgekehrt wird immer, wenn eine mechanische Energie verschwindet, eine Erwärmung zu beobachten sein, was bereits in § 23, 4. erwähnt ist.

Daß wir aus der Wärme aber auch Arbeit gewinnen können, lehrt uns die Dampfmaschine.

Das legt den Versuch nahe, die Wärme als eine Energieart aufzufassen, ein Versuch, der durch die Tatsache noch gerechtfertigt wird, daß die Wärmemenge, die beim Verschwinden einer mechanischen Arbeit auftritt, immer proportional dieser Arbeit, und daß umgekehrt die Arbeit, die aus einer Wärmemenge gewonnen wird, immer dieser Wärmemenge proportional ist In beiden Fällen ist der Proportiona-

litätsfaktor derselbe. Ausgenommen sind nur wenige Fälle, bei denen aber nachweisbar andere Energiearten in entsprechender Größe auftreten, wie chemische oder elektrische Energie, auf die wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

2. Es gilt also allgemein

$$A = qW, \tag{1}$$

wenn A die verschwundene Menge von Arbeit — soweit keine andere Energie auftritt — gemessen in irgend welchen Einheiten, W die auftretende Wärmemenge in Kalorien bedeutet. Der Proportionalitätsfaktor q ist von dem angewandten Maßsystem abhängig. Er heißt das „mechanische Wärmeäquivalent".

Das Wärmeäquivalent ist also, wie aus der Gleichung (1) folgt, die Arbeit, die aus der Wärmemenge 1 Kalorie gewonnen werden kann, oder auch die Arbeit, die verschwinden muß, um 1 Kalorie Wärme zu erzeugen.

Messen wir die Arbeit in Grammetern (gr-m), die Wärme in Grammkalorien (cal), oder auch die Arbeit in Kilogrammetern, die Wärme in Kilogrammkalorien (Cal), so ist beide Male

$$q = 427 \, \frac{\text{gr-m}}{\text{cal}} \cdot$$

Also:

1 cal äquivalent mit 427 Grammetern,

1 Cal äquivalent mit 427 Kilogrammetern.

Die Umrechnung nach § 22, 5. ergibt hieraus:

$$q = 419 \cdot 10^5 \, \frac{\text{erg}}{\text{cal}} \cdot \quad A \text{ erg} = q\,(W \text{cal}).$$

3. Wir dürfen nach Feststellung dieser Tatsache die Einheiten der Wärme gleich $\frac{1}{q}$ cal festlegen, statt 1 cal. Dann wird eine dieser neuen Wärmeeinheiten äquivalent mit einem erg sein, und wir können diese neue Einheit direkt als 1 erg bezeichnen, also die Wärmemenge in Arbeitseinheiten messen. Ja, wir können direkt die Annahme machen:

Die Wärme ist eine Form der Energie, ebenso gut, wie kinetische und potentielle Energien Formen der Energie sind.

Menge in einer anderen oder der gleichen Energieform auftreten.

Die Fassung: „Der Energieinhalt in einem abgeschlossenen Systeme bleibt quantitativ unverändert", ist ohne weiteren Kommentar unverständlich. Der Begriff „abgeschlossenes System" ist nicht allgemein zu definieren. Der dieser Fassung zugrunde liegende Gedanke ist etwa durch folgenden wiederzugeben. Gehen in einem Raume irgend welche Energieumsetzungen vor sich, so läßt sich eine diesen Raum umschließende in sich geschlossene Fläche finden, derart, daß die außerhalb dieser Fläche erfolgenden Vorgänge sich unabhängig von den im Innern erfolgenden abspielen. In ihrem Innern bleibt dann der Energieinhalt konstant. Der von dieser Fläche umschlossene Raum kann als das „abgeschlossene System" aufgefaßt werden. Die möglichen Dimensionen eines solchen Systems haben den Grenzwert Unendlich. So spielen sich die durch die Sonnenstrahlung hervorgebrachten Energieumsetzungen in einem unendlich großen System ab.

5. Das Energieprinzip ist nicht beweisbar, ist aber in so vielen Fällen bestätigt, daß es die Bedeutung einer apriorischen Gewißheit erworben hat. Wenn wir es einmal durchbrochen finden, werden wir weit eher die Vermutung hegen, irgend eine vielleicht bis dahin noch unbekannte Energieart übersehen zu haben, als daß wir es darum aufgeben. Dieser Fall ist z. B. kürzlich bei Entdeckung des Radiums eingetreten, das dauernd Strahlungsenergie erzeugt, ohne daß man weiß, woher diese stammt.

Die Energieformen, die wir bisher außer den mechanischen Energien und der Wärmeenergie kennen, sind chemische, elektrische, magnetische Energie, Strahlungsenergie, und zwar Licht-, Wärme-, Kathoden-, Röntgen-, Radiumstrahlung.

6. Historische Entwicklung des Energieprinzips.

Die Erkenntnis des Energieprinzips ist, wie es bei sehr vielen Entdeckungen der Fall ist, sehr stufenweise vor sich gegangen, so daß man streng genommen keinen Einzelnen als Entdecker, keine Jahreszahl als die der Entdeckung dieses Gesetzes ansprechen kann.

Schon Galilei operierte um 1600 mit dem Satze, daß ein fallender Körper durch die im Falle erlangte Geschwindigkeit ebenso hoch steigen kann, als er gefallen ist.

Damit hatte Galilei also die Umsetzbarkeit von kinetischer Energie in potentielle ausgesprochen, ohne sie mathematisch formuliert zu haben. Die beiden Energiebegriffe waren eben noch nicht geschaffen. Descartes machte um 1644 den ersten Anfang dazu,

indem er[1]) die Konstanz der Größe mv beim Zusammentreffen mehrerer bewegter Körper behauptete. Darüber entspann sich gegen Ende desselben Jahrhunderts ein langer Streit zwischen Leibniz[2]) und den Anhängern Descartes, indem Leibniz die Größe mv^2 als die konstant bleibende „Kraft", die „lebendige Kraft" erklärte. Der Streit artete in einen Streit um Worte aus, indem die Cartesianer etwa das, was wir heute noch als Kraft bezeichnen, das Produkt aus Masse und Beschleunigung, das allerdings nicht dem Gesetz von der Erhaltung unterliegt, Leibniz dagegen den doppelten Betrag unserer kinetischen Energie als „Kraft" auffaßte. Dieser Dualismus zieht sich, die Begriffe verwirrend, bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts hinein und der Streit zwischen Leibniz und den Cartesianern bewegte im Anfang des 18. Jahrhunderts einen großen Teil der wissenschaftlichen Welt, indem sich Papin, Clarke, Mairan einerseits, Joh. Bernoulli, s'Gravesande, Hermann Wolf andererseits daran beteiligten. Auch Voltaire, Kant und andere griffen mit ein.

Jean Victor Poncelet[3]) brachte im Jahre 1826 den Namen Arbeit für das Produkt von Kraft und Weg zur Anerkennung, nachdem er schon früher, z. B. von Young 1807, öfters gebraucht worden war. Poncelet erklärte: „Arbeit oder lebendige Kraft kann niemals aus nichts gewonnen, oder auch absolut verloren werden." Dabei mußte Poncelet nach seinen Kenntnissen aber alle nichtmechanischen Veränderungen ausschließen, und sein Satz hatte somit mehr die Bedeutung eines mathematischen Hilfssatzes als die eines apodiktischen Gesetzes.

Zu einer klaren Erkenntnis der Allgemeingültigkeit des Energieprinzips fehlte aber noch im Anfang des vorigen Jahrhunderts zweierlei: erstens eine genaue Präzisierung des Energiebegriffs, wie wir ihn jetzt haben, zweitens die Erkenntnis anderer Energieformen als der mechanischen, besonders der Wärmeenergie.

Unter dem Namen „Kraft" lief, wie gesagt, vor Poncelet alles, was wir jetzt unter Kraft, und alles, was wir jetzt unter mechanischer Energie verstehen. Das mußte eine Erkenntnis des Energieprinzips erschweren, da ein Teil dieser Kraft, nämlich was wir heute unter Kraft verstehen, entschieden nicht unveränderlich war. Die Namen „lebendige Kraft" für die „kinetische Energie" und „Erhaltung der Kraft" statt „Erhaltung der Energie", die auch heute noch angewandt werden, sind Reste dieser Unklarheit älterer Begriffe.

Daß ein Unterschied zwischen Kraft im einen und im anderen

1) In den „Principia philosophiae" II. § 36.

2) Leibniz, „Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii etc." in den Acta eruditorum 1686.

3) Geb. am 1. Juli 1788 in Metz, gest. am 23. Dezember 1867 in Paris.

Sinne vorlag, ahnten wohl manche. Ph. Young hat deswegen den Namen „Energie“ im Sinne unserer mechanischen Energie eingeführt[1]), aber ohne damit allgemein durchzudringen. In allgemeinster Bedeutung ist der Name „Energie“ und „Gesetz von der Erhaltung der Energie“ erst 1853 von Rankine[2]) eingeführt, und dann allgemein akzeptiert worden, nachdem dieses Gesetz in seiner weitesten Allgemeingültigkeit erkannt worden war. Vorher war der Dualismus also wohl von einzelnen erkannt, aber nicht allgemein beseitigt worden.

Präzis definiert ist unser Energiebegriff, freilich auch unter dem Namen „Kraft“, aber doch allgemein, auch über die Mechanik hinaus, in der Arbeit von Robert Mayer, die zum ersten Male die Allgemeingültigkeit des Energiegesetzes ausspricht, und die den Namen führt: „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur“.[3])

Das Hauptverdienst von Mayer ist aber die Erkenntnis der Äquivalenz von Wärme und Arbeit und die Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes. (In den beiden genannten Arbeiten veröffentlicht.) Auch hierin hatte Mayer in gewissem Sinne Vorläufer. 1798 erkannte Graf Rumford, daß (beim Ausbohren eines Kanonenlaufes) durch Arbeit Wärme erzeugt würde. Aber die Erkenntnis der Äquivalenz fehlte. Im Jahre 1824 behauptete Sadi Carnot[4]), daß der Übergang einer Wärmemenge von einem wärmeren auf einen kälteren Körper einer bestimmten Arbeit äquivalent sei. Den Proportionalitätsfaktor hatte er etwa in der Größe unseres Wärmeäquivalentes erkannt. Aber er glaubte, daß diese Wärmemenge bei dem genannten Übergange konstant bliebe. Er wußte nicht, daß, wenn von dieser Wärmemenge eine Arbeit geleistet wurde, eine dieser Arbeit proportionale Wärmemenge als solche verloren ginge.

Diese Tatsache zu erkennen, die für das Energieprinzip von

1) In „Lectures on natural philosophy“, London 1808, I. p. 79.

2) In „On the general law of the transformation of energy“, Phil. Mag. 4. V. 1853.

3) Ann. d. Chemie u. Pharmacie, Mai 1842. Klarer wiederholt und vollkommener dargestellt ist das Gleiche in einer zweiten Arbeit: „Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel“. Heilbronn 1845. Beide Arbeiten sind abgedruckt in: „Die Mechanik der Wärme“ von J. R. Mayer. Stuttgart 1884.

4) Nicolas Léonard Sadi Carnot (Sohn von Lazare Nicolas Marguerite Carnot, der unter der ersten Republik und unter Bonaparte Leiter des Kriegswesens war, und Oheim des im Jahre 1894 ermordeten Präsidenten der dritten Republik), geb. 1. Juni 1796 in Paris, gest. ebenda 24. August 1832, war eine Zeitlang Genieoffizier. In „Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance“ (Paris 1824, deutsch von Ostwald, Klassiker Nr. 37, Leipzig 1892) sind diese Gedanken über die Wärme niedergelegt.

grundlegender Bedeutung war, blieb Robert Mayer überlassen. Er berechnete den Proportionalitätsfaktor, das „mechanische Wärmeäquivalent", aus dem Verhältnis der spezifischen Wärmen der Gase, wie er dies vorfand, also ohne eigene Experimente.[1])

Fast gleichzeitig mit R. Mayer und jedenfalls unabhängig von ihm hat ein englischer Forscher, J. P. Joule[2]), die Allgemeingültigkeit des Energiegesetzes erkannt. Joule wurde bei elektrischen Versuchen durch die Stromwärme darauf geführt, Wärme als Energieart zu erkennen. Er hat eine Anzahl Experimente zur Bestimmung des Wärmeäquivalents ausgeführt, indem er z. B. ein im Wasser laufendes Schaufelrad durch ein fallendes Gewicht in Gang setzte. Bei hinreichend langsamem Fall des Gewichts wird seine ganze potentielle Energie im Schaufelradbehälter in Wärme umgesetzt.

Als dritter im Bunde derer, denen wir das Energiegesetz zu verdanken haben, ist Helmholtz[3]) zu nennen, der sich als Mathematiker der Frage annahm, das Energieprinzip als mögliches Gesetz voraussstellte und die mathematisch gewonnenen Folgerungen mit der Erfahrung verglich.

7. Das Energieprinzip, oder, wie es in der Wärmelehre heißt, der „erste Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie", ist eine notwendige, aber noch keine hinreichende Bedingung für die Kenntnis der Energieumsetzung. Über folgende Punkte sagt das Energieprinzip nichts aus: erstens über die Richtung, in der eine Energieumwand-

---

1) Julius Robert Mayer ist am 25. November 1814 in Heilbronn geboren, wo sein Vater Apotheker war. 1832 begann er seine Studien der Medizin in Tübingen und setzte sie in München und Wien fort. Er ging dann als holländischer Schiffsarzt nach Java. Dort machte er Beobachtungen über den Stoffverbrauch und die produzierte Wärme am Menschen, und das brachte ihn zu seinen wärmetheoretischen Entdeckungen, die er 1842 veröffentlichte. Es hat viele Jahre gedauert, bis sich sein Verdienst Anerkennung verschafft hatte. Mayer starb am 20. März 1878 an Lungenentzündung.

2) James Prescott Joule ist am 24. Dezember 1818 in Salford bei Manchester geboren, als Sohn des Besitzers einer Brauerei, die er selber später übernahm. Er wurde erst spät zur Ausführung physikalischer, besonders elektrischer und elektromagnetischer Untersuchungen geführt. J. ist am 11. Oktober 1889 in Sale gestorben.

3) Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz ist am 31. August 1821 in Potsdam als Sohn eines Gymnasiallehrers geboren. Er studierte von 1838 an Medizin, war später Militärarzt und Lehrer der Anatomie an der Kunstakademie in Berlin. 1849 wurde er Professor der Physiologie in Königsberg, 1855 in Bonn, 1858 in Heidelberg, 1871 Professor der Physik an der Berliner Universität. Im Jahre 1888 wurde er Präsident der neu gegründeten Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Charlottenburg. Er ist in dieser Stellung am 8. September 1894 gestorben. (Königsberger, Hermann v. Helmholtz, 3 Bde. Braunschweig 1902, 1903.)

lung vor sich geht, zweitens über die Geschwindigkeit, mit der die Umsetzung sich vollzieht, drittens über den Grenzwert, bis zu dem sie vor sich geht.

Was den ersten Punkt anbetrifft, so sei als Beispiel ein Moment in der Bewegung eines Pendels angeführt, in dem das Pendel aus seiner höchsten Lage fallend, die tiefste noch nicht erreicht hat. Es besitzt hier das Pendel sowohl kinetische als auch potentielle Energie und die potentielle ist im Begriff, sich in kinetische umzusetzen. Nach Ablauf einer gewissen Zeit hat das Pendel den gleichen Punkt von unten her kommend wieder erreicht. Es besitzt jetzt wieder genau die gleiche Menge potentieller sowie kinetischer Energie, wie vorher. Aber die Energieumsetzung erfolgt in entgegengesetztem Sinne, die kinetische Energie nimmt ab und die potentielle vermehrt sich.

Wenn wir also ohne Kenntnis der Vorgeschichte einen Zeitpunkt der Pendelbewegung herausgreifen, können wir aus der Kenntnis der Energie allein über die Richtung der Energieumsetzung nichts aussagen.

Ähnliches liegt bei anderen Energieumsetzungen auch vor. In jedem einzelnen Falle wird sich diese Frage leicht erledigen lassen, ebenso wie die nach der Geschwindigkeit der Umsetzung. Beim Pendel ist diese Geschwindigkeit, also die in der Zeiteinheit umgesetzte Energiemenge, von der Länge des Pendels und dem jeweiligen Pendelwinkel, der „Phase“, abhängig.

Weit schwieriger ist die Frage nach dem Grenzwert, bis zu dem eine Energiemenge in eine andere umgesetzt wird. Diese Frage ist allgemein nicht gelöst. Sie ist von besonderer Wichtigkeit in dem Falle, wo aus Wärme Arbeit gewonnen werden soll. Es ergibt sich hier die Tatsache, daß, wenn wir irgend einem Wärmereservoir eine Wärmemenge entziehen, um aus ihr Arbeit zu gewinnen, ein Teil dieser Wärmemenge dazu verbraucht wird, ein anderes kälteres Wärmereservoir, etwa die eine Maschine umgebende Luft, zu erwärmen. Oder mit anderen Worten: Wenn eine Wärmemenge einem Reservoir entzogen wird, kann nur ein Teil von ihr in Arbeit umgesetzt werden. Ein anderer Teil wird Wärme bleiben, nur von höherer auf niedere Temperatur übergehen und für die Arbeitsgewinnung verloren sein. Das Verhältnis dieser beiden Wärmemengen im günstigsten Falle, das von der Anfangs- und Endtemperatur abhängig ist, bestimmt der sogenannte „zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie“, auf dessen Ableitung und Inhalt wir hier nicht eingehen wollen. Dieser zweite Hauptsatz gibt übrigens bloß den oberen Grenzwert der gewonnenen Arbeit an. Die Unvollkommenheit unserer Maschinen hat zur Folge, daß er in Wirklichkeit noch nicht er-

Der „zweite Hauptsatz" der Wärmetheorie stammt von Clausius[1]), der den sogenannten „Carnotschen Kreisprozeß" zu seiner Ableitung heranzog und umgestaltete (vgl. § 26, B, 16. u. f.).

§ 26. **Anwendungen des Energieprinzips.**

A. Das physikalische oder materielle Pendel.

1. Wir wollen von dem Energieprinzip eine Anwendung zunächst auf rein mechanische Vorgänge machen, d. h. wir wollen annehmen, wir hätten bei dem hier folgenden Beispiel nachgewiesen, daß nur mechanische Energien ineinander übergeführt werden und keine anderen Energieformen, speziell keine Wärme, auftreten. Ob diese Bedingung hinreichend erfüllt ist, hat die Physik bei jeder einzelnen Versuchsanordnung zu prüfen. Bei einer solchen Prüfung wird sie im allgemeinen so verfahren, daß sie in den mathematischen Ansatz alle die Energieformen einführt, die sie qualitativ zunächst wahrnimmt. Dabei kann es vorkommen, daß das mathematische Resultat Widersprüche mit dem Experiment liefert und wir haben dann den Schluß zu ziehen, daß irgend welche Energiearten übersehen seien.

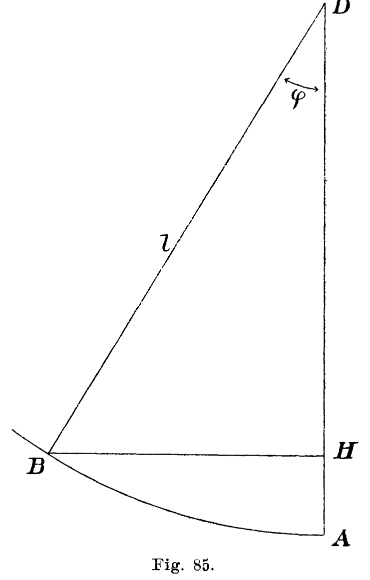


Fig. 85.

2. Wir machen die Annahme, daß bei einem gegebenen mathematischen Pendel nur eine wechselnde Umsetzung zwischen kinetischer und potentieller Energie stattfinde. Die Pendelmasse sei m, der Ausschlagwinkel in einem bestimmten Moment sei φ (Fig. 85).

In diesem Moment besitzt die Pendelmasse die potentielle Energie

$$P = mg \cdot \overline{HA} = mgl(1 - \cos\varphi),$$

und ihre kinetische Energie ist

$$K = \frac{m v^2}{2} = \frac{m l^2}{2} \varphi'^2,$$

1) Rudolf Julius Emanuel Clausius ist in Köslin am 2. Januar 1822 geboren. Er studierte seit 1840 in Berlin, wo er sich später habilitierte und 1850 Lehrer an der Artillerie- und Ingenieurschule wurde. 1855 wurde er Professor in Zürich, 1867 in Würzburg und 1869 in Bonn, wo er am 24. August 1888 starb. Cl. gilt als der Begründer der „mechanischen Wärmetheorie".

wenn wir unter φ' die Winkelgeschwindigkeit im betrachteten Moment verstehen.

Nach dem Energieprinzip muß nun jeweils die Zunahme von P in einem Zeitabschnitt t gleich der Abnahme von K im gleichen Zeitabschnitt sein, d. h. die Summe von P und K muß während der Bewegung des Pendels konstant bleiben. Es wird also

$$\frac{ml^2}{2}\varphi'^2 + mgl(1 - \cos\varphi) = \text{const.},$$

oder, da die Produkte mgl und $ml/2$ für sich konstant bleiben,

$$(1) \qquad l\varphi'^2 - 2g\cos\varphi = \text{const.}$$

Den Wert der Konstanten erhält man, wenn man die linke Seite für den Moment berechnet, in dem die Geschwindigkeit gleich Null ist, in dem also das Pendel den größten Winkel φ_0, die „Amplitude", mit dem Lot bildet. Für diesen Moment berechnet sich

$$-2g\cos\varphi_0 = \text{const.},$$

so daß die Gleichung (1) die Form erhält

$$(2) \qquad 2g\cos\varphi - l\varphi'^2 = 2g\cos\varphi_0.$$

Gleichung (2) ist die „Bewegungsgleichung" des mathematischen Pendels. Aus ihr könnten wir die Geschwindigkeit berechnen, die der Pendelpunkt in jedem Moment besitzt, und aus dieser Geschwindigkeit müßte sich wieder der Ort des Pendels in jedem Moment, und damit seine ganze Bewegungsart berechnen lassen. Sie müßte speziell unter der vereinfachenden Annahme, daß φ_0 selbst nur klein ist, als Schwingungsdauer den früher (§ 17, D, 16.) gefundenen Wert

$$(3) \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

liefern.

3. Ein materielles Pendel ist ein beliebiger um eine Achse D drehbarer Körper Q, den wir uns aus unendlich vielen einzelnen mathematischen Pendeln, „Elementarpendeln", je mit einer unendlich kleinen Pendelmasse m versehen, bestehen denken können (Fig. 86). Aber diese einzelnen „Elementarpendel" sind in ihrer Bewegung durch einander beeinflußt. Wir dürfen nicht die Bewegungsgleichung für jedes einzelne Pendel ansetzen; wohl aber dürfen wir das Energieprinzip auf das ganze Pendel anwenden.

DB sei in einem beliebigen Moment der Bewegung ein solches Elementarpendel mit der unendlich kleinen Masse m, r die Pendellänge, AD die Richtung von r während der Gleichgewichtslage des

Pendels. Es sei φ die momentane Abweichung aus dieser Lage, α der Winkel, den r in seiner Ruhelage, also AD, mit dem Lot DL bildet, gerechnet von 0^0 bis 360^0 in einem ein für allemal festgelegten Drehsinn, etwa mit dem Uhrzeiger. Wir bezeichnen ferner noch $\varphi + \alpha$ mit ψ. φ besitzt für alle Elementarpendel in jedem Moment den gleichen Wert, während α für die einzelnen Elementarpendel verschiedene, nur für gewisse Gruppen unter ihnen gleiche aber zeitlich unveränderliche Werte besitzt.

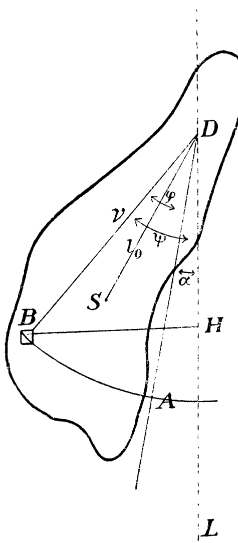


Fig. 86.

Es sei noch S der Schwerpunkt des Pendels, l_0 sein Abstand von der Drehachse. Da wir die Kräfte auf alle Elementarmassen durch eine im Schwerpunkt angreifende vertikal zur Erde gerichtete Kraft ersetzen können, und in der Ruhelage, also bei Gleichgewicht, deren Drehmoment verschwinden muß, so muß der Hebelarm, in dem sie angreift, gleich Null sein. Der Schwerpunkt muß in der Ruhelage vertikal unter der Drehachse liegen; der dem Schwerpunkt zukommende Winkel α, den wir mit α_0 bezeichnen wollen, muß verschwinden.

4. Es ist die potentielle Energie einer Elementarmasse m, wie beim mathematischen Pendel in einem gegebenen Moment der Bewegung

$$P = mgr(1 - \cos\psi),$$

die kinetische Energie im gleichen Moment

$$K = \frac{mr^2}{2}\psi'^2;$$

aber es ist nicht mehr $P + K = \text{const.}$, sondern

$$\Sigma P + \Sigma K = \text{const.},$$

oder, wenn wir wieder alle Größen, die sich bei der Bewegung nicht ändern, so weit möglich auf die rechte Seite schaffen und unter dem Symbol „const.“ mit einbegreifen,

$$\Sigma mr^2\psi'^2 - 2g\,\Sigma mr\cos\psi = \text{const.} \tag{4}$$

Hierin ist ψ' die Zunahme, die ψ in der Zeiteinheit erfährt. Da α unverändert bleibt, folgt $\psi' = \varphi'$ und φ' hat wie φ für alle Massenpunkte den gleichen Wert. Es ist ferner

$$\Sigma mr\cos\psi = \Sigma mr\cos(\varphi + \alpha) = \cos\varphi\,\Sigma mr\cos\alpha - \sin\varphi\,\Sigma mr\sin\alpha.$$

Da $r \sin \alpha$ der Abstand der Elementarmasse m in ihrer Ruhelage von der durch D gelegten Vertikalebene, $l_0 \sin \alpha_0$ das gleiche für den Schwerpunkt ist, so folgt nach § 9, 5. ($P_v = mg$):

$$\Sigma mr \sin \alpha = l_0 \sin \alpha_0 \Sigma m = 0.$$

Ebenso ist $r \cos \alpha$ der Abstand der Elementarmasse m von der durch D gelegten Horizontalebene, also

$$\Sigma mr \cos \alpha = l_0 \cos \alpha_0 \Sigma m = l_0 \Sigma m.$$

Es ist schließlich Σmr^2, wie ml^2 in Nr. 2 das Trägheitsmoment (§ 19, 5.) des Pendels bezüglich seiner Drehachse.

Aus Gleichung (4) wird somit

$$\varphi'^2 \Sigma mr^2 - 2g \cos \varphi \, l_0 \Sigma m = \text{const.},$$

oder, wenn wir mit $l_0 \Sigma m$ durchdividieren und den auf der rechten Seite auftretenden konstanten Wert wieder aus der Amplitude φ_0 von φ berechnen,

$$2g \cos \varphi - L\varphi'^2 = 2g \cos \varphi_0, \tag{5}$$

worin

$$L = \frac{\Sigma mr^2}{l_0 \Sigma m}$$

die Dimensionen einer Länge besitzt.

5. Der Vergleich der Gleichungen (2) und (5) lehrt uns folgendes:

Der Winkel φ, den die im Körper feste Linie l_0 jeweils mit der Horizontalen einschließt, wird sich zeitlich ebenso verändern, wie der Winkel eines mathematischen Pendels von der Länge

$$L = \frac{\Sigma m r^2}{l_0 \Sigma m}.$$

Dieses mathematische Pendel heißt das „korrespondierende Pendel", weil es eben identische Schwingungen ausführt, wie das materielle Pendel. Daraus sehen wir, daß die Schwingungsdauer des materiellen Pendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{l_0 g \Sigma m}} \tag{6}$$

ist.

6. Wir wollen uns die Länge L von D aus in der Richtung nach dem Schwerpunkt S hin aufgetragen denken, so daß sie bis D_1 (Fig. 87) reichen möge; wir legen durch D_1 und die Drehachse D eine Ebene E (senkrecht zur Ebene der Figur).

Es ist

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m\,(l_0^{\,2} + d^2 - 2\,l_0\,d \cos\beta),$$

wenn β den Winkel zwischen d und l_0 bedeutet. Wenn wir konstante Glieder aus dem Summenzeichen heraussetzen, folgt

$$\Sigma m r^2 =$$
$$l_0^{\,2}\,\Sigma m + \Sigma m d^2 - 2\,l_0\,\Sigma m d \cos\beta.$$

Da $d \cos\beta$ der Abstand des Punktes m von der Ebene E ist, so muß (nach § 9, 5.) $\Sigma m\,d \cos\beta/\Sigma m$ der Abstand des Schwerpunktes von dieser Ebene, also gleich 0 sein, und es folgt:

$$\Sigma m r^2 = l_0^{\,2}\,\Sigma m + \Sigma m\,d^2.$$

$\Sigma m d^2$ ist das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der durch S gehenden zu D parallelen Drehachse. Daraus folgt der Satz:

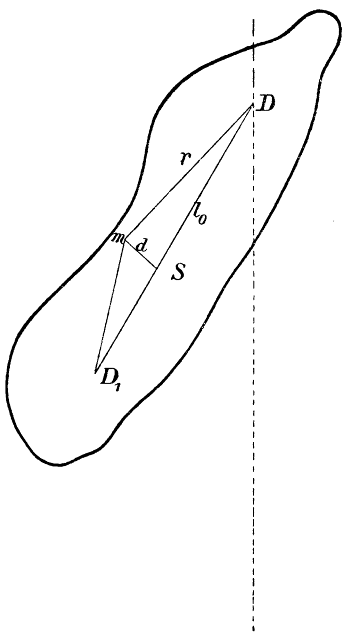


Fig. 87.

Das Trägheitsmoment eines Körpers um eine beliebige Achse D ist gleich seinem Trägheitsmoment um eine zu D parallele durch den Schwerpunkt gelegte Achse, vermehrt um das Trägheitsmoment der im Schwerpunkt konzentriert gedachten Gesamtmasse (Σm) bezüglich der Drehachse D.

Es wird also die Länge des korrespondierenden Pendels

$$L = \frac{l_0^{\,2}\,\Sigma m + \Sigma m\,d^2}{l_0\,\Sigma m} = l_0 + \frac{\Sigma m\,d^2}{l_0\,\Sigma m}. \tag{7}$$

7. Wir wollen uns jetzt durch D_1 eine zu D parallele Achse gelegt und uns den Körper so aufgehängt denken, daß er um diese neue Drehachse schwingen kann. Die dem Körper jetzt korrespondierende Pendellänge wird dann analog (7)

$$L' = l_1 + \frac{\Sigma m\,d^2}{l_1\,\Sigma m} \tag{8}$$

sein, wo l_1 den Abstand des Schwerpunktes von der neuen Drehachse bedeutet. Es ist also

$$l_1 = \overline{D_1 S} = L - l_0,$$

und nach (7)

$$l_1 = \frac{\Sigma m d^2}{l_0 \Sigma m}.$$

Wenn wir das in (8) einsetzen, folgt:

$$L' = \frac{\Sigma m d^2}{l_0 \Sigma m} + l_0 = L.$$

Die korrespondierenden Pendellängen für die beiden durch L voneinander getrennten Achsen sind identisch.

Diese Tatsache führt zu einem Verfahren, die korrespondierende Pendellänge eines materiellen Pendels experimentell zu ermitteln. Man bringt an einem materiellen Pendel zwei gegeneinander verschiebbare Drehachsen an und variiert deren Lage so lange, bis die Schwingungsdauer bei Schwingung um die eine gleich der bei Schwingung um die andere ist. Ein derartig eingerichtetes Pendel heißt ein „Reversionspendel“; es dient dazu, die zu einer meßbaren Schwingungsdauer gehörende Länge eines mathematischen Pendels zu ermitteln, woraus man die Gravitationskonstante g bestimmen kann.

B. Anwendungen auf Gase. Der Carnotsche Kreisprozeß.

1. Die drei „Aggregatzustände“ Fest, Flüssig, Gasförmig wollen wir durch die folgenden Eigenschaften definieren.

Ein fester Körper ist ein solcher, der seine geometrische Gestalt nicht ändert, wenn wir die auf einen beliebigen Teil von ihm wirkende Kraft um eine beliebig große Zusatzkraft vermehren, unter Konstanthaltung der auf die übrigen Teile wirkenden Kräfte. Streng genommen gibt es keine Körper, die diese Bedingung erfüllen. Bei hinreichend großen Kräften werden alle Körper ihre Gestalt ändern. Liegen aber Kräfte vor, die diese Größe nicht erreichen, so wird die Gestaltsänderung unmeßbar klein sein, und wir können die Körper als „fest“ („starr“) im Sinne unserer Definition ansehen.

Flüssigkeiten und Gase ändern unter den genannten Umständen ihre Gestalt und zwar meßbar, wenn die Zusatzkraft meßbar ist. Das soll heißen: Erst wenn die Zusatzkraft — z. B. der Druck mit dem Finger auf eine Stelle der Oberfläche — nicht mehr wahrnehmbar ist, wird auch die Gestaltsänderung nicht mehr wahrnehmbar sein. Diese Definition enthält eine gewisse Willkür, da die größere oder geringere Vollkommenheit der Meßapparate für Kraft- und Gestaltsänderung dabei eine Rolle spielt. In der Tat ist aber der Begriff Flüssigkeit auch im volkstümlichen Sinne ein ungenauer Begriff. Die „Beweglichkeit“ beim Schütteln tritt auch nur bei hinreichend kräftigem Schütteln auf. Eine Gummilösung ist nur

wenig beweglich, wird aber doch als Flüssigkeit anzusehen sein. Ein Stück Pech wird je nach den Ansprüchen, die wir machen, als fester Körper — wenn die wirkenden Kräfte klein sind — oder als Flüssigkeit — wenn sie eine gewisse Größe erreicht haben — anzusehen sein.

Eine Flüssigkeit besitzt außerdem die Eigenschaft, daß im Innern einer gegebenen Menge von ihr Kräfte wirken, die ihre Oberfläche bei unverändertem Volumen möglichst klein — also zu einer Kugel — auszugestalten suchen. Daran werden sie durch andere äußere Kräfte — z. B. die Schwere, die sie in die Ecken eines Gefäßes hineinpreßt — gehindert. Aus den inneren und äußeren Kräften läßt sich die resultierende Gestalt einer gegebenen Flüssigkeitsmenge berechnen (vgl. den Abschnitt über Kapillarität).

Von Flüssigkeiten haben wir außerdem kompressible, d. h. solche, die unter dem Einfluß äußerer Kräfte außer der Gestalt auch ihr Volumen verändern, und inkompressible, die unter allen Umständen konstantes Volumen beibehalten, zu unterscheiden. Diese letzteren gibt es wieder in Wirklichkeit streng genommen nicht, wohl aber solche, bei denen wir praktisch die Kompressibilität vernachlässigen können.

Ein Gas hat die Eigenschaft, daß es jeden durch feste Wände umschlossenen Raum, wenn es sich allein in ihm befindet, ganz erfüllt, gleichgültig, welche Menge in diesem Raume eingeschlossen ist, gleichsam als wenn die einzelnen Teile des Gases von einander zu fliehen strebten. Diese Teile stehen also unter der Wirkung einer „inneren“ Kraft, die eine Verschiebung unter ihnen hervorzubringen sucht, wenn sie nicht durch eine Gegenkraft, etwa die Festigkeit der Wandung, daran gehindert wird.

2. In ein Volumen V, das von einem Gase angefüllt ist, denken wir uns eine ebene Fläche AB gelegt. Wenn wir auf einer Seite dieser Fläche, etwa rechts in der Figur 88, alles Gas entfernen könnten, so würde offenbar das links der Fläche befindliche Gas nachströmen, und wir müßten, um das zu verhindern, Kräfte K in

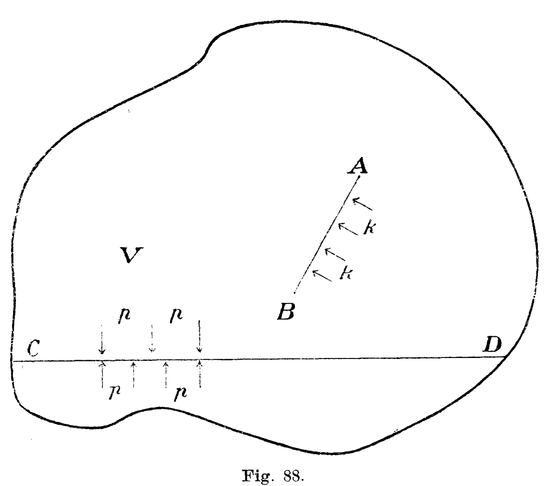


Fig. 88.

Richtung der Pfeile wirken lassen, die gerade so groß zu wählen sind, daß sie die die Gasströmung verursachenden inneren Kräfte K' kompensieren. Durch diese Kräfte könnten wir die inneren Kräfte messen. Ist das Gas rechts von der Fläche vorhanden, so übt es selbst Gegenkräfte K aus, die dann ebenso groß sind wie K', wenn die ganze Gasmasse in Ruhe ist. Es ist denkbar, daß die rechts der Fläche befindliche Gasmasse kleinere Kräfte ausübt. Dann werden die Kräfte K' Gas durch die Fläche von links nach rechts hindurchtreiben. Die Gasmasse rechts von der Fläche vermehrt sich und dadurch wachsen erfahrungsgemäß die Kräfte K. Das wird so lange erfolgen, bis K gleich K' geworden und Gleichgewicht eingetreten ist.

In einer in Ruhe befindlichen Gasmasse haben wir also überall Kräfte auf jede Fläche, die wir uns im Innern gelegt denken, wirkend anzunehmen, und zwar von beiden Seiten gleiche Kräfte. Diese Kräfte stehen normal zu der Fläche. Denn wenn sie gegen die Fläche geneigt wären, hätten sie eine Tangentialkomponente, die durch keine auf der anderen Seite gelegene Kraft kompensiert wird. Es wäre also Ruhe nicht vorhanden.

Die auf die Einheit einer ins Innere des Gases gelegten Fläche wirkende Kraft nennen wir den „Druck" (p) des Gases. Der Druck ist also eine Kraft dividiert durch eine Fläche. Als Einheit wählt man daher zweckmäßig 1 dyn/cm^2. Ein solcher Druck wirkt auch vor allem auf die Gefäßwand, wie auf jede andere Fläche, und dadurch bietet sich Gelegenheit, ihn zu messen, indem wir etwa einen Teil der Wand beweglich machen und durch äußere meßbare Kräfte, etwa Gewichte, in Ruhe halten.

3. Auf die Teile eines Gases werden im allgemeinen noch von außen Kräfte wirken, z. B. die Schwere (vgl. Nr. 5). Der Druck ist dann im allgemeinen eine Funktion des Ortes. Es gilt aber immer der Satz:

> An einem gegebenen Orte im Innern eines im Gleichgewicht befindlichen Gases ist der Druck von der Richtung der gedachten Fläche unabhängig.

Wir können das folgendermaßen beweisen, wobei wir als äußere Kräfte nur die Schwerkräfte annehmen wollen: In den betrachteten Punkt 0 legen wir den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen z-Achse der äußeren Kraft, also der Schwerkraft, parallel sei (Fig. 89). Wir legen nun eine beliebige schräge Fläche durch die Achsen des Systems, so daß die Koordinatenebenen auf ihr ein Dreieck f herausschneiden, und durch f und die Koordinatenebenen ein tetraedrisches Volumen begrenzt ist. Dieses Volumen

denken wir uns starr gemacht. Die „Dichte“ des Gases, d. h. die Masse der Volumeneinheit, sei σ; x, y, z seien die Koordinatenabschnitte; $\frac{h}{3} f\sigma$ ist die Masse des Volumens, wenn h seine Höhe, d. h. das Lot von o auf die Fläche f ist, und

$$\frac{h}{3} f\sigma g$$

also die auf das Volumen wirkende Schwerkraft. Vertikal nach oben wirkt die Druckkraft auf das Dreieck der xy-Ebene

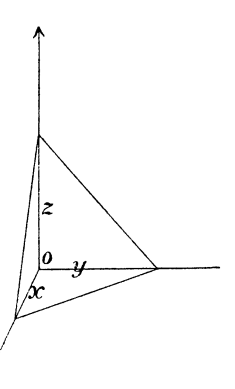


Fig. 89.

$$p_1 \frac{xy}{2},$$

wenn p_1 der Druck auf die xy-Ebene ist, und vertikal nach unten noch die Vertikalkomponente der Druckkraft auf f

$$pf \cos \alpha,$$

wenn α den Winkel bedeutet, den f mit der xy-Ebene einschließt; $f \cos \alpha$ ist aber gleich $\frac{xy}{2}$. Also wirken insgesamt in Richtung der positiven z-Achse die Kräfte

$$-\frac{h}{3} f\sigma g + p_1 f \cos \alpha - pf \cos \alpha.$$

Diese Summe muß verschwinden, wenn Gleichgewicht herrschen soll. Es muß also:

$$(p_1 - p) - \frac{h}{3} \frac{\sigma g}{\cos \alpha} = 0$$

werden. Machen wir das Volumen des Tetraeders unendlich klein, so wird h unendlich klein und es wird

$$p_1 = p.$$

Ist p_2 der Druck auf die Fläche $\frac{xz}{2}$, p_3 der auf $\frac{zy}{2}$, so kann man in gleicher Weise, wobei noch das Glied der Schwerkraft wegfällt, beweisen:

$$p_2 = p,$$
$$p_3 = p.$$

Da die Winkel α, β, γ willkürlich sind, so folgt, daß p von der Richtung der Fläche f unabhängig ist.

4. Wirken auf ein im Gleichgewicht befindliches Gas keine äußeren Kräfte, so ist der Druck im Innern überall konstant.

Das erkennt man sofort, wenn man sich im Innern des Gases ein beliebig gerichtetes prismatisches eben begrenztes Volumen starr gemacht denkt. Die Druckkräfte an den beiden Basisflächen müssen einander gleich sein, wenn keine Bewegung erfolgen soll.

5. Ist ein Gas der Schwerkraft ausgesetzt, so ist der Druck in jeder Horizontalebene („Niveauebene") (CD in Fig. 88) konstant.

Da in Richtung einer solchen Horizontalebene keine äußeren Kräfte wirken, folgt dieser wie der vorige Satz aus einem horizontal liegenden Prisma von unendlich kleinem Querschnitt.

Die Druckdifferenz zweier um die Höhe h voneinander entfernter Niveauebenen ist gleich $h\sigma g$, wenn h so klein ist, daß die Dichte σ längs h nicht merklich variiert.

Das ergibt sich leicht, wenn man ein vertikal stehendes Prisma von der Basis 1 cm² und der Höhe h betrachtet. $h\sigma g$ ist das Gewicht dieses Prismas, das durch die Differenz der Druckräfte kompensiert wird.

Die hier angeführten Sätze lassen sich auch auf eine Flüssigkeit anwenden, die der Schwere unterworfen ist. Auch die Flüssigkeit besitzt einen Druck im Innern, infolge des über einem gedachten Punkte lastenden Flüssigkeitsgewichtes.

6. Aus den in Nr. 3 und Nr. 5 ausgesprochenen Gesetzen folgt das „Archimedische Prinzip des Auftriebs":

> Ein Körper verliert in einer Flüssigkeit ebenso viel von seinem Gewicht, als die von ihm verdrängte Wassermasse wiegt.

Ein Körper vom Gewicht G sei in eine Flüssigkeit eingetaucht, die überall in seiner Umgebung die konstante Dichte σ besitzen möge. Wir schneiden aus einer Oberfläche ein Element o (Fig. 90) heraus, das so klein sei, daß wir es als eben und den Druck darauf als konstant ansehen dürfen. Aus dem Körper schneiden wir einen horizontalen Zylinder (oo_1) von der Form heraus, daß er gerade in der Randkurve von o die Körperoberfläche durchsetzt. Dieser Zylinder wird an einer zweiten Stelle ein Element o_1 aus dem Körper herausschneiden.

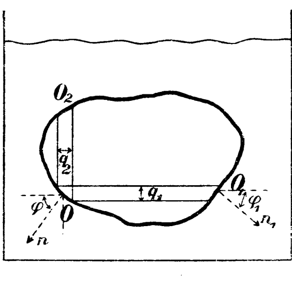


Fig. 90.

Da o und o_1 in einer Horizontalen liegen, wird der Druck p auf o und p_1 auf o_1 identisch, $p_1 = p$, sein. Die Druckkraft auf o

ist also op, die auf o_1 ist $o_1 p$. Die Horizontalkomponenten der beiden Kräfte sind, wenn φ, φ_1 die Winkel bedeuten, die die Normalen n und n_1 auf o und o_1 mit der Zylinderachse bilden,

$$op \cos\varphi \quad \text{und} \quad o_1 p \cos\varphi_1 .$$

Sie sind einander entgegengesetzt gerichtet und gleich, da

$$o \cos\varphi = o_1 \cos\varphi_1 = q_1$$

der Querschnitt des Zylinders $(o\,o_1)$ ist. Deshalb heben sie sich auf, und das Gleiche gilt für alle horizontalen Zylinder, die wir aus dem Körper herausschneiden können.

Legen wir nun durch die Randkurve von o einen vertikalen Zylinder $(o o_2)$, so können wir ebenso die Vertikalkomponenten der Druckkräfte berechnen. Es wirkt auf o vertikal nach oben die Kraft $q_2 p$, wenn q_2 der Querschnitt des Zylinders ist, auf o_2 vertikal nach unten die Kraft $q_2 p_2$, wenn p_2 den Druck an der Stelle des Oberflächenelementes o_2 bedeutet. Auf den Zylinder wirkt daher vertikal nach oben die Kraft

$$K' = q_2 (p - p_2).$$

Nach Nr. 5 ist nun $p - p_2 = h g \sigma$, wo h die Länge des Zylinders ist, und somit ist

$$K' = h q_2 g \sigma .$$

Bei hinreichend kleinem q_2 wird $h q_2$ das Volumen des Zylinders, $h q_2 \sigma$ die Masse Flüssigkeit, die dieses Volumen erfüllen könnte, die von ihm „verdrängte“ Flüssigkeitsmasse, und K' deren Gewicht.

Zerlegen wir den ganzen Körper in solche vertikale Zylinder, so summieren sich die auf diese nach oben wirkenden Kräfte K' zu einer Gesamtkraft K, dem „Auftrieb“ des Körpers, der infolgedessen gleich dem Gewicht der verdrängten Wassermasse ist,

$$K = V \sigma g .$$

V ist hierin das Volumen des untergetauchten Körpers, σ die Dichte der umgebenden Flüssigkeit

Vertikal nach unten wirkt die Kraft G, vertikal nach oben die Kraft K, und diese beiden setzen sich zu einer vertikal abwärts wirkenden resultierenden Kraft

$$G - K,$$

dem „scheinbaren“ Gewicht, zusammen.

Ist K kleiner als G, dann sinkt der Körper unter. Ist K gleich G, dann schwebt er, und ist K größer als G, so steigt er auf, bis

ein Teil von ihm aus der Flüssigkeit herausragt, wodurch der Auftrieb vermindert wird: Er schwimmt.

Das gilt, wenn die Flüssigkeit eine konstante Dichte hat. Es gilt auch für Gase, wenn der Körper hinreichend klein ist, so daß in seiner Umgebung die Dichtigkeit als merklich konstant angesehen werden darf.

7. Das Gesetz von Boyle-Mariotte-Gay-Lussac.[1])

Der Druck eines Gases ist von seiner Dichte abhängig. Boyle und Mariotte fanden, daß, wenn man eine bestimmte Gasmasse auf ein kleineres Volumen komprimiert, der Druck umgekehrt proportional dem Volumen zunimmt; also ist

$$p_1 v_1 = p_0 v_0,$$

wenn p_1 den Druck beim Volumen v_1, p_0 den beim Volumen v_0 bedeutet. Das gilt nur, so lange die Temperatur konstant bleibt. Mit zunehmender Temperatur t (in Celsiusgraden) wächst der Druck, und zwar so, daß er, wie Gay-Lussac fand, dem Gesetz folgt

$$p_1 v_1 = p_0 v_0 (1 + \alpha t),$$

wenn wir jetzt unter p_0 den Druck bei beliebigem Volumen v_0 und der Temperatur 0^0 verstehen. Dieses Gesetz gilt nicht genau. Je niederer die Temperatur wird, um so größer wird die Abweichung. α hat für alle Gase den Wert $1/273$.

Wenn wir die Temperatur statt von 0^0 C. an von einem um 273^0 tieferen Punkte zählen, und jetzt mit ϑ bezeichnen, so daß also

$$\vartheta = t + 273$$

wird, so folgt:

$$p_1 v_1 = p_0 v_0 \alpha \vartheta.$$

Diese Gleichung heißt die Zustandsgleichung der Gase. Da $p_0 v_0 \alpha$ eine Konstante der angewandten Gasmenge ist, so können wir diese Gleichung schreiben

$$pv = R\vartheta, \tag{9}$$

worin R jetzt nur von der Beschaffenheit und Menge des Gases, nicht mehr von Druck und Temperatur abhängt.

Die Temperatur vom Nullpunkt -273^0 C. an gerechnet heißt die „absolute Temperatur".

8. Ein Gasvolumen, das unter dem konstanten Drucke p steht, möge sich um unendlich wenig ausdehnen; der Volumenzuwachs sei

---

1) Robert Boyle, geb. 1627 in Lismore, Irland, gest. 1691 in London. Edme Mariotte, gest. 1684 in Paris. Louis Joseph Gay-Lassac, geb. 1778 in St. Léonard. Limousin, gest. 1850 in Paris.

Δv. Die Druckkräfte werden die Wandung vor sich herschieben und gegen irgend welche äußeren Kräfte eine Arbeit leisten, die, wenn die Verschiebung hinreichend langsam erfolgt (§ 22, 6.), aus den Druckkräften und der Verschiebung der Wandung berechnet werden kann. Zerlegen wir das Volumen Δv (Fig. 91) durch Scheidewände, die senkrecht zu der Wandung stehen, in prismatische Teile von den unendlich kleinen Basisflächen o und den Höhen h, so wird die Kraft auf eine solche Basisfläche $p \cdot o$ sein, und diese Kraft hat die Verschiebung h hervorgebracht, also eine Arbeit

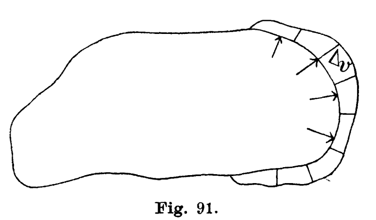


Fig. 91.

$$poh$$

geleistet. Bei der ganzen Volumenvermehrung ist die Arbeit

$$\Sigma poh = p \Sigma oh = p \Delta v$$

geleistet worden. Bei einer unendlich kleinen Volumenvermehrung wird also eine Arbeit geleistet, die gleich dem Druck multipliziert mit der Volumenvermehrung ist.

Bei endlicher Volumenvermehrung wird der Druck während des Vorganges merklich abnehmen. Wir können dann die ganze Vermehrung in eine beliebig große Summe hinreichend kleiner Zunahmen zerlegen, und bekommen als Arbeit einen Ausdruck

$$A = \Sigma p \Delta v,$$

worin wir die Δv so klein zu wählen haben, daß wir während eines einzelnen Zuwachses Δv den Druck p als konstant ansehen dürfen.

In gleicher Weise läßt sich erkennen, daß eine Arbeit

$$A' = \Sigma p \Delta' v$$

von außen auf das Gas ausgeübt werden muß, wenn man es um ein Volumen $\Sigma \Delta' v$ vermindern will.

9. Da ein Gas imstande ist, durch seine Ausdehnung Arbeit zu leisten, so können wir ihm eine „innere Energie“ zusprechen. Den Gesamtbetrag dieser Energie können wir nicht ermitteln.

Wir können aber einer gegebenen Menge eines Gases in einem bestimmten Zustande, also bei einem bestimmten Wertesystem von p, v, ϑ, einen beliebigen Energieinhalt U_0 ein für allemal zuschreiben. Leistet nun das Gas Arbeit, ohne daß ihm von außen Energie zugeführt oder entzogen wird, so muß sich sein Energieinhalt um den Betrag dieser Arbeit vermindert und dabei p, v und ϑ verändert

haben. Das heißt: Der Energieinhalt U einer Gasmenge, der unter Zugrundelegung einer willkürlichen Konstanten U_0 jetzt definiert ist, wird eine Funktion von p, v, ϑ oder von zwei oder auch nur von einer dieser Größen sein.

10. Wir denken uns einen Doppelballon, etwa wie Fig. 92, aus zwei gleichen Teilen bestehend. AB sei eine Scheidewand, die entfernt werden kann. Den einen Teil, V_2, denken wir uns luftleer gepumpt, den anderen, V_1, mit Luft vom Druck p und der Temperatur ϑ erfüllt. Entfernen wir jetzt die Scheidewand, so wird sich die Luft im Ballon V_1 ausdehnen und Arbeit leisten. Im Ballon V_2 aber wird sich dauernd Luft komprimieren und Arbeit von außen aufnehmen, bis Gleichgewicht eingetreten ist, bis also in beiden Ballons gleicher Druck p_1 herrscht. Wie groß p_1 ist, können wir aus der Zustandsgleichung nicht berechnen, wenn wir nichts von der Temperaturänderung, die infolge der Veränderungen in den Gasen erfolgt sein könnte, wissen. Die Zustandsgleichung enthält drei Variable, p, v, ϑ und nur die Änderung von v ist uns bekannt; v ist auf den doppelten Wert gestiegen.

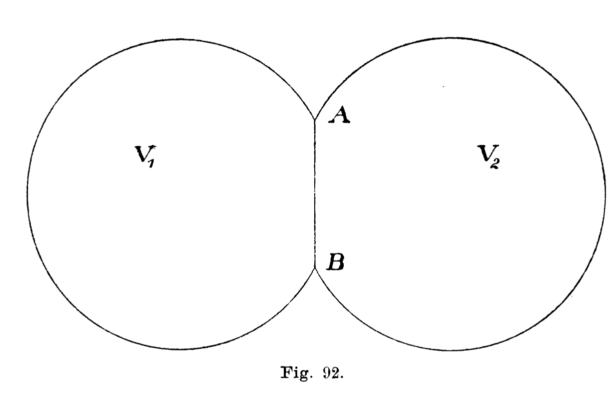


Fig. 92.

Das Experiment muß über den Wert der beiden anderen entscheiden. Versuche von Joule und exaktere von W. Thomson (Lord Kelvin) haben ergeben, daß mit großer Annäherung die Temperatur nach Ausführung des genannten Versuches dieselbe ist, wie vorher, wenn man einen Wärmeaustausch mit dem Außenraume vermeidet, wenn also der Energieinhalt der ganzen Gasmenge konstant bleibt. Man nennt einen solchen Vorgang, bei dem ein Austausch von Wärme mit der Umgebung vermieden ist, eine „adiabatische Zustandsänderung“.

Wir müssen aus diesem experimentellen Ergebnis den Schluß ziehen: Wenn der Energieinhalt eines Gasvolumens konstant bleibt, so bleibt bei beliebiger Volumen- und entsprechender Druckänderung auch die Temperatur konstant.

Die innere Energie einer Gasmenge ist nur eine Funktion der Temperatur, nicht des Volumens.

11. Wir folgern daraus, daß sich ein Gas, wenn es sich unter Arbeitsleistung adiabatisch, also ohne von außen her Wärme aufzunehmen, ausdehnt, abkühlen muß. In dem in Nr. 10 besprochenen Falle wird die mit der Ausdehnung verbundene Arbeit dem Gase selber als Energie wieder zugeführt, woraus die Konstanz der Temperatur zu erklären ist. Diese Arbeit erzeugt zunächst die kinetische Energie des aus V_1 nach V_2 strömenden Gases, und diese kinetische Energie wird durch innere Reibung und Reibung an den Gefäßwänden wieder in Wärme umgesetzt.

Weiter können wir folgendes schließen. Es möge sich eine Gasmenge vom Druck p_1 und Volumen v_1 ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, also adiabatisch, ausdehnen, dabei eine Arbeit $A_1 = \Sigma p \Delta v$ leisten, und sich infolgedessen von einer Temperatur ϑ_1 auf ϑ_0 abkühlen. Lassen wir die gleiche Gasmenge bei einem anderen Volumen v_2 und dem entsprechenden Druck p_2 sich wieder unter Arbeitsleistung von der Temperatur ϑ_1 an abkühlen, bis die Temperatur ϑ_0 erreicht ist, so muß die geleistete Arbeit wieder gleich A_1 sein; denn nach Nr. 10 muß die Energieabnahme in beiden Fällen die gleiche sein.

12. Wir denken uns jetzt mit einer gegebenen Gasmenge, die sich in einem Gefäß (G in Fig. 93) mit beweglichem Kolben (K)

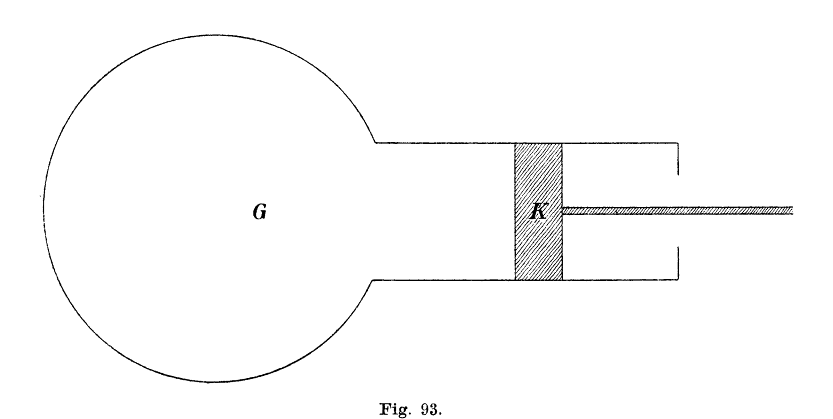


Fig. 93.

(nach Art der Dampfmaschinenzylinder) befinden möge, Zustandsänderungen ausgeführt. Der Kolben dient dazu, die vom Gas geleistete Arbeit nach außen zu befördern.

Alle Änderungen sollen so erfolgen, daß wir das Gas in jedem Moment als physikalisch homogen ansehen dürfen, daß also Druck und Temperatur jeweils räumlich konstant sind. Zwischen den drei

veränderlichen Größen p, v und ϑ muß dann die Gleichung (9) dauernd erfüllt sein

(9) $$pv = R\vartheta,$$

und R ist für alle möglichen Veränderungen eine Konstante. Die äußeren Kräfte auf das Gas sollen so gering sein, daß wir sie gegen die inneren vernachlässigen dürfen.

13. Die drei Variabeln p, v, ϑ können wir uns als Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems aufgetragen denken. Dann stellt die Gleichung (9) eine Fläche Φ dar, und zwar, wie man aus Bd. II, § 102, 8., Gleichung (5):

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

erkennen kann, ein hyperbolisches Paraboloid. Um das einzusehen, setzt man $c = 1/R$, $a^2 = b^2 = 2$, und führt eine Drehung des Koordinatensystems x, y, z um 45^0 um die z-Achse aus, so daß

$$\vartheta = z; \quad p = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

die neuen Koordinaten werden.

Jeder Punkt der Fläche Φ entspricht mit seinen Koordinaten einem möglichen Zustande des Gases, und jeder stetige Übergang aus einem Zustand in einen anderen ist durch eine Kurve auf der Fläche Φ graphisch dargestellt.

14. Unter diesen Kurven nehmen einige eine hervorragende Stelle ein. So werden z. B. durch die zur v-Achse, zur p-Achse und zur ϑ-Achse normalen Ebenen Kurven auf Φ ausgeschnitten, die den Zustandsänderungen bei konstantem Volumen, bei konstantem Druck (isopiestische Kurven), bei konstanter Temperatur (Isothermen) entsprechen.

Weiter sind die adiabatischen Kurven von Wichtigkeit. Deren Punkte müssen außer der Gleichung (9) noch einer Gleichung

$$\Sigma \Delta U = \Sigma p \Delta v$$

genügen, worin ΔU die Abnahme der inneren Energie, also einer Funktion von ϑ allein, und $p\Delta v$ die vom Gase geleistete Arbeit, Δv also die Zunahme des Volumens bedeutet. Welcher Art die Funktion U im übrigen ist, brauchen wir für die folgenden Untersuchungen nicht zu wissen.

15. Es ist zweckmäßig, nicht die Kurven auf der Fläche Φ, durch die irgend welche Zustandsänderungen dargestellt werden, zu

verfolgen, sondern deren Projektion auf eine der Koordinatenebenen; d. h. von der Veränderung einer der drei Variabeln abzusehen und nur die der beiden anderen graphisch darzustellen.

Wählen wir z. B. die pv-Ebene wie in Figur 94, und stellt die Kurve AB die Projektion einer Kurve der Fläche Φ dar, so gibt jeder Punkt zwischen AB ein zusammengehöriges Wertepaar von p und v an. Das Flächenstück α, β, δ, γ hat, wenn der Abstand der beiden Lote $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ hinreichend klein gewählt wird, den Flächeninhalt $p\Delta v$ und die Fläche $ABDC$ gibt durch ihren Flächeninhalt $\Sigma p\Delta v$ die bei der Zustandsänderung AB vom Gase geleistete Arbeit.

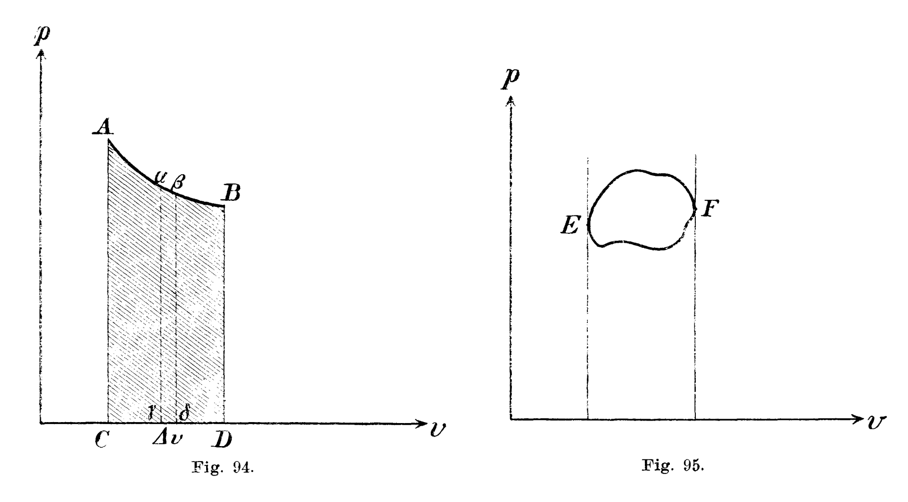


Fig. 94. Fig. 95.

Führt die Zustandsänderung das Gas schließlich wieder in den Ausgangszustand zurück, so daß also p, v, ϑ wieder die ursprünglichen Werte annehmen, so heißt der ausgeführte Prozeß ein „Kreisprozeß“, und er stellt sich durch eine geschlossene Kurve dar (Fig. 95). Die von dieser geschlossenen Kurve in der pv-Ebene eingeschlossene Fläche repräsentiert wieder die beim Kreisprozeß geleistete Arbeit. Man erkennt das leicht, wenn man die geschlossene Kurve, wie in Figur 95, durch die Punkte E, F, in zwei Teile teilt, und bedenkt, daß auf dem unteren Wege — von F bis E — die vom Gase geleistete Arbeit das entgegengesetzte Vorzeichen hat, wie die auf dem oberen Wege von E bis F geleistete Arbeit.

16. Wir führen jetzt einen speziellen Kreisprozeß aus, den wir uns graphisch in der $v\vartheta$-Ebene darstellen wollen. Dieser Kreisprozeß soll nur aus isothermen und adiabatischen Veränderungen bestehen. In ersteren bleibt die Temperatur konstant, und damit die innere Energie. Alle geleistete Arbeit rührt von zugeführter Wärme her

und muß ihr gleich (äquivalent) sein. Bei den adiabatischen Veränderungen wird keine Wärme zugeführt; alle Arbeit entstammt der inneren Energie. Durch Figur 96 soll der Kreisprozeß graphisch dargestellt sein. Er verläuft folgendermaßen.

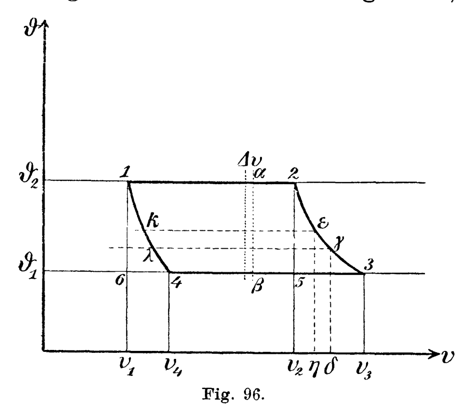


Fig. 96.

a) Wir bringen das Gefäß in ein großes Reservoir von der Temperatur ϑ_2, bis es diese Temperatur angenommen hat. Es habe jetzt das Volumen v_1. Wir lassen das Gas sich ausdehnen, wobei es von dem Reservoir aus immer auf gleicher Temperatur erhalten bleibe und das Volumen v_2 annimmt. Das Gas dehnt sich „isotherm" aus. Es leistet eine Arbeit

$$A_1 = \sum_{v_1}^{v_2} p \Delta v,$$

und muß nach dem Energieprinzip, da sein Energieinhalt sich nach Nr. 10 nicht ändert, die dieser Arbeit gleiche Wärmemenge

$$Q_1 = \sum_{v_1}^{v_2} p \Delta v$$

aus dem Reservoir aufnehmen. Unter Zuhilfenahme der Zustandsgleichung wird

$$Q_1 = A_1 = R\vartheta_2 \sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v}. \tag{10}$$

b) Wir lassen das Gas sich adiabatisch weiter ausdehnen, bis es ein Volumen v_3 erreicht und eine niedrigere Temperatur $\vartheta_1 < \vartheta_2$ angenommen hat. Es hat dabei die Arbeit

$$A_2 = \sum_{v_2}^{v_3} p \Delta v \tag{11}$$

geleistet. Wärme hat das Gas nicht aufgenommen, sondern seine innere Energie muß um den äquivalenten Betrag abgenommen haben.

c) Wir bringen das Gas in ein Wärmereservoir von der Temperatur ϑ_1 und komprimieren es isotherm bis zu einem Volumen v_4, das so beschaffen ist, daß wir aus v_4, ϑ_1 auf adiabatischem Wege zu v_1, ϑ_2 übergehen können. (Wir können uns v_4 etwa dadurch er-

mittelt denken, daß wir vor Beginn unseres Prozesses von v_1, ϑ_2 an die adiabatische Änderung bis ϑ_1 vornehmen.)

Jetzt haben wir Arbeit aufgewandt, oder das Gas hat negative Arbeit $-A_3$ geleistet und Wärme Q_3 an das Reservoir abgegeben, die analog a) gegeben ist durch

(12) $$-Q_3 = -A_3 = -\sum_{v_4}^{v_3} p\Delta v = -R\vartheta_1 \sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v}.$$

d) Endlich führen wir durch adiabatische Kompression das Gas auf das Volumen v_1 und die Temperatur ϑ_2 zurück, wobei es eine Arbeit leistet

(13) $$-A_4 = -\sum_{v_4}^{v_1} p\Delta v,$$

und nach Nr. 11 wird

(14) $$A_2 = A_4$$

sein.

17. Wir haben im ganzen folgendes erreicht:

Im Reservoir von der Temperatur ϑ_2 ist die Wärmemenge

(15) $$Q_1 = R\vartheta_2 \sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v}$$

aufgenommen und im Reservoir von der Temperatur ϑ_1 die Wärmemenge

$$Q_3 = R\vartheta_1 \sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v}$$

abgegeben worden. Also ist beim ganzen Prozeß der Betrag

(16) $$Q_1 - Q_3 = R\vartheta_2 \sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v} - R\vartheta_1 \sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v}$$

als Wärme verloren gegangen. Dieser Betrag findet sich quantitativ als Arbeit wieder; denn die Summe aller vom Gas geleisteten Arbeiten ist

$$A = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 = Q_1 - Q_3,$$

da $A_1 = Q_1$; $A_3 = Q_3$; $A_2 = A_4$ ist.

18. Das Verhältnis n der in Arbeit umgesetzten Wärmemenge zu der im wärmeren Gefäß aufgenommenen Wärmemenge

$$n = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_1} = \frac{A}{Q_1}$$

heißt der „Wirkungsgrad“ des Kreisprozesses. Er wird also nach unseren bisherigen Ableitungen den Betrag besitzen:

$$n = \frac{\vartheta_2 \sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v} - \vartheta_1 \sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v}}{\vartheta_2 \sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v}}. \tag{17}$$

19. Wir wollen nun zeigen, daß $\sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v}$ ist.

Es ist jedenfalls (Fig. 96)

$$\sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_6}^{v_5} \frac{\Delta v}{v}, \tag{18}$$

wo $v_5 = v_2$; $v_6 = v_1$ ist; denn zerlegen wir die Strecken $\overline{12}$ und $\overline{56}$ durch Linien parallel der ϑ-Achse (punktiert gezeichnet) in paarweise gleiche Elemente Δv, so ist an entsprechenden Stellen α, β beider Strecken $\Delta v / v$ identisch, und es muß also auch $\Sigma \Delta v / v$ über die ganzen Strecken identisch herauskommen. Mit anderen Worten: Ob wir bei einer Temperatur ϑ_2 oder bei einer Temperatur ϑ_1 ein Gas von v_1 auf v_2 ausdehnen, muß für die Summe $\Sigma \Delta v / v$ gleichgültig sein, wenn die Grenzen v_1 und v_2 in beiden Fällen identisch sind.

20. Nun können wir aber zeigen, daß

$$\sum_{v_5}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_6}^{v_4} \frac{\Delta v}{v} \tag{19}$$

ist. Man sieht zunächst, wie im vorigen Abschnitt, daß

$$\sum_{v_5}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_2}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} \tag{20}$$

ist, was man wieder erkennt, wenn man zwei Parallele zur ϑ-Achse, $\overline{\gamma\delta}$ und $\overline{\varepsilon\eta}$, durch die isotherme Kurve $\overline{35}$ und die adiabatische $\overline{23}$ zieht (Fig. 96). Es ist also für die hier vorliegende Summe gleichgültig, ob wir das Gas zwischen zwei gegebenen Volumen $v_2 = v_5$ und v_3 isotherm oder adiabatisch ausdehnen.

Es ist für die adiabatische Kurve $\overline{23}$

$$\Delta U = p \Delta v,$$

da keine Wärme aufgenommen wird. Das wird unter Zuhilfenahme der allgemeinen Gleichung (9) $\Delta U = R\vartheta\, \Delta v/v$, also:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{R}\,\frac{\Delta U}{\vartheta},$$

(21) $$\sum_{v_2}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{R}\sum_{v_2}^{v_3} \frac{\Delta U}{\vartheta},$$

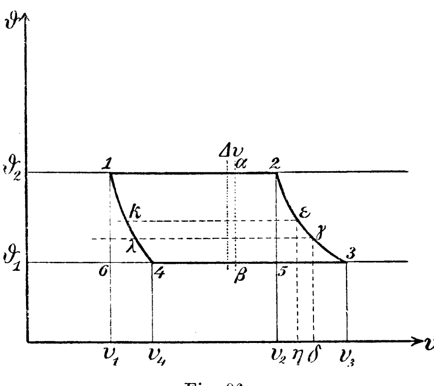


Fig. 96.

und hierin ist U, die innere Energie des Gases, nur von der Temperatur abhängig. An einer Stelle ε der Adiabate $\overline{23}$ wird U denselben Wert haben wie an einer Stelle $\varkappa$ einer anderen Adiabate $\overline{14}$, wenn $\varkappa$ mit ε auf einer Isothermen liegt. Das Gleiche gilt von den zwei Stellen γ, λ (Fig. 96) der beiden Adiabaten. Deshalb wird auch ΔU zwischen ε und γ ebenso groß sein, wie zwischen $\varkappa$ und λ, und rücken ε und γ hinreichend nahe aneinander, so wird ϑ als konstant zwischen ε und γ und zwischen $\varkappa$ und λ angesehen werden dürfen, so daß auch $\Delta U/\vartheta$ zwischen ε und γ den gleichen Wert wie zwischen $\varkappa$ und λ besitzt. Deshalb muß auch

$$\sum_{2}^{3} \frac{\Delta U}{\vartheta} = \sum_{1}^{4} \frac{\Delta U}{\vartheta}$$

sein, und wegen Gleichung (20), (21) wird

$$\sum_{v_5}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_2}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{R}\sum_{2}^{3} \frac{\Delta U}{\vartheta} = \frac{1}{R}\sum_{1}^{4} \frac{\Delta U}{\vartheta}.$$

Analog wie die Gleichungen (20), (21) folgt aber auch

(22) $$\sum_{v_6}^{v_4} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_1}^{v_4} \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{R}\sum_{1}^{4} \frac{\Delta U}{\vartheta},$$

und Gleichung (19) ist somit bewiesen.

21. Aus der Figur 96 erkennt man, daß

$$\sum_{v_6}^{v_5} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_6}^{v_4} \frac{\Delta v}{v} + \sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} - \sum_{v_5}^{v_3} \frac{\Delta v}{v}$$

ist, und wegen Gleichung (19) folgt nun

$$\sum_{v_6}^{v_5} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v},$$

und unter Zuhilfenahme von Gleichung (18) gibt das die zu beweisende Gleichung:

$$\sum_{v_4}^{v_3} \frac{\Delta v}{v} = \sum_{v_1}^{v_2} \frac{\Delta v}{v}. \tag{23}$$

22. Jetzt lehrt uns Gleichung (17) wegen (23), daß der Wirkungsgrad unseres Kreisprozesses die einfache Form annimmt:

$$n = \frac{A}{Q_1} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_2}.$$

Von der Wärmemenge, die der Kolben im wärmeren Reservoir ϑ_2 aufgenommen hat, ist nur der Bruchteil $(\vartheta_2 - \vartheta_1)/\vartheta_2$ in Arbeit übergeführt worden. Der Rest, der Bruchteil ϑ_1/ϑ_2, ist als Wärme dem kälteren Reservoir zugeflossen.

Das Gas selber ist nach Ablauf des Prozesses in seinen ursprünglichen Zustand zurückgeführt. Es besitzt wieder die gleiche Temperatur, das gleiche Volumen und den gleichen Druck, wie im Anfang des Prozesses. Man nennt diesen Kreisprozeß nach seinem Entdecker[1]) den „Carnotschen Kreisprozeß".

23. Lassen wir den ganzen Prozeß in umgekehrter Richtung vor sich gehen, so würden wir im kälteren Reservoir die Wärmemenge Q_3 aufnehmen und im wärmeren Q_1 abgeben. Außerdem würden wir die Arbeit

$$A = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_2} Q_1$$

dem System zuführen. Dann ist also alles wieder im alten Zustand, auch die Wärmeverteilung in den Reservoiren.

Daraus können wir schließen: Es ist nicht möglich, mit Hilfe des Carnotschen Kreisprozesses Wärme aus einem kühleren Gefäß in ein wärmeres überzuführen, ohne dabei eine bestimmte Arbeitsmenge aufzuwenden.

Eine nicht beweisbare Verallgemeinerung sagt aus: Die Arbeit, die wir beim Carnotschen Kreisprozeß aus einem gegebenen Wärmequantum Q_1 gewinnen können, ist die größte Arbeit, die uns überhaupt irgend ein Kreisprozeß liefern kann.

1) Vgl. darüber das in § 25, 6., Seite 146 Gesagte. Der Carnotsche Satz ist von Clausius in richtiger Deutung modifiziert worden.

ZWEITES BUCH.

ELEKTRISCHE UND MAGNETISCHE KRAFTLINIEN.

Vierter Abschnitt.

Elektrizität und Magnetismus.[1])

§ 27. Elektrische Kraft und Elektrizitätsmenge.

1. Der Begriff der „Kraftlinien", den wir im folgenden als geometrisches Hilfsmittel zur Besprechung der elektrischen und magnetischen Theorien heranziehen wollen, läßt sich in jedem Vektorfelde verwerten, natürlich unter Zugrundelegung der für den betreffenden Vektor gültigen Gesetze. Es ist im folgenden in der Tat nicht eine Kraft, die wir in der angedeuteten Weise sinnlich darstellen; wir wollen aber allgemein den althergebrachten Namen „Kraftlinien" beibehalten, indem wir als Typus eines Vektors den speziellen Kraftvektor zur Namengebung verwenden.

Eine reelle Bedeutung haben die Kraftlinien nicht; sie sind lediglich ein mathematisches Hilfsmittel. Dasselbe gilt auch von einem althergebrachten Begriff der Elektrizitätslehre, von den „Elektrizitätsmengen". Beobachtbar sind — abgesehen von einigen sekundären Erscheinungen — nur die elektrischen Kräfte, und nur aus ihnen hat man den mathematischen Begriff „Elektrizitätsmenge" geschaffen. Wir nehmen diese überall da an, wo elektrische Kraftlinien entspringen und setzen, wie wir später sehen werden, eine quantitative Beziehung zwischen beiden Begriffen fest.

Wir könnten mit dem Begriff der Kraftlinien allein auskommen, und in der Tat begnügt sich damit die reine Maxwell-Hertzsche Theorie. Da aber für die Anschauung der Begriff Elektrizitätsmenge zweckmäßig ist, schon um weitläufige Ausdrucksweisen zu vermeiden, wollen auch wir uns seiner bedienen. Gerade durch Einführung der „Menge" wird die Kraftlinientheorie durch Analogiebildung mit den mechanischen Mengen übersichtlicher. In der Mechanik denkt man ja auch nicht daran, den Begriff der Masse zu eliminieren. Freilich

1) Dieser Abschnitt schließt sich vielfach an die Bezeichnungs- und Darstellungsweise in E. Cohn, Das elektromagnetische Feld (Leipzig 1900) an.



kennen wir von dieser auch noch andere Eigenschaften als die Kräfte: die Undurchdringbarkeit gegen ihresgleichen, also die Fühlbarkeit, und die Fähigkeit, Licht zu reflektieren und zu absorbieren, die Sichtbarkeit.

2. Wir gehen von den folgenden physikalischen Erfahrungstatsachen aus:

[1.][1]) Durch Reibung von Nichtmetallen miteinander geraten diese in einen Zustand, der sie befähigt, andere ebenso behandelte Körper anzuziehen oder abzustoßen, jedenfalls aber eine Kraft auszuüben, die der Richtung nach mit der Verbindungslinie der zwei Körper (wenn diese klein genug sind, eine solche zu definieren) übereinstimmt Sie heißen dann „elektrisiert".

[2.] Durch einfachen Kontakt mit elektrisierten Körpern werden isolierte Metalle ebenfalls elektrisiert.

[3.] Die Elektrisierung eines und desselben Körpers, d. h. die Kraft auf ein und denselben anderen elektrisierten Körper kann verschieden stark sein, etwa infolge verschieden starken Reibens.

[4.] Es gibt zwei verschiedene Arten von Elektrisierung, je nach dem Material der geriebenen Körper. Die beiden Arten unterscheiden sich voneinander dadurch, daß gleichartig elektrisierte sich abstoßen, ungleichartig elektrisierte sich anziehen.

[5.] Durch Kontakt elektrisierter Metalle entsteht immer gleichartige Elektrisierung.

[6.] Es ist bekannt, auf welche Weise die eine oder die andere Art Elektrisierung ensteht, so daß man sie willkürlich hervorbringen kann.

3. Wir denken uns zwei identische, sehr kleine Körper gleich stark elektrisiert, was wir dadurch kontrollieren können, daß wir die Kraftwirkung eines jeden von ihnen auf einen und denselben dritten elektrisierten Körper beobachten. Wir bringen diese beiden Körper, deren Dimensionen alle sehr klein gegen einen Zentimeter sein mögen, in einem Abstand von einem Zentimeter voneinander in einen luftleeren Raum und messen die abstoßende Kraft, die sie aufeinander ausüben. Je stärker die Kraft ist, um so größer nehmen wir die Elektrisierung an. Ist nun die Kraft gerade gleich einer Dyne, also gleich 1 gr cm $\sec^{-2}$, so schreiben wir jedem der Körper die Elektrizitätsmenge „1 absolute Einheit" zu, d. h. wir erklären die Elektrisierung durch eine hypothetische, dem Körper zugeführte Elektrizitätsmenge, die den Wert 1 Einheit im oben angegebenen Falle besitzt.

1) Die Zahlen in eckigen Klammern deuten empirische Gesetze an.



Bestehen die beiden Körper aus Glas, das durch Reiben mit Seide elektrisch geladen ist, so nennen wir die Ladung positiv; in dem hier angeführten Falle sprechen wir dem Körper speziell je + 1 Einheit zu. Wenn ein weiterer Körper auf andere Weise elektrisiert und an Stelle des einen dieser beiden, d. h. in einen Abstand von 1 cm vom anderen gebracht, eine abstoßende Kraft von einer Dyne erfährt, so schreiben wir ihm ebenfalls die Elektrizitätsmenge + 1 Einheit zu, erfährt er aber eine anziehende Kraft von einer Dyne, so schreiben wir ihm die Elektrizitätsmenge — 1 Einheit zu.

In der Praxis verwendet man das $3 \cdot 10^9$ fache dieser Einheit als Einheit der Elektrizitätsmenge und nennt sie „1 Coulomb".

4. Ist der eine der Körper symmetrisch gebaut und bei der Elektrisierung symmetrisch behandelt, so können wir durch Halbieren desselben die Elektrizitätsmenge $\frac{1}{2}$ Einh. erhalten. Wenn es uns dann gelingt, einem anderen symmetrischen Körper die gleiche Elektrisierung zu erteilen, so können wir durch Durchschneidung dieses zweiten Körpers $\frac{1}{4}$ Einh. isolieren u. s. w. Wir können dann — freilich nur in der Idee, nicht in Praxi — durch Zusammenbringen bestimmter Teile eine beliebige Elektrizitätsmenge, sagen wir a Einh., an einem Orte, d. h. in einem sehr kleinen Raume vereinigen. Wählen wir a verschieden groß in verschiedenen Fällen, auch z. B. negativ, so können wir das Gesetz prüfen, nach dem sich verschieden stark elektrisierte Körper anziehen oder abstoßen. Durch Veränderung des Abstandes, in dem sich die beiden Körper befinden, können wir die Abhängigkeit der Kraft von diesem Abstand ermitteln. Coulomb hat diese Gesetze nach einer freilich nicht so schematischen Methode, wie wir sie hier lediglich zum Zweck der Definition angegeben haben, erforscht und er findet, daß die Kraft K mit dem Abstand r und den Elektrizitätsmengen e_1, e_2 zweier aufeinander wirkender Körper ein dem Newtonschen Gesetz ähnliches Gesetz befolgt:

$$K = f \frac{e_1 e_2}{r^2}, \text{[1]}$$

1) Dies Gesetz ist von Coulomb 1785 aufgestellt und mit der „Drehwage" durch statische Messungen von Drehmomenten bewiesen. Von Rieß wurde die Methode verbessert. Rieß veränderte die Elektrizitätsmenge zwecks Bestätigung des Faktors $e_1 e_2$ durch Berührung einer geladenen Metallkugel mit einer gleich großen ungeladenen.

Außer der statischen Ablenkung hat Coulomb noch mit Hilfe von Schwingungen das Drehmoment und damit die Kraft zwischen zwei Elektrizitätsmengen bestimmt.

Charles Augustin de Coulomb lebte von 1736 bis 1806. Er war Offizier im französischen Geniekorps. 1781 wurde er wegen seiner wissenschaftlichen Arbeiten Mitglied der Akademie zu Paris und 1804 Generalinspektor der Universität.



worin f zunächst noch eine Konstante ist. Eine abstoßende Kraft wollen wir als positiv auffassen. Da im Vakuum für $e_1 = e_2 = 1$ Einh., $r = 1$ cm nach Definition $K = 1$ dyn wird, so muß f hier den Zahlwert 1 haben.

5. Bringt man die beiden Körper aus dem Vakuum in ein anderes Medium, so zeigt sich, daß die Kraft kleiner geworden ist, im übrigen aber das Coulombsche Gesetz noch gilt, d. h. es ist f nicht mehr gleich 1, sondern kleiner. Wir schreiben

[7.][1] $$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{e_1 e_2}{r^2} \quad \text{(Coulombsches Gesetz)},$$

wo $4\pi\varepsilon > 1$. ε verändert erfahrungsgemäß seinen Wert mit dem Medium. Wir nennen ε die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Mediums. Im Vakuum sei $\varepsilon = \varepsilon_0$. Also ist dem Zahlenwerte nach

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi},$$

wenn wir an unserer Definition für die Elektrizitätsmenge festhalten. Wir werden der Symmetrie halber den Faktor $1/4\pi\varepsilon_0$ im Vakuum, der gleich 1 ist, gleichwohl im allgemeinen mitführen, schon einmal, um leicht von der in der Anmerkung dieser Seite gegebenen Definition der Dielektrizitätskonstanten zu unserer übergehen zu können. ε_0 ist der kleinste Wert unter allen vorkommenden Dielektrizitätskonstanten.

6. Wir wollen, was in unserem Ermessen steht, ε als dimensionslose Zahl auffassen. Dann verfügen wir damit über die Dimensionen der Elektrizitätsmenge, deren Einheit wir willkürlich festgelegt haben. Es wird für zwei Einheitsladungen im Abstand von 1 cm im Vakuum

$$1\,\frac{\text{gr cm}}{\text{sec}^2} = \frac{1\,\text{Einh.}^2}{1\text{ cm}^2}.$$

Die Dimensionen der Elektrizitätsmenge sind demnach

$$[e] = m^{\frac{1}{2}}\, l^{\frac{3}{2}}\, t^{-1},$$

und es ist

$$1 \text{ absolute Einheit} = 1 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ sec}^{-1}.$$

---

1) Vielfach wird auch der Ausdruck $4\pi\varepsilon$ mit ε bezeichnet und die „Dielektrizitätskonstante" genannt. Dadurch wird die Form aller Gesetze etwas verändert. Durch Einsetzung von $\varepsilon' = 4\pi\varepsilon$ können wir jederzeit von einer Form in die andere übergehen. Im Vakuum wird dann $\varepsilon' = 1$, worauf zu achten ist, wenn irgendwo dieser Wert der Dielektrizitätskonstanten nicht mitgeführt worden ist. Die Einführung des Faktors $1/4\pi$ in das Coulombsche Gesetz hat den Erfolg, daß das 4π aus einer großen Zahl abgeleiteter Gleichungen, die wir zum Teil noch kennen lernen werden, herausfällt.

7. Im Coulombschen Gesetz ist die Tatsache enthalten, daß, wenn eine der beiden Elektrizitätsmengen negativ wird, die abstoßende Kraft negativ, also zu einer anziehenden Kraft wird.

§ 28. Elektrische Feldintensität und Polarisation.

1. Eine Elektrizitätsmenge e_1 übt auf eine gegen sie unendlich kleine andere vom Betrage e im Abstand r, der groß gegen die Dimensionen der Träger der elektrischen Ladungen sein möge, eine Kraft

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e_1 e}{r^2}$$

aus. Demnach ist

$$E = \frac{K}{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e_1}{r^2} \tag{1}$$

die auf die Elektrizitätsmenge 1 umgerechnete Kraft. Wir gehen absichtlich von einer unendlich kleinen Elektrizitätsmenge aus, damit diese späterhin eine einmal vorhandene Kraftverteilung im Raume nicht ändert. Wir können in symbolischer Ausdrucksweise sagen: Es ist E die auf die „unendlich klein gedachte Elektrizitätseinheit" wirkende Kraft.[1]) E heißt „elektrische Feldintensität" oder „elektrische Intensität", auch „Feldstärke". Sie hat, wenn e_1 nach Größe und Lage gegeben ist, an jeder Stelle des Raumes einen bestimmten Wert und eine bestimmte Richtung. E ist also eine Funktion des Ortes, speziell ein Vektor.

2. In der Umgebung einer (punktförmig gedachten) Elektrizitätsmenge e wird überall eine Feldintensität vorhanden sein, und zwar symmetrisch auf den umgebenden Raum verteilt, d. h. in gleichen Abständen von e wird E von gleichem Betrage sein und wird immer die Richtung des Radiusvektor von e aus haben. Wir können

1) Wir wollen allgemein, auch im folgenden, diese symbolische Ausdrucksweise gebrauchen, die den folgenden Sinn hat: Ist φ eine Funktion einer Variabeln t, so ist mit einer unendlich kleinen Änderung Δt von t eine Änderung $\Delta\varphi$ von φ verbunden. Den Quotienten $\Delta\varphi/\Delta t$ können wir als die auf die Änderung um die Einheit von t umgerechnete Änderung von φ ansehen. $\Delta\varphi/\Delta t$ ist, wenn φ eine lineare Funktion von t ist, streng gleich der mit der Änderung von t um die Einheit verbundenen Änderung von φ. Ist φ nicht linear von t abhängig, so nennen wir diesen Quotienten „die mit der unendlich klein gedachten, oder kurz unendlich kleinen Einheitsänderung von t verbundene Änderung von φ". So ist z. B. die Geschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Körpers (§ 15, (2)) der in der „unendlich kleinen Zeiteinheit zurückgelegte Weg". In der Infinitesimalrechnung heißt $\Delta\varphi/\Delta t$ der Differentialquotient von φ nach t (Bd. I, 2[te] Aufl., Abschn. 27).

mit E rechnen wie mit einer Kraft, da es ja die Kraft auf die Elektrizitätseinheit ist.

3. Besonders können wir also die von verschiedenen lokal getrennten Elektrizitätsmengen herrührenden Feldintensitäten nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammensetzen und mit den Resultierenden rechnen; doch ist es uns nicht benommen, jede einzelne Intensität als selbständig anzusehen, also mit den Komponenten zu rechnen, oder eine Intensität in Komponenten zu zerlegen.

4. Die Einheit der Feldintensität ist 1 Dyne / 1 Elektrizitätseinheit. Es hat also E die Dimensionen

$$[E] = m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1},$$

und seine Einheit ist

$$1\ \mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

Diese Einheiten beruhen auf der willkürlichen Festsetzung der Einheit für die Elektrizitätsmenge, die aus der Einheit der „elektrostatischen Kraft“ abgeleitet war (§ 27, 3.). Man nennt das Maßsystem, das sich hierauf begründet, das „absolute Gaußsche Maßsystem“. Dieses Maßsystem deckt sich in der Elektrostatik mit dem sogenannten „elektrostatischen Maßsystem“ (vgl. § 43).

5. Die Größe $\mathsf{E} = \varepsilon E$, die also, wenn E die Intensität einer Elektrizitätsmenge e ist, den Wert $e/4\pi r^2$ hat, heißt die „dielektrische Polarisation“. Es ist die Größe, die uns vor allem interessiert. Auch mit ihr dürfen wir rechnen, wie mit einer Kraft, da sie aus einer solchen nur durch Multiplikation mit dem skalaren Faktor ε hervorgeht (Anm. S. 94).[1] E ist also ebenso wie E und K ein „Vektor“, und als solcher nach dem Parallelogrammgesetz in Komponenten zerlegbar.

§ 29. Kraftlinien.

1. Die dielektrische Polarisation ist ein Vektor, d. h. eine Funktion des Ortes und der Richtung. An einem und demselben Orte nimmt sie verschiedene Werte an, je nach der Richtung, in der wir sie messen. In einer bestimmten Richtung hat jeder Vektor einen Maximalwert, den wir den „Betrag“ des Vektors nennen wollen. Die zugehörige Richtung heiße die „Hauptrichtung“ oder kurz „Richtung“ des Vektors. In jeder anderen Richtung besitzt der Vektor den Wert der Projektion; d. h. wenn A der Betrag des Vektors ist,

1) In krystallinischen Körpern ist ε nach verschiedenen Richtungen verschieden; dann ist E ein auch in der Richtung von E abweichender Vektor.



φ der Winkel, den die gewünschte Richtung s gegen die des Betrages einschließt, so ist der Wert in dieser Richtung

$$A_s = A \cos \varphi.$$

2. Die Hauptrichtung der Polarisation fällt überall mit der der elektrischen Intensität zusammen, so lange, wie vorausgesetzt, ε eine skalare Größe ist. Unter der Hauptrichtung der Intensität ist die Richtung zu verstehen, in der sich eine frei bewegliche unendlich kleine Elektrizitätsmenge e verschieben würde. Verfolgen wir diese Richtung von Punkt zu Punkt, so ergibt sich eine, im allgemeinen räumliche Kurve, die wir eine „Kraftlinie“ nennen wollen. Wir denken hier an eine beliebige Verteilung von elektrischen Ladungen. Auf e wirkt dann überall die Resultierende der einzelnen Intensitäten.

3. Um die Enden dieser Kraftlinien zu ermitteln, haben wir diese Operation einmal mit einer Elektrizitätsmenge $+e$ auszuführen. Diese bewegt sich so lange weiter, bis sie an das Ende der Kraftlinie kommt, vorausgesetzt, daß die Elektrizitätsmenge auch in der Materie frei beweglich ist. Das Ende muß da liegen, wo sich eine negative Elektrizitätsmenge befindet, oder im Unendlichen. Die Richtung, in der sich $+e$ bewegt, heiße die positive Richtung der Kraftlinie. Eine Elektrizitätsmenge $-e$ führt uns ans entgegengesetzte Ende der Kraftlinie.

4. Machen wir dasselbe im ganzen betrachteten Raume, so können wir uns diesen ganzen Raum mit Kraftlinien durchzogen denken, die uns überall die Richtung der elektrischen Kraft und der dielektrischen Polarisation angeben. Diese Linien könnten wir also auch „Polarisationslinien“ nennen, insofern es uns nur darauf ankommt, aus ihnen die Richtung eines Vektors abzulesen.

5. Wir können uns aber mit Hilfe dieser Linien auch ein graphisches Maß für die Größe des betreffenden Vektors konstruieren. Wir denken uns zunächst eine einzige Elektrizitätsmenge $+e$ in einem Punkte gegeben (Fig. 97); d. h. der Träger dieser Elektrizitätsmenge sei so klein gegenüber den Entfernungen von ihm, in denen wir das Feld untersuchen wollen, daß wir seine Dimensionen und damit alle Richtungsunterschiede der nach seinen einzelnen Punkten hingezogenen Radien vernachlässigen dürfen. Die elektrischen Kraftlinien werden gerade Linien sein,

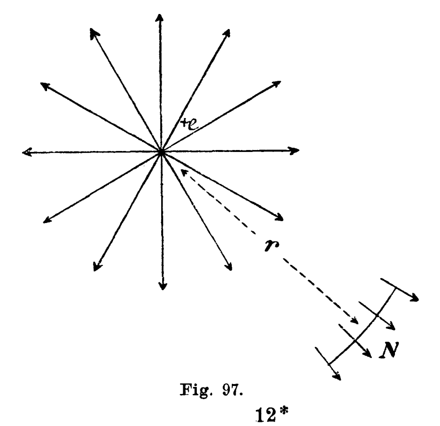


Fig. 97.

die von e aus ins Unendliche verlaufen. Durch jeden Punkt des Raumes wird nur eine Kraftlinie gezogen werden können, da die Richtung der elektrischen Feldintensität und damit der Polarisation eindeutig ist.

Wir treffen die folgende quantitative Bestimmung:

> Die Anzahl Kraftlinien, die von einer Elektrizitätsmenge e in den umgebenden Raum ausgehen, nehmen wir gleichförmig auf den ganzen kugelförmigen Raum verteilt an und proportional mit e.

Ist e negativ, so wird eine negative Zahl von Kraftlinien hier entspringen; das soll heißen, es wird die entsprechende positive Zahl in e münden.

Eine Elektrizitätsmenge e wird nach jedem Punkt einer sie umgebenden Kugelfläche eine Kraftlinie aussenden, also im ganzen in den umgebenden Raum unendlich viele Kraftlinien, die wir uns gleichförmig verteilt denken können, so daß innerhalb gleicher körperlicher Winkel immer gleichviele Kraftlinien enthalten sind. Wir setzen willkürlich fest, daß die Kraftlinienzahl n, die den umgebenden Raum einer Elektrizitätsmenge e erfüllt, e mal so groß ist als die, die den umgebenden Raum der Elektrizitätsmenge 1 erfüllt. Und nun steht uns die folgende Definition frei:

I. Die von der Elektrizitätsmenge e ausgehende Kraftlinienzahl nennen wir e (auch wenn wir sie in Wirklichkeit unendlich groß annehmen müssen; es kommt ja nur auf das Verhältnis dieser Zahlen für verschiedene e an)

$$n = e.$$

Es ist also $n = e$ nur als eine Proportionalzahl anzusehen, was auch mit der Tatsache in Einklang zu bringen ist, daß e keine dimensionslose Zahl ist.

6. Wir wollen um e herum eine Kugel mit e als Mittelpunkt und dem Radius r gelegt denken (Fig. 97). Die e Kraftlinien müssen nach unseren Festsetzungen die Kugeloberfläche $4\pi r^2$ normal durchdringen.

II. Die Kraftlinienzahl, die eine zur Kraftlinienrichtung normale Flächeneinheit durchsetzt, nennen wir die Kraftliniendichte und wir wollen sie im allgemeinen mit N bezeichnen.

In unserm Falle ist im Abstand r von e

$$N = \frac{e}{4\pi r^2},$$

und nach § 28 Gleichung (1) ist das:

$$N = \varepsilon E.$$ [1])

Im Falle einer Elektrizitätsmenge gilt also der Satz:

Die Kraftliniendichte ist gleich der dielektrischen Polarisation. Sie nimmt wie diese im umgekehrten Verhältnis zu dem Quadrat des Abstandes von e ab.

7. Durch ein unendlich klein gedachtes, zu den Kraftlinien normales Oberflächenelement do werden

$$n = N\,do = \varepsilon E\,do$$

Kraftlinien hindurchtreten. Die gleiche Zahl wird ein unter einem Winkel φ gegen do geneigtes Flächenelement $d\sigma$ schräg (Fig. 98) durchsetzen, wenn

$$d\sigma = \frac{do}{\cos\varphi}$$

ist. Die unendlich kleine Flächeneinheit von $d\sigma$ wird also von

$$\frac{n}{d\sigma} = N\cos\varphi = \varepsilon E\cos\varphi$$

Kraftlinien durchsetzt.

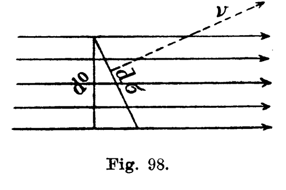


Fig. 98.

Bedeutet ν die Normale auf $d\sigma$, die mit der positiven Kraftlinienrichtung den spitzen Winkel φ einschließt, so wird

$$E_\nu = E\cos\varphi,$$

und somit εE_ν die Anzahl Kraftlinien, die die zu einer beliebigen Richtung ν normale unendlich kleine Flächeneinheit durchsetzt. Wir wollen diese Zahl mit N_ν bezeichnen.

Die eine beliebig gerichtetete Flächeneinheit schräg durchsetzende Kraftlinienzahl (Kraftliniendichte) ist also durch die Normalkomponente der dielektrischen Polarisation gegeben.

Demnach ist die Kraftliniendichte N eine Vektorgröße und in Komponenten zerlegbar.

8. Es sei eine beliebige Zahl in verschiedenen Punkten verteilter Elektrizitätsmengen $e_1, e_2, e_3, \ldots$ gegeben.[2]) Wir kommen mathe-

1) In dieser Gleichung wird zum ersten Male die Einführung des Faktors $1/4\pi$ im Coulombschen Gesetz gerechtfertigt.

2) Die Figuren 99, 100 geben das Bild der resultierenden Kraftlinien in zwei speziellen Fällen. In Fig. 99 ist $e_1 = e_2$, in Fig. 100 $e_1 = -e_2$.

matisch zum gleichen Resultat, wenn wir in einem gedachten Punkte des umgebenden Raumes entweder die von den einzelnen Elektrizitäts-

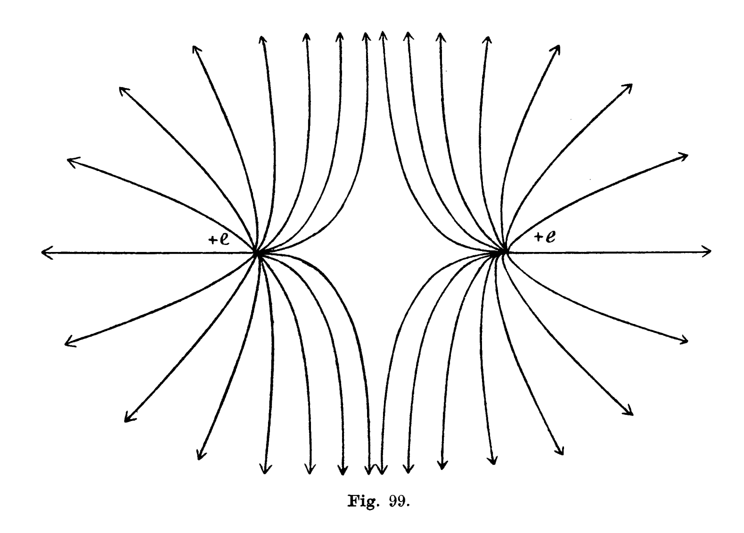


Fig. 99.

mengen herrührenden Polarisationen in Rechnung setzen, oder wenn wir sie alle zu einer resultierenden Polarisation zusammensetzen. εE sei die

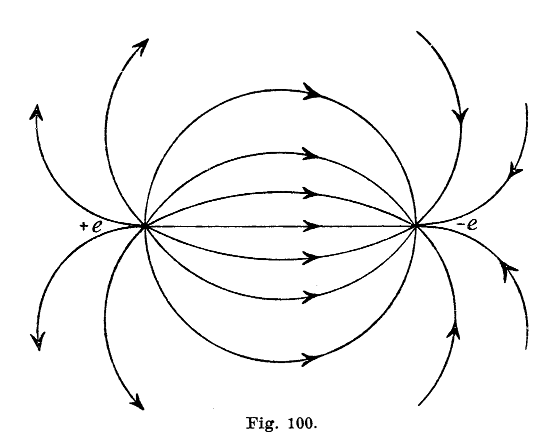


Fig. 100.

resultierende Polarisation, die einzelnen Polarisationen seien $\varepsilon E^{(1)}$, $\varepsilon E^{(2)}$, $\varepsilon E^{(3)}$, ... Durch ein zu εE normales Flächenelement do (Fig. 101) treten nach 7. insgesamt an Kraftlinien hindurch:

$$n = (\varepsilon E_\nu^{(1)} + \varepsilon E_\nu^{(2)} + \varepsilon E_\nu^{(3)} + \cdots) do,$$

wobei ν die mit E gleichgerichtete Normale auf do ist. Diejenigen

Glieder, die mit ν einen Winkel größer als $\pi/2$ einschließen, werden dabei mit negativem Betrag eingehen. Es ist aber

$$E_\nu^{(1)} + E_\nu^{(2)} + E_\nu^{(3)} + \cdots = E,$$

also

$$n = \varepsilon E\, do,$$

und die do durchsetzende Kraftliniendichte wird

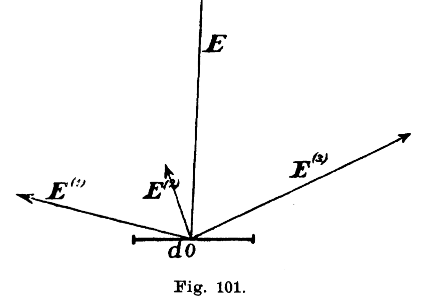


Fig. 101.

$$N = \varepsilon E.$$

Es gilt demnach bei ganz beliebiger Verteilung von Elektrizitätsmengen für das resultierende Feld:

III. Die Polarisation gibt überall die Kraftliniendichte an.

Wir können demnach das Bild der von einzelnen Punkten geradlinig ausgehenden Kraftlinien fallen lassen und direkt die resultierenden Kraftlinien zeichnen, so, daß die Kraftliniendichte, also die Kraftlinienzahl, die wir durch eine zu den Kraftlinien normale Flächeneinheit gezogen denken, überall gleich der Polarisation ist (z.B. Fig. 99, Fig. 100).

Wenden wir jetzt wieder die in Figur 98 dargestellte Komponentenzerlegung auf die resultierenden Kraftlinien an, so folgt:

IV. Die Kraftlinienzahl n, die ein beliebig gerichtetes Flächenelement $d\sigma$ durchsetzt, ist gleich der zu $d\sigma$ normalen Komponente der Polarisation, multipliziert mit $d\sigma$:

$$n = \varepsilon E_\nu\, d\sigma.$$

9. Der Satz III ist aus der Definition I abgeleitet.

Definieren wir umgekehrt die Kraftliniendichte durch den Satz III, so muß daraus Satz I folgen; es muß folgen, daß von jeder Elektrizitätsmenge e in dem umgebenden Raume e Kraftlinien ausgehen.

Es ist leicht, hieraus zu stetig verteilter Ladung überzugehen, d. h. einen endlichen Raum oder eine endliche Fläche mit elektrischen Mengen kontinuierlich erfüllt anzunehmen. Man braucht nur jedem Element derselben eine Ladung zuzuschreiben, die aber dann unendlich klein sein muß, wenn die Gesamtladung nicht unendlich groß werden soll.

§ 30. Quellpunkte und Quellgebiete von Kraftlinien.

1. Es mögen in einem Raume T Elektrizitätsmengen verteilt sein, die ein elektrisches Feld erzeugen, dessen Kraftlinien wir uns

in einer der im vorigen Paragraphen eingeführten Weisen dargestellt denken können. Wir können nämlich entweder

(Darstellung A) das von jeder einzelnen Elektrizitätsmenge herrührende Feld durch radial in den umgebenden Raum auslaufende Gerade darstellen, deren Richtung und Dichte überall die diesem speziellen Felde zukommende Polarisation repräsentiert. Die einzelnen Felder überlagern sich. Oder wir können

(Darstellung B) die resultierenden Felder einzelner Gruppen von Ladungen durch Kraftlinien darstellen. Und wir können schließlich

(Darstellung C) das resultierende Feld sämtlicher Ladungen direkt durch Linien darstellen, deren Richtung und Dichte überall dieses resultierende Feld repräsentiert.

2. Wir denken uns in dem Raume T einen kleineren Raum τ durch eine beliebige Oberfläche O herausgeschnitten. Ein Teil e_i der gegebenen Elektrizitätsmengen möge in dem Raume τ liegen, ein anderer Teil e_a außerhalb τ. Die Oberfläche selber möge keine der Elektrizitätsmengen berühren (Fig. 102).

Von jeder Elektrizitätsmenge e gehen Kraftlinien aus (Darstellung A). Jede Kraftlinie von einem e_i durchsetzt die Oberfläche ein-, drei-, fünf- u. s. w. mal, wie der Augenschein ergibt. Jede von einem e_a ausgehende Kraftlinie durchsetzt sie garnicht, zwei-, vier- u. s. w. mal. Wir wollen fragen, „wieviel mehr Kraftlinien durchsetzen die Oberfläche von innen nach außen, als von außen nach innen“. Dabei haben wir die von außen nach innen hindurchtretenden Kraftlinien als negativ zu rechnen, wenn wir die von innen nach außen verlaufenden als positiv annehmen, und die Anzahl aller Kraftlinien algebraisch zu addieren. Die gesuchte Kraftlinienzahl sei n.

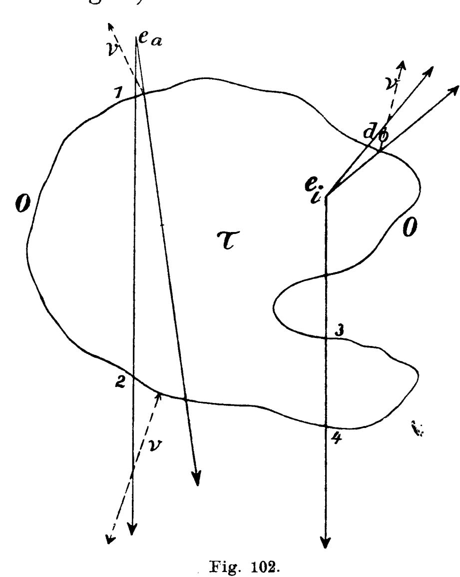


Fig. 102.

Wir betrachten eine Elektrizitätsmenge e_a des Außenraumes. Ihr im ganzen Raume variables Feld sei E_a. An einer Stelle 1 (Fig. 102) treten durch ein Oberflächenelement ebenso viele Kraftlinien ein, wie an einer Stelle 2

(durch ein entsprechend größeres Flächenelement) aus, und das gilt für jedes Flächenelement. Die Elektrizitätsmenge e_a und alle außerhalb τ gelegenen Elektrizitätsmengen tragen zu der gesuchten Zahl n nichts bei.

Dasselbe gilt, wenn eine äußere Elektrizitätsmenge eine Kraftlinie durch vier, sechs u. s. w. Schnittpunkte hindurchsendet.

Betrachten wir eine innere Elektrizitätsmenge e_i, so wird eine solche e_i Kraftlinien nach außen hindurchsenden. Bei einem mehr als einmaligen Hindurchtreten (z. B. an den Stellen 3, 4) heben sich immer zwei Beträge auf, und es bleibt als von e_i aus nach außen tretende Kraftlinienzahl die Zahl e_i übrig. Ist e_i negativ, so wird die Kraftlinienzahl e_i ebenfalls negativ. Bei beliebiger Anzahl e_i und e_a ergibt sich als Gesamtzahl n:

$$n = \sum_i e_i,$$

wenn das Zeichen $\sum_i$ die algebraische Summierung über alle eingeschlossenen Elektrizitätsmengen bedeutet.

3. Wir können die Zahl n noch anderweitig ausdrücken. Die Oberfläche O des Raumes τ zerlegen wir in Elemente do (Fig. 102), die so klein sind, daß wir jedes als eben ansehen dürfen. Es sei ν die auf do nach außen errichtete Normale.

Durch ein solches Oberflächenelement do treten nach § 29, 8., Satz IV

$$\varepsilon E_\nu \, do$$

Kraftlinien nach außen hindurch (Darstellung C). Demnach müssen wir die Gesamtzahl aller nach außen hindurchtretenden Kraftlinien durch Summierung dieses Betrages über die ganze Oberfläche O des Raumes τ erhalten. Somit wird

$$n = \sum_o \varepsilon E_\nu \, do = \sum e_i, \tag{1}$$

und hierin ist εE_ν die resultierende Polarisation in Richtung der äußeren Normalen, herrührend von allen, auch den äußeren Elektrizitätsmengen. Die Zahl n nennen wir den „Kraftlinienfluß durch die Oberfläche O“.

In der Summe $\sum_o$ liefert eine eintretende Kraftlinie von selbst einen negativen Beitrag, da die Projektion der entsprechenden Feldintensität auf die äußere Normale negativ wird.

Daraus folgt:

Kennen wir die Normalkomponente der dielektrischen Polarisation an jedem Orte einer geschlossenen Fläche, so kennen wir damit



auch die gesammte Elektrizitätsmenge, die von der Fläche eingeschlossen wird, gleichgültig, ob sich außerhalb der Fläche elektrische Ladungen befinden oder nicht.

Zusatz: Verkleinern wir das Volumen τ und seine Oberfläche O, so wird sich die Zahl n nur dann ändern, wenn dabei die Fläche O eine Ladung passiert.

4. Es sei ein elektrisches Feld gegeben, das wir uns durch die resultierenden Kraftlinien dargestellt denken wollen (Darstellung C). An irgend einer Stelle des Raumes, an der sich keine elektrische Ladung befinden möge, legen wir ein Flächenelement, dessen Größe durch $d\sigma$ gegeben sei, senkrecht zu der dort herrschenden Hauptrichtung der Feldintensität. Von einem Punkte P der Randkurve von $d\sigma$ (Fig. 103) aus ziehen wir nun eine beliebige endliche Strecke weit, bis P', eine Kraftlinie. Wir verschieben dann P über die Randkurve von $d\sigma$ hin, indem wir darauf achten, daß jeweils die von P ausgehende Kurve die Bahn der zugehörigen Kraftlinie darstellt, dann wird diese Kurve (PP') den Mantel eines röhrenförmigen Raumes beschreiben, den wir eine „Kraftröhre“ nennen.

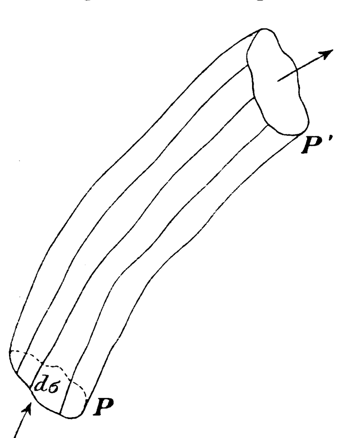


Fig. 103.

Das Innere der Kraftröhre wird ebenfalls von Kraftlinien erfüllt sein, d. h. durch jeden im Innern liegenden Punkt können wir eine Kraftlinie ziehen, aber auch nur eine. Wären es mehrere, so würden diese sich in dem gedachten Punkte schneiden; und das ist deshalb nicht möglich, weil an jedem Punkte die Kraftlinie uns die Richtung der resultierenden Feldintensität liefern soll und diese eindeutig ist. Es können sich also nirgends Kraftlinien schneiden und keine kann den Mantel der Kraftröhre durchdringen. Auch eine gegenseitige Berührung mehrerer Kraftlinien an einem Punkte ist unmöglich, da das eine unendliche Dichte der Kraftlinien am Berührungspunkte, also eine unendliche Feldintensität bedeuten würde. Eine solche schließen wir aber von unseren Betrachtungen aus.

An irgend einem Punkte P' unserer Kraftröhre (Fig. 103) legen wir wieder ein Flächenelement $d\sigma'$ normal zu den Kraftlinien. Das wird dann möglich sein, wenn der Querschnitt bei P' noch unendlich klein ist, wie bei P, und das ist wieder dadurch zu erreichen, daß man $d\sigma$ und PP' hinreichend klein wählt, wenn es nicht von selbst

erfüllt ist, was in hinreichendem Abstande von den vorhandenen elektrischen Ladungen der Fall sein wird.

5. Wir wollen auf unser Kraftröhrenstück PP' die Gleichung (1) anwenden. Bei der Summierung über die Oberfläche können wir dann den Mantel unberücksichtigt lassen, da er von Kraftlinien nicht durchsetzt wird. E_1 sei die Feldintensität an der Stelle P, E_2 die an der Stelle P'. ν sei die nach außen gerichtete Normale auf $d\sigma$ und $d\sigma'$; ν wird also abgesehen vom Vorzeichen mit der Richtung der Feldintensität zusammenfallen, da $d\sigma$, $d\sigma'$ zu dieser senkrecht stehen. Σe wird verschwinden und es bleibt:

$$N_{1\nu}\,d\sigma + N_{2\nu}\,d\sigma' = 0,$$
$$\varepsilon E_{1\nu}\,d\sigma + \varepsilon E_{2\nu}\,d\sigma' = 0,$$
$$\varepsilon E_{1\nu}\,d\sigma = -\,\varepsilon E_{2\nu}\,d\sigma'.$$

Da $E_{1\nu}$ und $E_{2\nu}$ entgegengesetzt gerichtet sind, folgt aus dem negativen Vorzeichen: Die Feldintensität und damit die Polarisation bei P und P' hat gleichen Richtungssinn zum Querschnitt $d\sigma$. Ist E_1, E_2 die Feldintensität in einer ein für allemal im Kraftröhrenstück definierten Richtung, etwa der Pfeilrichtung in Figur 103, so wird $E_1 = -\,E_{1\nu}$ und aus der letzten Gleichung wird

$$\varepsilon E_1\,d\sigma = \varepsilon E_2\,d\sigma'. \tag{2}$$

Das heißt: Es treten bei P ebenso viele Kraftlinien ein, als bei P' aus. Im Innern des betrachteten Kraftröhrenstückes enden oder entspringen keine Kraftlinien, und das deshalb, weil hier $\Sigma e_i = 0$ ist.

Innerhalb einer Kraftröhre, die keine Elektrizitätsmengen berührt, ist die Kraftlinienzahl, die einen Querschnitt durchsetzt, konstant, die Polarisation (Kraftliniendichte) umgekehrt proportional dem Querschnitt.

6. Wenn wir eine Elektrizitätsmenge e in eine geschlossene Fläche einschließen und diese Fläche sich so lange zusammenziehen lassen, als dies ohne Berührung der Elektrizitätsmenge möglich ist, so kommen wir zu dem Resultat: Kraftlinien können nur da enden, wo sich Elektrizitätsmengen befinden. Die e von der Ladung e ausgehenden Kraftlinien können wir so verteilen, daß wir jede Einheitsladung als den Ursprung der Kraftlinieneinheit ansehen. Oder unter Berücksichtigung des Vorzeichens:

Jede Kraftlinieneinheit entspringt an der positiven Einheit der Elektrizitätsmenge und endet an der negativen Einheit derselben.



7. Die Punkte, in denen Kraftlinien entspringen oder enden, nennen wir Quellpunkte; die ersteren heißen positive, die letzteren negative Quellpunkte.[1]) Wir nennen einen Quellpunkt von der Stärke a einen solchen, in dem a Kraftlinien entspringen. „Quellpunkte" und „Elektrizitätsmengen" sind also identisch. Wir könnten demnach jetzt den letzteren Namen fallen lassen und durch den ersteren ersetzen, was weiter keinen Zweck hätte als den, die Vollständigkeit des Kraftlinienbildes auch in der Nomenklatur wiederzugeben.

8. Die Ableitungen der letzten Abschnitte verlangten, daß es möglich sei, die Oberflächen der mit τ bezeichneten Räume, also auch die des Kraftröhrenstückes so zu legen, daß in ihr keine Elektrizitätsmenge liegt. Das ist dann möglich, wenn die Ladungen sich in diskreten Punkten befinden und uns wenn auch nur unendlich kleine Variationen unserer Flächen gestattet sind. Diese Betrachtung ist aber nicht mehr ausreichend, wenn die elektrischen Ladungen nicht in diskreten Punkten konzentriert sind, sondern sich kontinuierlich über Räume erstrecken, wenn eine „räumliche Ladung" vorliegt; denn dann kann es unter Umständen nötig sein, gerade in diesen Räumen das Kraftlinienbild zu verfolgen, und die Oberfläche z. B. eines Kraftröhrenstückes muß dann die Ladung durchschneiden. Ebenso verhält es sich, wenn die Ladungen sich auf Flächen ausgebreitet finden, wenn „Flächenladungen" vorliegen. Und gerade diese zwei Fälle sind es, die in der Natur vorkommen. Ladungen in Punkten können höchstens als Abstraktionen zu denken sein.

9. Es sei eine beliebige geschlossene Fläche gegeben, durch die wir den Kraftlinienfluß ermitteln wollen, und es sei gestattet, diese Fläche erforderlichenfalls unendlich wenig zu variieren (Fig. 104).

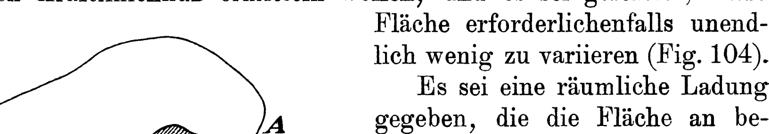


Fig. 104.

Es sei eine räumliche Ladung gegeben, die die Fläche an beliebigen Stellen durchdringen möge. Sie befinde sich in einem Raume τ' irgendwie verteilt.

Wir wollen annehmen, daß die Verteilung der Ladung so beschaffen sei, daß, wenn wir ein nach allen Richtungen hinreichend kleines Volumenelement $\Delta\tau'$ aus τ' herausschneiden, wir innerhalb dieses die Ladung als konstant ansehen dürfen. Mit anderen Worten:

1) Man spricht auch von „Quellen" (oder „Heben") und „Senken". Es ist aber zweckmäßiger, einen Ausdruck zu wählen, der von vornherein beides umfaßt, wie es der Ausdruck „Quellpunkt" tut.

Wenn wir an einem Orte von τ' die Ladung kennen, so soll an einem hinreichend benachbarten Orte die Ladung hinreichend wenig abweichen. Mathematisch heißt das, die Ladung sei eine „stetige“ Funktion des Ortes. Es wird dann jeder vorgegebene Bruchteil des Raumes $\varDelta\tau'$ den gleichen Bruchteil der Ladung von $\varDelta\tau'$ besitzen, die Ladung am Orte $\varDelta\tau'$ können wir proportional mit $\varDelta\tau'$ setzen, etwa gleich

$$\varrho\,\varDelta\tau'.$$

ϱ ist die in der unendlich kleinen Volumeneinheit enthaltene Ladung. Wir nennen ϱ die „räumliche Dichte der Elektrizität am Orte $\varDelta\tau'$“. Es muß nun ϱ so beschaffen sein, daß es, mit einem endlichen Volumen multipliziert, eine endliche Größe gibt, da sonst nicht die ganze in τ' enthaltene Ladung endlich sein könnte. ϱ ist demnach eine Funktion des Ortes und überall endlich. Bei der Anwendung der Gleichung (1) auf den Raum τ der Figur 104 ist es daher gleichgültig, ob wir den an dem Flächenstück AB haftenden Teil der Ladung zur inneren oder äußeren Ladung von τ rechnen, weil dieser Teil im Vergleich zu jedem Teil der räumlichen Ladung unendlich klein ist.

10. Ist eine Flächenladung gegeben, so gilt Entsprechendes. Da wir die Oberfläche von τ unendlich wenig variieren dürfen, können wir es so einrichten, daß sie die geladene Fläche höchstens in einer Linie (AB, Fig. 104, wenn wir τ' als Fläche auffassen und mit o' bezeichnen) schneidet. Ist o' die geladene Fläche, so wollen wir wieder Stetigkeit der Ladung auf ihr annehmen. Wir können eine „Flächendichte“ σ der Elektrizität analog der Raumdichte definieren. Es wird

$$\sigma\varDelta o'$$

die auf dem Flächenelement $\varDelta o'$ befindliche Ladung. σ muß mit einer endlichen Fläche multipliziert einen endlichen Wert geben. Längs der Linie AB kann sich also wieder nur eine unendlich kleine Ladung befinden und wir dürfen die von ihr ausgehende Kraftlinienzahl als unendlich klein vernachlässigen.

Wir können somit die Gleichung (1) (Seite 185) auch auf den Fall von Flächen- und Raumladungen anwenden. Mit den stetig verteilten Ladungen sind auch die Quellpunkte der Kraftlinien über Flächen oder Räume stetig verteilt. Wir wollen die Orte, in denen Kraftlinien entspringen oder endigen, allgemein als „Quellgebiete“ bezeichnen.

11. Es sei z. B. eine stetig mit Elektrizität bedeckte Fläche S gegeben (Fig. 105). Die Dichte der Ladung sei σ. Dann wird ein



Flächenelement dS die Ladung σdS besitzen. Wir denken uns einen Zylinderstumpf so um dS gelegt, daß die zwei Basisflächen sich in unendlich kleinem Abstand vor und hinter dS und parallel mit dS befinden. Figur 105 soll den Querschnitt, Figur 106 eine perspektivische Darstellung des Zylinders geben. dS selber sei unendlich klein, d. h. so klein, daß wir über dS hin σ als konstant ansehen

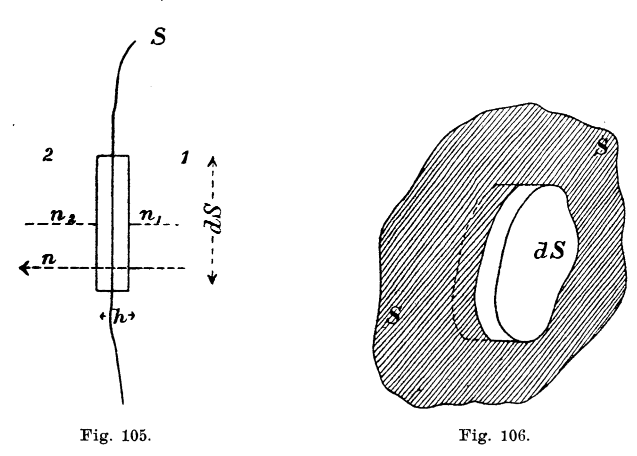


Fig. 105. Fig. 106.

dürfen. Die Mantelfläche des Zylinders sei aber wieder unendlich klein gegen dS. Wenn wir die Gleichung (1) auf die Oberfläche des Zylinderstumpfes anwenden, so können wir folglich die durch die Mantelfläche austretenden Kraftlinien vernachlässigen. Es wird dann

$$\sigma\, dS = (\varepsilon E_{n_1} + \varepsilon E_{n_2}) dS,$$

(3)
$$\sigma = \varepsilon E_{n_1} + \varepsilon E_{n_2},$$

wobei n_1 und n_2 entgegengesetzte Richtung haben. Definieren wir aber eine Richtung n normal zu dS und vom Raume 1 nach dem Raume 2 weisend (wie in Fig. 105) als positive Richtung, so wird

$$E_{n_1} = - E_{1n}; \quad E_{n_2} = + E_{2n},$$

und E_{1n} bedeutet die Größe der Feldintensität in der Richtung nach n auf der einen, in der Figur durch 1 bezeichneten Seite von dS, E_{2n} das gleiche auf der andern Seite. E_1, E_2 sind die resultierenden Feldintensitäten auf diesen beiden Seiten, gleichgültig, welche Ladungen außer σ noch im Raume sind. Es wird dann:

(4)
$$\varepsilon E_{2n} - \varepsilon E_{1n} = \sigma.$$

Die Differenz der Normalkomponenten der Polarisation auf beiden Seiten einer geladenen Fläche ist gleich der Flächendichte an der betrachteten Stelle.

§ 31. Das Potential.

1. Es sei eine Elektrizitätsmenge e in einem Punkte Q konzentriert gegeben, und ihr Feld durch Kraftlinien dargestellt. Im Abstand $QP_1 = r_1$ ist die Feldintensität, also die Kraft auf die unendlich kleine Elektrizitätseinheit

$$E_1 = \frac{e}{4\pi\varepsilon r_1{}^2},$$

und hat die Richtung von Q nach P_1 hin, wenn e positiv ist.

Verschiebt die elektrische Kraft von P_1 aus die Elektrizitätsmenge um ein geradliniges unendlich kleines Stück ds bis P_2 (Fig. 107), so leistet sie nach § 22, 8. die Arbeit $E_1 p_1$, wenn p_1 die Projektion der Verschiebung ds auf die Kraftrichtung bedeutet. In P_2 wird die Feldintensität

$$E_2 = \frac{e}{4\pi\varepsilon r_2{}^2}$$

herrschen, die nach Größe und Richtung nur unendlich wenig von E_1 abweichen wird. Wir können demnach auch statt der Arbeit der Kraft E_1 die der Kraft E_2 in Rechnung setzen, ohne einen merklichen Fehler zu machen. Diese Arbeit ist gleich $E_2 p_2$, wenn p_2 wieder die Projektion von ds auf die Kraftrichtung E_2 bedeutet.

Noch sicherer werden wir gehen, wenn wir aus den beiden Feldintensitäten E_1, E_2 einen Mittelwert bilden, und ebenso aus den beiden Verschiebungen p_1, p_2. Wählen wir das geometrische Mittel der Feldintensitäten und das arithmetische der Verschiebungen, so gestaltet sich die Rechnung besonders einfach. Es wird dann die bei der Verschiebung über ds geleistete Arbeit

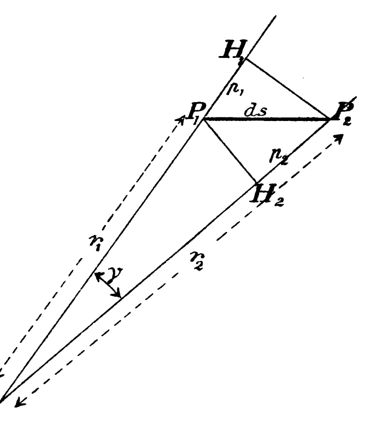


Fig. 107.

$$\varDelta A = \sqrt{E_1 E_2}\,\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{e}{4\pi\varepsilon}\,\frac{p_1 + p_2}{2 r_1 r_2}.$$

2. Es ist (vgl. Fig. 107)

$$p_1 = r_2 \cos\gamma - r_1; \quad p_2 = r_2 - r_1 \cos\gamma,$$

wenn γ den Winkel zwischen r_1 und r_2 bedeutet, also

$$p_1 + p_2 = (r_2 - r_1)(1 + \cos\gamma).$$

Je kleiner wir ds machen, um so kleiner wird γ und um so mehr wird sich der Faktor $1 + \cos\gamma$ dem Werte 2 nähern, gleichgültig, was aus $(r_2 - r_1)$ wird. Dann wird

$$\varDelta A = \frac{e}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Die bei der Verschiebung geleistete Arbeit ist nur von den Abständen r_1 und r_2 der Anfangs- und Endlage abhängig, nicht von den Abständen, die der verschobene Punkt während der Verschiebung von e besitzt.

3. Führen wir eine zweite Verschiebung bis zu einem Abstand r_3 aus, so wird

$$\varDelta A = \frac{e}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{e}{4\pi\varepsilon r_2} + \frac{e}{4\pi\varepsilon r_2} - \frac{e}{4\pi\varepsilon r_3} = \frac{e}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{e}{4\pi\varepsilon r_3},$$

und das gilt auch für unendlich viele unendlich kleine Verschiebungen. Bei einer beliebigen endlichen Verschiebung einer Elektrizitätseinheit auf beliebiger Bahn von einem Punkte P_1 nach einem in endlichem Abstande befindlichen P_2 (Fig. 108) wird die geleistete Arbeit

$$A = \frac{e}{4\pi\varepsilon r_1} - \frac{e}{4\pi\varepsilon r_2}$$

sein. Das bleibt auch bestehen, wenn $r_1 > r_2$ ist. Es wird dann A negativ, wir leisten Arbeit gegen die elektrischen Kräfte.

4. Befindet sich in einem weiteren Punkte Q' eine Elektrizitätsmenge e', so werden wir bei der Verschiebung der Elektrizitätseinheit von P_1 nach P_2 eine analoge Arbeit leisten, die sich über die vorige superponiert. Es wird

$$A = \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon r_1} + \frac{e'}{4\pi\varepsilon r_1'}\right) - \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon r_2} + \frac{e'}{4\pi\varepsilon r_2'}\right),$$

wenn r_1', r_2' die Abstände der Punkte P_1 und P_2 von Q' bedeuten. So können wir noch beliebige weitere Ladungen im Raume annehmen und bekommen bei beliebigen n Elektrizitätsmengen:

$$A = \sum_n \frac{e_n}{4\pi\varepsilon r_1} - \sum_n \frac{e_n}{4\pi\varepsilon r_2}.$$

Definieren wir eine Funktion des Ortes, das „Potential", durch

$$(1) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum\frac{e}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3} + \cdots\right)$$

(Fig. 109, in der $r_1, r_2, \ldots$ an Stelle der früher mit $r_1, r_1', \ldots$ bezeichneten Radien tritt), so wird die erste der obigen Summen den Wert von φ im Punkte P_1, die zweite den im Punkte P_2 ergeben.

φ ist eine eindeutige Funktion des Ortes; d. h. φ besitzt an jedem Punkte des Raumes einen und nur einen bestimmten Wert und wechselt mit dem Orte diesen Wert. Um darauf besonders hinzuweisen, wollen wir $\varphi(P)$ anstatt φ setzen.

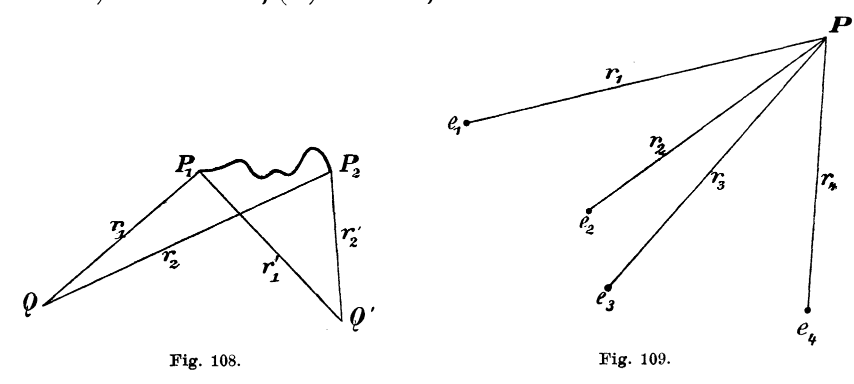


Fig. 108. Fig. 109.

5. Die Gleichung (1) läßt sich leicht auf eine räumliche oder Flächenladung anwenden. Sind Punktladungen e vorhanden, räumliche Ladungen von der Dichte ϱ und Flächenladungen von der Dichte σ, so wird

$$(2) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left\{\sum \frac{e}{r} + \sum_{\tau} \frac{\varrho\, d\tau}{r} + \sum_{o} \frac{\sigma\, do}{r}\right\}.$$

Hierin ist die zweite Summe über den Raum oder die Räume τ, die dritte über die Fläche oder die Flächen o zu erstrecken, die eine stetig verteilte Ladung besitzen.

Aus Gleichung (2) sehen wir, daß sich die Potentiale der einzelnen Ladungen oder Gruppen von Ladungen addieren.

6. Wir haben also bewiesen: Die Arbeit, die beim Verschieben der unendlich kleinen Elektrizitätseinheit von einem Punkte P_1 nach einem Punkte P_2 von den elektrischen Kräften geleistet wird, ist

$$(3) \qquad A = \varphi(P_1) - \varphi(P_2).$$

φ heißt das Potential der elektrischen Verteilung. Das Potential ist eine eindeutige skalare Funktion des Ortes, und die genannte Arbeit gleich der Potentialdifferenz des Anfangs- und Endpunktes der Verschiebung.

Bei der Definition (1), (2) des Potentials dürften wir auch eine willkürliche, ein für allemal feste Konstante φ_0 additiv hinzufügen. Da wir im folgenden immer nur mit Potentialdifferenzen zu tun haben werden, fällt diese immer heraus. Die beiden Gleichungen (1), (2) nehmen dann Formen an, aus denen folgt, daß wir diese Konstante

als den Wert des Potentials im Unendlichen (für $r = \infty$) auffassen können. Die Gleichungen (1), (2) selber geben im Unendlichen den Wert $\varphi = 0$.

7. Die von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit ist positiv, wenn $\varphi(P_2) < \varphi(P_1)$ ist. Dann ist $\varphi(P_1) - \varphi(P_2)$ die Abnahme des elektrischen Potentials bei einer Verschiebung. Es seien P_1 und P_2 zwei unendlich benachbarte Punkte, s ihre Verbindungslinie. Die Abnahme des Potentials wird dann ebenfalls unendlich klein; wir bezeichnen sie mit $\varDelta\varphi$. Ist E_s die Feldintensität in der Richtung s, so wird die Arbeit bei der ausgeführten Verschiebung:

$$\varDelta\varphi = E_s s,$$

also

$$E_s = \frac{\varDelta\varphi}{s}, \tag{4}$$

d. h. die s-Komponente der Feldintensität ist gleich der Abnahme des Potentials längs einer unendlich kleinen Längeneinheit von s. Wir sehen aus (4), wie wir die resultierende Feldintensität aus der Potentialfunktion ableiten können.

Die Abnahme irgend einer skalaren Funktion längs einer Längeneinheit nennen wir das „Gefälle“ dieser Funktion. Dann ist also die Feldintensität gleich dem Potentialgefälle.

8. Weiter können wir aus (4) folgern, daß die Potentialdifferenz zweier in endlichem Abstande gelegener Punkte gegeben ist durch (Fig. 110):

Fig. 110.

$$\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \varDelta\varphi_1 + \varDelta\varphi_2 + \cdots$$
$$= E_s^{(1)} s_1 + E_s^{(2)} s_2 + \cdots,$$

$$\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \sum_{P_1}^{P_2} E_s s; \tag{5}$$

hier haben wir die einzelnen Strecken $s_1, s_2, \ldots$ so klein zu wählen, daß wir jede als geradlinig und außerdem längs einer jeden E_s als konstant ansehen dürfen.

Den Ausdruck

$$A = \Sigma E_s s$$

nennen wir die „elektromotorische Arbeit über die Kurve $s_1 + s_2 + \cdots$“, da er die bei der Verschiebung der unendlich kleinen Elektrizitätseinheit geleistete Arbeit bedeutet. Wir müssen dabei beachten, daß A nicht wirklich die Dimensionen einer Arbeit hat, sondern erst durch Multiplikation mit einer Elektrizitätsmenge zur Arbeit wird, ebenso

wie E durch Multiplikation mit einer Elektrizitätsmenge zur Kraft wird. Den Dimensionen nach ist (vgl. § 28, 4.)

$$|A| = |E| \cdot |l| = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}.$$

Die Einheit von A im absoluten Gaußschen Maßsystem ist

$$1\ \mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

Die gleichen Dimensionen und Einheit besitzt auch das Potential (wegen (5)). In der Technik verwendet man als Einheit den dreihundertsten Teil der vorigen Einheit und nennt diese „ein Volt“. Es sind also

$$300\ \mathrm{Volt} = 1\ \mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

9. Aus (5) folgt:

Die elektromotorische Arbeit $\Sigma E_s s$ ist von dem Wege unabhängig, und nur vom Anfangs- und Endpunkte des Weges abhängig.

Wir können die Gleichung (5) als Definition des Potentials einführen. Sie gibt uns allerdings zunächst nur Potentialdifferenzen zwischen irgend zwei Punkten. Setzen wir aber in einem beliebigen Punkte einen willkürlichen Wert φ_0 fest, so erhalten wir eine eindeutige Definition des Potentials im ganzen Raume. Der Wert φ_0 verfügt über die in Nr. 6, Schluß, angeführte Konstante φ_0, mit der er aber im allgemeinen nicht identisch sein wird.

10. Die Gleichung (5) lehrt weiter, daß

$$\sum_P^P E_s s = \sum_{\circlearrowleft} E_s s$$

von einem Punkte P über irgend einen Weg bis zu diesem zurücksummiert, was durch das Zeichen $\circlearrowleft$ angedeutet sein soll, verschwinden muß.

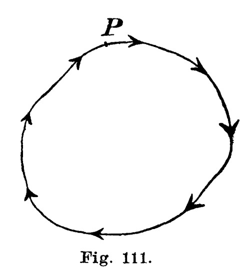
$$\sum_{\circlearrowleft} E_s s = 0. \qquad (6)$$

Die elektromotorische Arbeit über eine beliebige geschlossene Kurve ist gleich Null.

In Worten sagt die Gleichung (6) aus:

Es gibt keine in sich zurücklaufenden Kraftlinien.

Denn denken wir uns, wir zeichneten in der in § 29 angegebenen Weise eine Kraftlinie, und kämen von einem Punkte P ausgehend


Fig. 111.

auf diesen Punkt P zurück, so würden wir längs dieses Weges überall auf positive Beträge von E stoßen (Fig. 111). Bilden wir über diese Kraftlinie die Summe ΣEs, so würde diese sich aus lauter positiven Summanden zusammensetzen, könnte also nicht den Betrag 0 liefern.

§ 32. Äquipotential- oder Niveauflächen.

1. Aus der Definition für das Potential (§ 31, (1))

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum\frac{e}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2}+\cdots\right), \tag{1}$$

wozu noch nach § 31, 6. eine Konstante φ_0 hinzutreten kann, folgt, daß an jedem Orte des Raumes ein und nur ein bestimmter Wert des Potentials existieren muß, daß also das Potential eine „eindeutige" Funktion des Ortes ist. Das übersieht man vielleicht noch leichter, wenn man den Ort durch rechtwinklige Koordinaten bezeichnet.

Die Elektrizitätsmenge e_1 möge sich an einem Punkte x_1, y_1, z_1, die Elektrizitätsmenge e_2 an einem Punkte x_2, y_2, z_2 u. s. f. eines Cartesischen Koordinatensystems befinden. Das Potential an einem Punkte x, y, z ist dann nach obiger Gleichung:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}} + \frac{e_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}}+\cdots\right); \tag{2}$$

denn nach Bd. II, § 99 ist

$$r_1^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2.$$

Die Wurzeln sind hier mit positiven Zeichen einzusetzen, da die $r_1, r_2, \ldots$ die absoluten Werte der Abstände der Punkte x, y, z von den Orten der Ladungen $e_1, e_2, \ldots$ bedeuten. Kennen wir alle elektrischen Ladungen und die Orte, an denen sie sich befinden, d. h. die Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$, so ist es leicht, aus dieser Gleichung den Wert von φ für jeden gewünschten Punkt zu ermitteln, und für jeden Punkt wird sich ein und nur ein Wert für φ ergeben.

2. Wir können aber umgekehrt die Frage stellen: In welchem Punkte wird φ einen vorgegebenen Wert φ_1 einnehmen? Dann haben wir in die Gleichung (2) für φ den Wert φ_1 einzusetzen und erhalten eine Gleichung für drei Unbekannte x, y, z. Geben wir den beiden Koordinaten x, y innerhalb gewisser Grenzen beliebige

Werte, so wird der Wert der dritten Variablen z aus der Gleichung $\varphi = \varphi_1$ gefunden werden und er wird sich mit x, y stetig verändern. Wir erhalten dann die Punkte einer krummen Oberfläche, die durch die Gleichung $\varphi = \varphi_1$ in demselben Sinne dargestellt ist, wie wir im § 71 des zweiten Bandes durch die allgemeine Gleichung 2ten Grades zwischen zwei Koordinaten x, y die Kegelschnitte in der Ebene dargestellt haben.

Diese Fläche heißt „Äquipotential- oder Niveaufläche“.

3. Daß dies in gewissen Fällen zutrifft, erkennen wir z. B., wenn wir uns auf eine einzige Elektrizitätsmenge in einem Punkte beschränken. Dann geht die Gleichung (2) in die einer Kugel über, die den Ort der Ladung als Mittelpunkt hat (Bd. II, § 102), was wir auch schon aus (1) erkennen können. Ändern wir den Wert φ_1, so erhalten wir immer andere konzentrische Kugelflächen.

Die Niveauflächen einer punktförmigen Ladung sind konzentrische Kugelflächen.

4. Sind zwei gleiche punktförmige Ladungen vorhanden, so werden die Punkte gleichen Potentials φ_1 in Abständen r_1, r_2 von diesen Ladungen liegen, die der Gleichung

$$\frac{4\pi\varepsilon\varphi_1}{e} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}$$

genügen, $+$ oder $-$, je nachdem die beiden Ladungen gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Diese beiden Fälle der Gleichung unterscheiden sich ähnlich, wie es Hyperbeln und Ellipsen in der Ebene tun. In der Tat zeigen die durch die Gleichung gegebenen Flächenscharen im Schnitt Verwandtschaft mit den Hyperbeln

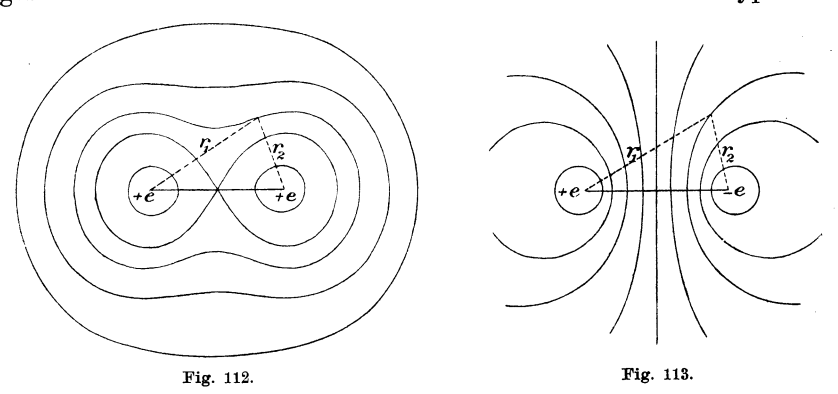


Fig. 112. Fig. 113.

und Ellipsen, sind aber komplizierter gebaut, was hier nur erwähnt sein möge. Die Figur 112 stellt im Schnitt den ungefähren Verlauf der Niveauflächen bei zwei gleichen, die Figur 113 das gleiche bei zwei entgegengesetzt gleichen Ladungen dar.

5. Auch bei Vorhandensein beliebig vieler Ladungen e wird unter der gemachten Voraussetzung einem anderen Werte $\varphi = \varphi_2$ eine andere Niveaufläche entsprechen (vgl. Fig. 115). Der ganze Raum wird von Niveauflächen erfüllt sein.

Wir wollen sagen, wir beschränken uns in Zukunft auf die Fälle, wo die Punkte konstanten Potentials Flächen, die Niveauflächen, erfüllen, und haben dann jeweils bei Anwendung der daraus gezogenen Folgerungen zu prüfen, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Da das Potential eine eindeutige Funktion des Ortes ist, so gilt der Satz:

> Zwei Äquipotentialflächen können sich nie schneiden.

Denn sonst würden in den Schnittpunkten die beiden Potentialwerte, die den beiden Flächen zukommen, gleichzeitig gelten. Natürlich ist das nur dann gültig, wenn wir mit dem resultierenden Felde der ganzen Ladungsverteilung rechnen.

6. Wählen wir zwei unendlich benachbarte Äquipotentialflächen, deren Potentialdifferenz $\Delta\varphi$ ist, so folgt nach § 31, Gleichung (4): $E_s = \Delta\varphi/s$, daß E_s dann ein Maximum wird, wenn s ein Minimum wird. Dann wird E_s der absolute Wert E; s ist die Verbindungslinie je eines Punktes der beiden Flächen (Fig. 114). Da wir die zwei unendlich benachbarten Flächen jedenfalls, wenn wir uns auf ein hinreichend kleines Gebiet beschränken, als parallel ansehen dürfen, so wird s dann ein Minimum, wenn es der normale Abstand n der beiden Flächen ist. Also

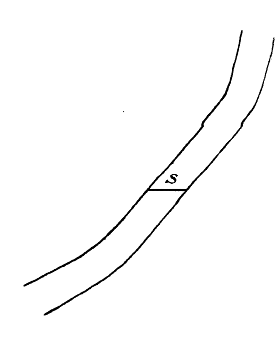


Fig. 114.

$$E = E_n = \frac{\Delta\varphi}{n}, \tag{3}$$

und daraus folgt, daß die Kraftlinien überall normal zu den Äquipotentialflächen stehen. Das erkennt man auch daran, daß eine Bewegung einer unendlich kleinen Elektrizitätseinheit innerhalb einer Äquipotentialfläche keine Arbeitsleistung erfordert, ebensowenig wie eine Bewegung derselben normal zu den Kraftlinien.

Umgekehrt können wir schließen: Wenn wir eine Fläche ausfindig machen, die überall normal zu den Kraftlinien steht, so ist sie eine Niveaufläche. Das kann auch als Kriterium für das Vorhandensein von Niveauflächen dienen.

7. Es sei ein elektrisches Feld gegeben, das in einem von uns betrachteten Raume nirgends unendliche Feldintensität aufweist. Ein



solches ist jedenfalls dann vorhanden, wenn nirgends in einem Punkte konzentrierte endliche Elektrizitätsmengen existieren, sondern die Ladungen auf Räume oder Flächen stetig verteilt sind (vgl. das Coulombsche Gesetz). Wir ziehen von einem Punkte P_1 (Fig. 115) aus eine Niveaufläche φ_1, die nach vorigem überall normal zu den Kraftlinien stehen muß. Bei P_1 gehen wir normal zu dieser Fläche um einen unendlich kleinen Abstand dn (unendlich klein verglichen mit allen meßbaren Strecken) zu einem Punkte P_2 vor und legen durch diesen wieder eine Niveaufläche φ_2. Die Potentialdifferenz der beiden Flächen ist dann nach Gleichung (3):

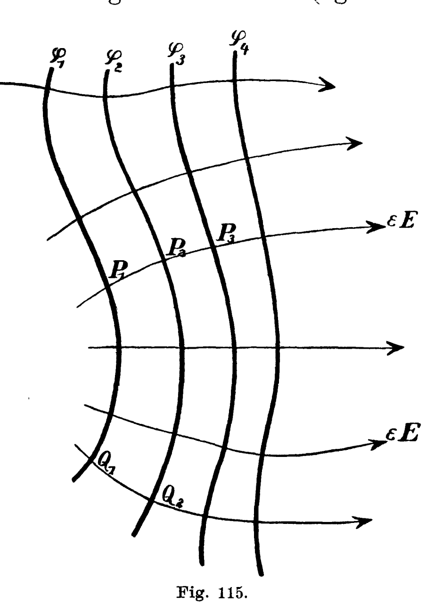


Fig. 115.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E\,dn,$$

wenn E die Feldintensität bei P_1 bezeichnet. Da E nicht unendlich groß werden soll, so muß $\varphi_1 - \varphi_2$ unendlich klein sein.

Sind Q_1, Q_2 zwei andere auf einer und derselben Kraftlinie liegende Punkte der beiden Niveauflächen, so können wir beweisen, daß diese beiden Punkte ebenfalls unendlich nahe aneinander liegen müssen. Denn aus Gleichung (5), § 31 folgt

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{Q_1}^{Q_2} E_s\,ds,$$

wenn wir ds als ein unendlich kleines Teilstück des längs der Kraftlinie gemessenen Abstandes $\overline{Q_1 Q_2} = \Delta_n$ auffassen. E_s ist der variable Wert, den E längs dieser Verbindungslinie einnimmt. Ist nun E_0 ein geeignet gewählter Mittelwert aller dieser E_s, so können wir setzen

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_0\,\Sigma ds = E_0 \Delta_n,$$

woraus der Mittelwert zu berechnen wäre.

Da aber $\varphi_1 - \varphi_2$ unendlich klein ist, so muß Δ_n immer unendlich klein sein, so lange E_0 nicht Null wird. E_0 kann aber nur dann Null werden, wenn E_s längs Δ_n aus positiven und negativen Teilen besteht. Dann aber müssen auch Nullwerte von E längs Δ_n vorkommen, und wir haben den Satz:

Zwei Äquipotentialflächen, die an einer Stelle unendlich benachbart sind, bleiben es überall, wenn nicht zwischen ihnen irgendwo Nullwerte der elektrischen Feldintensität einsetzen. (Vgl. § 34, 11., I.)

Schließen wir diese Orte aus, so folgt aus dem unendlich kleinen Abstand, daß überall zwischen den zwei Niveauflächen

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E\,dn$$

ist, daß also E überall umgekehrt proportional dem Vertikalabstand der beiden Niveauflächen ist.

8. Über die Anzahl der Niveauflächen, resp. über ihre Dichtigkeit können wir ähnlich verfügen, wie wir es bei den Kraftlinien getan haben. Wir gehen von dem Punkte P_2 weiter bis zu einem Punkte P_3 (Fig. 115), der so weit entfernt ist, daß

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2 = \Delta_0 \varphi,$$

also daß

$$dn\Big|_{P_2}^{P_3} = \frac{\Delta_0 \varphi}{E}$$

ist. $dn\Big|_{P_2}^{P_3}$ soll den zwischen P_2 und P_3 gemessenen Abstand der zwei Niveauflächen bedeuten. Fahren wir so fort und ziehen wir also alle Äquipotentialflächen im ganzen Raume in einem solchen Abstande, daß immer zwei aufeinander folgende die konstante Potentialdifferenz $\Delta_0 \varphi$ geben, so gilt ganz allgemein im Raume:

Der reziproke Abstand zweier aufeinander folgender Niveauflächen ist überall proportional der Feldintensität an dem betreffenden Orte.

9. Der Proportionalitätsfaktor ist das $\Delta_0 \varphi$, über das wir nun noch verfügen können, insofern wir es nur unendlich klein — gegenüber Potentialdifferenzen an den Enden meßbarer Kraftlinienstücke — halten. Wir wollen aus einer Kraftlinie ein unendlich kleines Stück ds herausschneiden, d. h. ein Stück, das so klein ist, daß wir die Feldintensität E längs desselben als konstant annehmen dürfen. Wir teilen dieses Stück in m gleiche Teile, wo m eine sehr große Zahl sein möge. Einen dieser gleichen Teile fassen wir als das dn der vorigen Betrachtungen auf, was deshalb erlaubt ist, weil wegen der Konstanz von E längs ds die Potentialdifferenz $\Delta_0 \varphi$ an den beiden Enden aller Teilstücke dn konstant ($= E\,dn$) ist. Es ist danach

$$dn = \frac{ds}{m} = \frac{\Delta_0 \varphi}{E},$$

und der reziproke Abstand ist

$$\frac{1}{dn} = \frac{m}{ds} = \frac{E}{\Delta_0 \varphi},$$

$$E = \Delta_0 \varphi \frac{m}{ds}.$$

m/ds ist aber die Anzahl Äquipotentialflächen, die von der unendlich kleinen Längeneinheit unserer Kraftlinie ds geschnitten werden. Wir können m/ds die „Niveauflächendichte“ nennen.

Die letzte Gleichung heißt demnach in Worten:

Ziehen wir die Niveauflächen so, daß jeweils zwei aufeinander folgende die gleiche unendlich kleine Potentialdifferenz ergeben, so ist die Niveauflächendichte überall proportional der Feldintensität.

Es steht uns frei, den Proportionalitätsfaktor gleich 1 zu setzen, wenn wir uns dessen bewußt sind, daß wir dadurch eine neue Einheit für die Niveauflächendichte konstruieren. Ähnliches haben wir ausgeführt, als wir die Kraftliniendichte definierten, indem wir die von der Elektrizitätseinheit ausgehende Kraftlinienzahl mit 1 bezeichneten.

§ 33. Beispiele.

A.

1. Wie sich die Kraftlinien bei einer punktförmigen Ladung gestalten, haben wir bereits gesehen. Die Kraftrichtung ist überall radial zu dem Quellpunkt gerichtet. Daraus folgt ohne weiteres, daß die Niveauflächen Kugelflächen um den Quellpunkt sind, was man auch schon aus der in diesem Falle geltenden Form des Potentials (Gleichung (1) in § 31)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{r}$$

erkennt. Denn φ ist danach auf allen den Flächen konstant, die ein konstantes r ergeben, und das sind Kugelflächen. Die Niveauflächendichte nimmt mit dem Quadrat des Radius ab, ebenso wie die Kraftliniendichte; denn ist Δ die Entfernung zweier aufeinander folgender Niveauflächen, so ist die Niveauflächendichte proportional mit $1 : \Delta$ (§ 32, 9.). Es ist aber Δ so zu bestimmen, daß die Potentialdifferenz an ihren Enden konstant, daß also

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta}$$

von r unabhängig ist, d. h. es muß

$$\frac{\varDelta}{r(r+\varDelta)} = \text{const.}$$

sein, oder, da $\varDelta$ unendlich klein,

$$\varDelta = \text{const.}\ r^2.$$

Prinzipiell könnten wir alle Probleme hierauf zurückführen, wenn wir die „Darstellung A“ (§ 30) wählen. Die drei Darstellungsarten A, B, C sind auch bei Niveauflächendarstellung gleichberechtigt. Die meisten Probleme werden aber in der Darstellung A komplizierter.

B. Plattenkondensator.

2. Es seien zwei parallele Ebenen α, β gegeben. α habe die konstante Flächendichte σ, β die konstante Flächendichte $-\sigma$. Der Abstand der beiden Platten sei so klein gegen die Ausdehnung der Platten, daß wir letztere als unendlich groß ansehen dürfen.

Aus Symmetriegründen können wir bereits einige Schlüsse ziehen.

I. Die Kraftlinien werden normal auf den Flächen α, β stehen, da keine andere Richtung bevorzugt ist, unendlich große Platten vorausgesetzt.

II. Wählen wir die Kraftliniendarstellung derart, daß wir die Kraftlinien beider Ebenen unabhängig voneinander konstruieren und sich überlagern lassen (Darstellung B), so wird die Fläche α die Hälfte ihrer Kraftlinien nach rechts, die Hälfte nach links senden. Dasselbe gilt von der Fläche β.

Die Gleichung (3), § 30 gibt die Anzahl Kraftlinien an, die von der Flächeneinheit der Flächen α und β ausgehen.

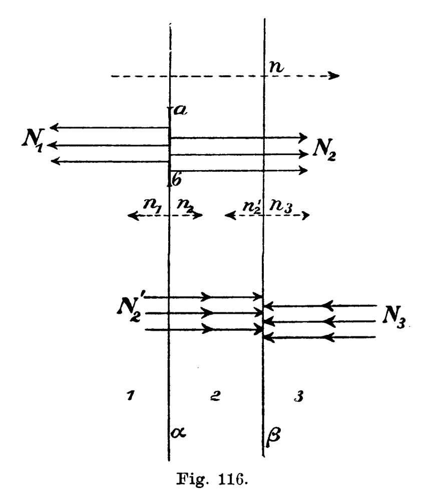


Fig. 116.

Es ist (vgl. Flächenstück $\overline{ab}$ Fig. 116)

$$N_1 + N_2 = \varepsilon E_{n_1} + \varepsilon E_{n_2} = \sigma$$

diese von der Flächeneinheit ausgehende Zahl Kraftlinien. Die Zahl εE_{n_1} geht in den Raum 1 (Fig. 116) hinein, die Zahl εE_{n_2} in den Raum 2 und wegen II. muß sein

$$N_1 = N_2 = \frac{\sigma}{2},$$

$$\varepsilon E_{n_1} = \varepsilon E_{n_2} = \frac{\sigma}{2}\cdot$$

Legen wir ein für allemal eine Normalrichtung n (Fig. 116) als positiv zugrunde, so wird

$$n_1 = -n; \quad n_2 = +n; \quad E_{n_1} = -E_1{}^\alpha; \quad E_{n_2} = +E_2{}^\alpha,$$

wenn wir unter $E_1{}^\alpha$ das von der Fläche α im Raume 1 erzeugte Feld verstehen, das die Richtung n besitzt. Es ist somit

(1) $$\varepsilon E_1{}^\alpha = -\frac{\sigma}{2}; \quad \varepsilon E_2{}^\alpha = \varepsilon E_3{}^\alpha = +\frac{\sigma}{2}.$$

3. Die Fläche β besitzt die negative Dichte $-\sigma$ und es werden die von ihr erzeugten Kraftlinien alle auf β hinweisen. Es wird

$$\varepsilon E_{n_2'} = \varepsilon E_{n_3} = -\frac{\sigma}{2}$$

sein, analog früherem, und somit, wenn wir die in Gleichungen (1) angedeutete Ausdrucksweise wählen, wird:

(2) $$\varepsilon E_1{}^\beta = \varepsilon E_2{}^\beta = +\frac{\sigma}{2}; \quad \varepsilon E_3{}^\beta = -\frac{\sigma}{2}.$$

4. Addieren wir in den einzelnen Räumen die Kraftlinienzahlen (Kraftliniendichten), so ergibt sich die „Kraftlinien-Darstellung C" (§ 30). Wir setzen als resultierendes Feld

$$E^\alpha + E^\beta = E,$$

und es wird nach (1) und (2)

im Raume 1: $\varepsilon E_1 = 0,$

im Raume 2: $\varepsilon E_2 = \sigma,$

im Raume 3: $\varepsilon E_3 = 0.$

Ein Feld existiert nur zwischen den beiden Ebenen.

Dieses Feld

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

ist konstant, „homogen" im ganzen Zwischenraum. Wir können demnach leicht die Potentialdifferenz der beiden Platten berechnen. Da die Kraftlinien alle parallel und normal zu α und β sind, existieren nach § 32, 6. Schluß, Niveauflächen und diese sind Ebenen, die parallel mit α, β verlaufen. Ist h der Plattenabstand, so geht die Gleichung (5), § 31 wegen der Konstanz des Feldes E über in

(3) $$\varphi_\alpha - \varphi_\beta = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon} h.$$

Die Betrachtungen der vorigen Abschnitte werden fehlerhaft an den Rändern der beiden Ebenen α, β, wenn diese nicht wirklich unendlich groß sind. Sie geben richtige Werte des Potentials und der Feldintensität nur in mittleren Partien.

5. Ein Apparat, der aus zwei mit entgegengesetzt gleichen Elektrizitätsmengen geladenen Flächen besteht, heißt ein „Kondensator". Die Elektrizitätsmenge, um die die positive Flächenladung vermehrt werden muß, damit die Potentialdifferenz um die Einheit wächst, heißt die „Kapazität" des Kondensators. Aus Gleichung (3) folgt für den unendlich großen „Plattenkondensator", daß die Ladung

$$\frac{\sigma}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{\varepsilon}{h}$$

die Elektrizitätsmenge ist, die wir der Flächeneinheit zuführen müssen, um die Potentialdifferenz um die Einheit zu vermehren. Es ist also

$$C' = \frac{\varepsilon}{h}$$

die Kapazität der Flächeneinheit des Kondensators.

Ein beliebiges endliches Flächenstück f hat demnach die Kapazität

$$C = C'f = \varepsilon \frac{f}{h} \cdot$$

Die Kapazität des Plattenkondensators ist um so größer, je kleiner der Abstand der Platten ist.

Es ergibt sich aus letzter Gleichung, daß die Kapazität die Dimensionen einer Länge hat, was sich auch direkt aus der Definition der Kapazität folgern läßt.

Als Einheit der Kapazität dient in der Wissenschaft dementsprechend 1 cm. Die Praxis gebraucht eine $9 \cdot 10^{11}$ mal so große Einheit, das „Farad", oder den millionten Teil hiervon, das „Mikrofarad".

C. Elektrisch geladene Kugelfläche.

6. Eine Kugelfläche vom Radius a sei mit einer gleichförmig auf ihr verteilten Flächenladung e versehen, deren Dichte demnach den konstanten Wert

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}$$

besitzt. Wir fragen zunächst nach der Potentialverteilung im Innenraum der Kugel.

P sei ein beliebiger Punkt des Innenraumes. do sei ein hinreichend kleines Oberflächenelement der Kugel, ϱ der Abstand $\overline{P\,do}$. Dann ist das Potential in P nach Gleichung (2), § 31

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum \frac{\sigma\, do}{\varrho},$$

wobei über die ganze Kugelfläche zu summieren ist.

Die Zerlegung der Kugelfläche in Oberflächenelemente führen wir nach folgendem Prinzip durch (Fig. 117):

7. Zunächst zerlegen wir die Kugelfläche in zwei Teile durch den Schnittkreis, den die zum Durchmesser in P normale Sehnen-

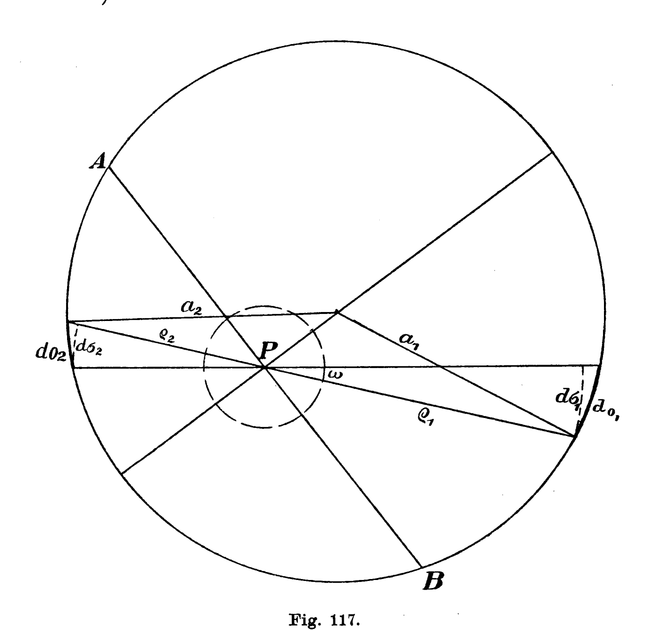


Fig. 117.

ebene AB aus der Kugel ausschneidet. Den größeren Oberflächenteil zerlegen wir in beliebige unendlich kleine Teilelemente do_1 und zeichnen den Kegelmantel von der Randkurve von do_1 nach P als Spitze. Diesen Mantel verlängern wir, bis er den zweiten Oberflächenteil trifft und hier das Element do_2 herausschneidet. So ordnen wir jedem do_1 ein do_2 zu. $d\sigma_1$ sei der Querschnitt des Kegels bei do_1, $d\sigma_2$ das Gleiche bei do_2, so daß

$$d\sigma_1 = do_1 \cos \widehat{\varrho_1 a_1},$$
$$d\sigma_2 = do_2 \cos \widehat{\varrho_2 a_2}$$

ist. Es ist aber, wie sich aus dem gleichschenkligen Dreieck mit den Seiten a_1, a_2 und $\varrho_1 + \varrho_2$ in Figur 117 ergibt:

$$\cos \widehat{\varrho_1 a_1} = \cos \widehat{\varrho_2 a_2} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2a},$$

und somit:

$$do_1 = d\sigma_1 \frac{2a}{[\text{illegible}]}, \quad do_2 = d\sigma_2 \frac{2a}{[\text{illegible}]}.$$

Ferner verhält sich

$$d\sigma_1 : d\sigma_2 = \varrho_1^2 : \varrho_2^2,$$

oder es ist

$$d\sigma_1 = \omega \varrho_1^2,$$
$$d\sigma_2 = \omega \varrho_2^2,$$

wenn ω das Stück ist, das der Kegelmantel aus einer um P gezogenen Kugel vom Radius 1 herausschneidet. Dadurch wird

$$do_1 = 2a\omega \frac{\varrho_1^2}{\varrho_1 + \varrho_2},$$
$$do_2 = 2a\omega \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1 + \varrho_2}.$$

Die beiden Elemente liefern zusammen zum Potential den Beitrag

$$\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{do_1}{\varrho_1} + \frac{do_2}{\varrho_2}\right),$$

was durch Einsetzen der Werte von do_1, do_2 übergeht in

$$\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon} 2a\omega.$$

Daraus folgt

$$\varphi = \frac{2a\sigma}{4\pi\varepsilon}\Sigma\omega,$$

und diese Summe ist über alle Elemente der Einheitshalbkugel zu erstrecken, so daß $\Sigma\omega = 2 \cdot 1^2\pi$, und

$$(4) \qquad \varphi = \frac{4a\pi}{4\pi\varepsilon}\sigma = \frac{e}{4\pi\varepsilon a}$$

wird. Das Potential im Punkte P ist somit von der Lage dieses Punktes unabhängig, nur vom Radius und der Ladung der Kugelfläche abhängig.

Im Innern einer gleichförmig geladenen Kugelfläche ist das Potential konstant.

8. Eine Konsequenz davon ist, daß im Innern einer solchen Kugel kein elektrisches Feld existiert, was aus § 31, Gleichung (4) folgt.

Die Kraftlinientheorie lehrt uns dasselbe. Gingen von der Oberfläche ins Innere hinein Kraftlinien, so müßten sie an einer negativen Elektrizitätsmenge enden, die sich wegen der normalen Richtung der Kraftlinien auf einer um den Mittelpunkt gelegten Kugelfläche oder im Mittelpunkt selber befinden würde. Eine solche existiert aber, wie wir stillschweigend angenommen haben, nicht.

9. Alle Kraftlinien der Ladung unserer Kugelfläche gehen also in den Außenraum, und zwar aus Symmetriegründen radial. Die



Kraftliniendichte nimmt mit dem Quadrat des Abstandes vom Mittelpunkte ab. An der Oberfläche ist die Kraftliniendichte wegen § 30, Gleichung (3)

$$\varepsilon E_0 = \sigma.$$

In einem beliebigen Abstand r vom Mittelpunkt muß sie, wenn c eine Konstante ist,

$$\varepsilon E = c \frac{1}{r^2}$$

sein, und das muß für $r = a$ in εE_0 übergehen; das heißt:

$$\varepsilon E_0 = c \frac{1}{a^2} = \sigma.$$

Daraus folgt $c = \sigma a^2$ und

$$\varepsilon E = \sigma \frac{a^2}{r^2}$$

und, da nach Nr. 6 $e = 4\pi a^2 \sigma$ ist,

(5) $$E = \frac{e}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Vergleichen wir dies Resultat mit dem Feld einer punktförmigen Ladung e (§ 28, (1)), wie wir es in Beispiel A angenommen haben, so können wir folgern:

Das Feld im Außenraume einer gleichförmig geladenen Kugelfläche ist identisch mit dem Felde, das die im Kugelmittelpunkt konzentrierte Ladung der Kugelfläche geben würde.

Für den Außenraum einer geladenen Kugelfläche ist es also ganz gleichgültig, wie groß der Kugelradius ist, wenn nur die Ladung die gleiche bleibt.

10. Es wird demnach auch die Verteilung des Potentials im Außenraum dieselbe sein, wie die im Beispiel A. Es wird

(6) $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{e}{r},$$

wenn r den Abstand eines beliebigen Punktes P im Außenraume vom Kugelmittelpunkt bedeutet. Lassen wir den Punkt P sich der Kugelfläche nähern, so geht φ stetig in den Wert

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{e}{a}$$

über, und das ist der in 7. gefundene konstante Wert des Potentials im Innenraume. Die Verteilung des Potentials im ganzen Raume wird sich also so gestalten: Lassen wir einen Punkt sich aus großer Entfernung dem Kugelmittelpunkt nähern, so wird er Potentialwerte

durchlaufen, die so beschaffen sind, als ob die gesamte Ladung der Kugelfläche sich im Mittelpunkt befände; das aber bloß so lange, bis er die Kugelfläche erreicht. Den Wert des Potentials, den er hier vorfindet, wird er bei seinem Weiterwandern konstant beibehalten.

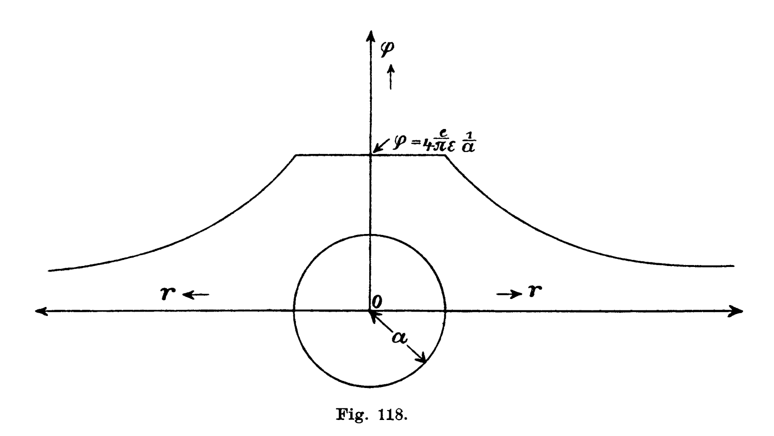


Fig. 118.

Die Figur 118 gibt ein Bild der Potentialverteilung. Die Abszisse bedeutet den Abstand vom Mittelpunkt längs einer den Mittelpunkt durchlaufenden Geraden, die Ordinate den Wert des Potentials an der betreffenden Stelle. Die so entstandene Kurve setzt sich aus einem geradlinigen Stück und zwei stetig daran schließenden Hyperbelbogen zusammen (Bd. II, § 77, 15.).

Die Gleichung (4) (§ 31) lehrt: Je stärker der Potentialabfall $\Delta\varphi$ längs eines Längenelementes s, das wir überall gleich groß wählen, um so größer ist die elektrische Feldintensität E an der betreffenden Stelle. Auf die Figur 118 übertragen heißt das: Je steiler die Kurve des Potentials ist, um so größer ist E.

D. Kugelkondensator.

11. Das Problem des Kugelkondensators, d. h. zweier konzentrischer Kugelflächen, die entgegengesetzt gleiche Ladungen tragen, ist nach vorigem leicht zu erledigen.

Die beiden Kugelradien seien a und $b > a$. Die Kugel a trage die elektrische Ladung $+e$, die Kugel b die Ladung $-e$. Den ganzen Raum teilen wir wieder, wie beim Plattenkondensator, in die drei Räume 1, 2, 3 (Fig. 119).

Im Raume 1 erzeugt keine der beiden Kugelflächen ein Feld, folglich ist $E_1 = 0$.

Im Raume 2 haben wir ein Feld, das von der Kugel a her-

rührt, da für diese Kugel der Raum 2 Außenraum ist. Dieses Feld ist nach Gleichung (5)

$$E_2 = \frac{e}{4\pi\varepsilon r^2}; \quad a < r < b.$$

Im Raume 3 erzeugen beide Kugeln ein Feld, und zwar die Kugel a das Feld

$$E_3^a = \frac{e}{4\pi\varepsilon r^2}; \quad r > b,$$

die Kugel b

$$E_3^b = \frac{-e}{4\pi\varepsilon r^2}; \quad r > b.$$

Die beiden Felder heben sich auf und es bleibt nur im Zwischenraume ein Feld E_2 übrig.

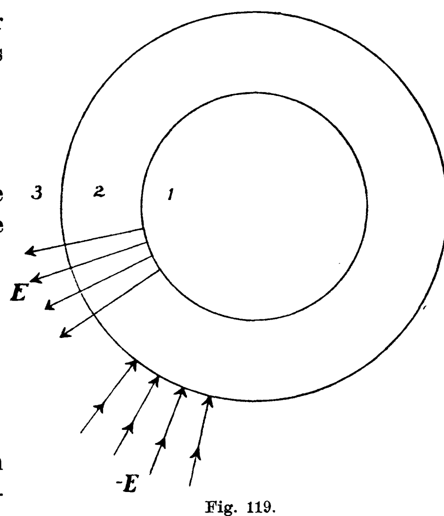


Fig. 119.

12. Das Potential im Innern der Kugel a, und damit auf der Kugelfläche a setzt sich additiv aus den konstanten Potentialen der beiden Kugelflächen zusammen; also ist nach Gleichung (4):

$$\varphi_a = \frac{e}{4\pi\varepsilon a} + \frac{-e}{4\pi\varepsilon b} = \frac{e}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Im Raume 3 heben sich nach Gleichung (6) die beiden Potentiale gerade auf, es wird $\varphi_b = 0$, und die Potentialdifferenz der beiden Kugelflächen ist

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{e}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Die Kapazität des Kugelkondensators ist somit:

$$C = \frac{e}{\varphi_a - \varphi_b} = 4\pi\varepsilon\frac{ab}{b-a}. \tag{7}$$

13. Lassen wir die Kugel b unendlich groß werden, so wird

$$\frac{ab}{b-a} = \frac{a}{1 - \frac{a}{b}} = a$$

und

$$C = 4\pi\varepsilon a.$$

Dies ist die Kapazität der Kugel a allein. Wir hätten dieses Resultat auch aus dem Beispiel C gewinnen können, wenn wir in gleicher Weise, wie die Kapazität eines Kondensators, die der Kugelfläche definiert hätten als die Elektrizitätsmenge, die wir der Kugelfläche zuführen müssen, um ihr Potential um die Einheit zu vermehren.

Im Vakuum, und mit großer Annäherung auch in Luft, wird $4\pi\,\varepsilon = 1$ (vgl. § 27, 5.). Wenn die Kugelfläche sich im Vakuum befindet oder von Luft umgeben ist, wird also

$$C = a;$$

die Kapazität einer Kugelfläche im Vakuum ist gleich ihrem Radius.

14. Die praktische Bedeutung der Kapazität ist die, aus einer schwachen Elektrizitätsquelle größere Mengen Elektrizität anzusammeln. Alle unsere Maschinen zur Erzeugung elektrischer Ladungen arbeiten so, daß sie zwei getrennte Körper so weit elektrisieren, bis sie eine gewisse, von der Leistungsfähigkeit der Maschine und der Aufstellung der geladenen Körper abhängige Potentialdifferenz Φ erreicht haben. Es steht uns daher frei, durch geeignete Wahl der Konstanten φ_0 (§ 31, 6.) das Potential des einen dieser beiden Körper, der oft etwa die Zimmerwand, die Erde, eine Gas- oder Wasserleitung sein kann, gleich Null zu setzen. Dann wird Φ das Potential des anderen Körpers, etwa einer isoliert aufgestellten Metallkugel, eines „Konduktors". Sobald das Potential Φ überschritten wird, tritt in der Maschine oder zwischen den beiden geladenen Körpern ein elektrischer Funke auf, der die elektrische Ladung vernichtet.

Wenn die beiden geladenen Körper die Flächen eines Kugelkondensators sind, so erkennt man aus Gleichung (7)

$$C(\varphi_a - \varphi_b) = e,$$

daß die Ladung, die die Maschine liefern muß, bis $(\varphi_a - \varphi_b)$ den Wert Φ angenommen hat, um so größer ist, je größer C ist, daß wir also bei größerem C größere Ladungen im Kondensator ansammeln können. Die Gleichung

$$C = 4\pi\,\varepsilon\,\frac{a\,b}{b-a}$$

lehrt wieder, daß wir durch hinreichende Verkleinerung des Abstandes $b - a$ der beiden Kugeln die Kapazität beliebig vergrößern können. Auch die Vergrößerung des Wertes ε, der Dielektrizitätskonstanten des Zwischenraumes, vergrößert die Kapazität. Deshalb werden Kondensatoren auch meist mit einer Zwischenschicht von Glas, Hartgummi und ähnlichem Material gebaut, da diese Substanzen eine größere Dielektrizitätskonstante besitzen als die Luft. Außerdem haben aber solche Zwischenmedien eine größere „Durchschlagsfestigkeit", sie werden nicht so leicht von einem elektrischen Funken durchschlagen, wodurch der Wert Φ unter Umständen vergrößert werden kann.

Bei Plattenkondensatoren liegen die Verhältnisse ähnlich, und das Gleiche gilt für die sogenannten Leydener Flaschen, bei denen sich die Berechnung aber nicht streng mathematisch durchführen läßt.

§ 34. Leiter der Elektrizität.

1. Die Metalle und gewisse andere Körper, wie Salzlösungen, die allgemein als „elektrische Leiter“ bezeichnet werden, haben Eigenschaften, die man dadurch erklären kann, daß man die elektrischen Ladungen, die Quellpunkte der Kraftlinien, die man ihnen zuführt, in ihrem Innern beweglich annimmt, und zwar nach allen Richtungen hin gleichmäßig. Die elektrischen Kräfte wirken dann direkt auf diese Ladungen und erst indirekt auf die die Ladungen tragenden Körper.

Wir denken uns zwei gleiche Metallkugeln durch einen Draht verbunden, den wir so lang wählen, daß eine Ladung der einen Kugel kein merkliches Feld am Orte der zweiten erzeugt; denn ein solches könnte die zweite Kugel in einer uns noch nicht bekannten Weise (durch Influenz) beeinflussen. Wir führen der einen der beiden Kugeln eine elektrische Ladung zu, indem wir sie etwa mit einem elektrisierten Harzstab berühren (§ 27, [2]).

Es zeigt sich, daß sich die beiden Kugeln in ihren elektrischen Eigenschaften ganz identisch verhalten, daß von beiden die gleiche Kraftlinienzahl ausgeht, was wir durch die Kraft auf einen dritten elektrisierten Körper nachweisen können. Die elektrische Ladung hat sich dem Anschein nach gleichmäßig auf beide Kugeln verteilt (§ 27, [5]). Bei Nichtleitern, z. B. Glas, haftet die Ladung an der elektrisierten Stelle.

2. Das genügt nicht, um die Eigenschaften eines Leiters eindeutig zu charakterisieren.

Wenn wir einen nachweisbar unelektrisierten Leiter in ein elektrisches Feld hinein bringen, so verändert sich dadurch das Feld, gleichsam als wenn wir elektrisierte Körper hinein gebracht hätten. Um näheres über die Art dieser Veränderung zu erfahren, führen wir den folgenden Versuch aus:

Den aus zwei Kugeln und einem Verbindungsdraht bestehenden Körper bringen wir ungeladen in eine Kraftröhre so hinein, daß sich die eine Kugel, a in Figur 120, an Stellen höheren Potentials befindet, als die andere b. Wir schneiden den Draht irgendwo auseinander, so daß eine metallische Verbindung der beiden Kugeln nicht mehr besteht, und entfernen beide Teile aus dem Felde. Sie erweisen sich jetzt als elektrisiert und das Experiment lehrt, daß der Teil a dieselbe Menge negativer Ladung besitzt, wie b positiver. Den Betrag der

a b

Fig. 120.

Ladungen können wir um so größer erhalten, je größer wir das Feld in der Kraftröhre machen.

3. Diese Tatsache können wir dadurch erklären, daß wir annehmen:

Ein metallischer unelektrisierter Körper besitzt an jedem Orte beliebig große (unmeßbar große) Mengen positiver und negativer Elektrizität, beide aber in gleichem Betrage. Bringen wir den metallischen Körper in ein elektrisches Feld, so müssen sich die beiden Elektrizitäten trennen, die positive wird infolge der elektrischen Kraft den Kraftlinien in positiver Richtung folgen, die negative Elektrizität in negativer Richtung.

Von den beiden Elektrizitätsarten eines Volumenelementes wird also ein Teil positiver Elektrizität in ein Nachbarelement den Kraftlinien folgend hinein befördert, der gleiche Teil negativer gegen die Kraftlinien in ein anderes Nachbarelement. Der Erfolg wird der sein, daß nachher das erstgenannte Nachbarelement positiv geladen erscheint, das andere negativ geladen. Die Summe aller im ganzen Metallkörper enthaltener elektrischer Mengen bleibt nach wie vor Null.

4. Zwischen den beiden Nachbarelementen wird durch die entstandenen Ladungen ein neues Feld erzeugt, das sich dem ursprünglichen überlagert. Da die Kraftlinien immer von positiven zu negativen Ladungen verlaufen, ist es dem ursprünglichen Feld entgegengesetzt und schwächt dieses also.

So lange ein elektrisches Feld im Metall vorhanden ist, muß die Trennung der Elektrizitäten fortschreiten. Sie wird so lange dauern, bis im ganzen Innern des Metalls das Feld Null geworden ist.

5. Wir fragen jetzt: Wo befinden sich schließlich die durch die Trennung erzeugten Ladungen, die „Kompensationsladungen", die das Feld durch Erzeugung eines sich superponierenden Feldes zu Null machen? Und ferner: Wie wird durch diese Kompensationsladungen im Außenraume das Feld verändert?

Die erste Frage ist leicht nach § 30, Gleichung (1) zu beantworten. Ist das Feld im Innern des Metalls gleich Null, so muß auch der Kraftlinienfluß durch eine beliebige ganz im Innern des Metalls liegende geschlossene Oberfläche gleich Null sein und folglich auch die in dieser Oberfläche enthaltenene Elektrizitätsmenge.

Im Innern von Leitern kann also keine elektrische Ladung existieren. Die Kompensationsladung wird sich auf der Oberfläche konzentrieren.

6. Um die zweite Frage übersehen zu können, denken wir uns ein elektrisches Feld von der mit dem Orte variabeln Feld-



intensität E_0 gegeben (Fig. 121). Einen Leiter von beliebiger Form wollen wir in dieses Feld hineinbringen. Den Raum τ, den der Leiter einnehmen wird, grenzen wir im Felde ab und denken uns auf dessen Oberfläche die Ladung angebracht, die das Feld E_0 im Innenraume gerade zu Null macht, also die Kompensationsladung.

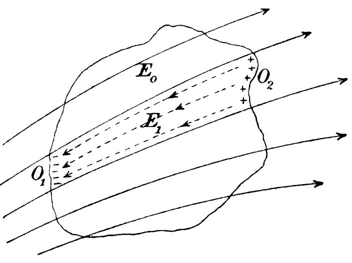


Fig. 121.

Diese Ladung möge für sich ein Feld E_1 erzeugen, das so beschaffen sein muß, daß E_1 im Innenraume überall gleich und entgegengesetzt dem E_0 ist. (Punktierte Linien in Fig. 121.) Es ist also in τ:

$$E_0 = - E_1.$$

7. Wir wollen das Feld an der Stelle O_2 der Figur 121 betrachten. Die E_0-Linien werden das Oberflächenstück O_2 im allgemeinen in schräger Richtung durchsetzen. Es gibt also zur Oberfläche eine Tangentialkomponente $E_0{}^t$ des Feldes E_0. Diese wird dicht vor und hinter der Oberfläche bis auf unendlich weniges gleich groß sein. (Fig. 122a.)

Das Kompensationsfeld muß demnach auch eine Tangentialkomponente besitzen, die von einer ungleichförmigen Dichtigkeit der Ladung auf der Oberfläche herrühren wird. Auch diese Tangentialkomponente $E_1{}^t$ wird dicht vor und hinter der Oberfläche gleiche Werte haben (Fig. 122b). Soweit sie von der Oberflächenladung am Orte herrührt, muß das aus Symmetriegründen der Fall sein; soweit sie von anderen Elementen herrührt, deswegen, weil entferntere Ladungen an zwei unendlich benachbarten Orten nur unendlich wenig verschiedene Felder erzeugen können. Die Komponente $E_1{}^t$ ist also an der Oberfläche „stetig veränderlich“.

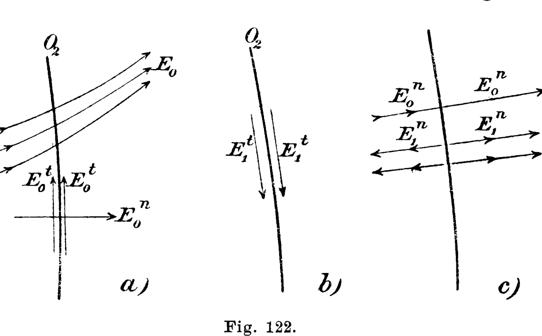


Fig. 122.

Da sich nun die Tangentialkomponenten $E_0{}^t$ und $E_1{}^t$ im Innenraume gerade aufheben müssen, werden sie es auch im Außenraume tun müssen, allerdings nur in unendlicher Nachbarschaft der Oberfläche.

Die Oberflächenladung kompensiert das ganze Feld im Innenraume eines Leiters und die Tangentialkomponente des Feldes im Außenraume nächst der Oberfläche.

8. Die zur Oberfläche normale Komponente von E_0 hat im Innen- und Außenraume gleiche Richtung (Fig. 122c). Die Normalkomponente von E_1 dagegen wird, da die Kraftlinien von der Oberflächenladung ausgehen, im Innen- und Außenraume entgegengesetzte Richtung haben. Während E_1^n im Innenraume dem E_0^n entgegengesetzt gerichtet ist, wird es im Außenraume ihm gleichgerichtet sein. Im Außenraume addieren sich die Normalkomponenten. Mit dem vorigen Abschnitt zusammengenommen ergibt dies:

Das resultierende Feld nach Einführung der Kompensationsladung hat Kraftlinien, die auf der Oberfläche des Leiters senkrecht stehen. Das Feld wird im Innern des Leiters Null.

9. Wir haben zur Ausführung unserer Betrachtungen unsere Kompensationsladung auf der Oberfläche eines Raumes τ von der Form des Leiters angebracht, aber in einem Medium, das von der Umgebung nicht abweicht. Das bedingt keinen Fehler. Denn da jetzt im Innenraume von τ kein Feld existiert, können wir das Medium darin beliebig verändern, also auch den Leiter hineinbringen. Das statische Resultat haben wir abgeleitet, nicht aber das Zustandekommen des Resultats, das Bewegungen von Elektrizitätsmengen verlangt. Unser Resultat gilt nur von dem Moment ab, wo die Elektrizitätstrennung im Innern beendet ist. Wie rasch das vor sich geht, wird, wie wir später sehen werden, von neuen Eigenschaften der Leiter abhängen. Das Experiment lehrt, daß bei allen Metallen diese Trennung in unmeßbar kurzer Zeit vor sich geht.

Weiter wird jedes der elektrischen Felder E_1, E_0 im Innenraume, wie uns der folgende Paragraph lehrt, und was aus dem Coulombschen Gesetz zu ersehen ist, von der Dielektrizitätskonstante des Innenraumes abhängen. Nachdem sich aber diese beiden Felder einmal bei Annahme der Dielektrizitätskonstanten der Umgebung kompensiert haben, werden wir auch über die Dielektrizitätskonstante des Innenraumes willkürlich verfügen können. Das Feld Null kann dadurch nicht geändert werden. Oder umgekehrt: Aus statischen Versuchen können wir keinen Schluß auf die Dielektrizitätskonstante der Metalle ziehen, da kein Feld ins Innere der Metalle eindringt.

10. Führen wir dem Metallkörper τ noch von außen irgend eine Ladung zu, so wird sich diese ebenfalls auf der Oberfläche verteilen. Es bleiben die Betrachtungen der vorigen Abschnitte bestehen,

nur daß jetzt die Summe aller Ladungen im Metall nicht mehr gleich Null sein wird. Nach wie vor gilt:

> Im Innenraume muß das elektrische Feld verschwinden. Im Außenraume münden und entspringen die Kraftlinien senkrecht zur Oberfläche des Leiters.

In Figur 123 bedeuten die punktierten Linien das ursprüngliche Feld, die ausgezogenen das Feld nach Einführung des Leiters.

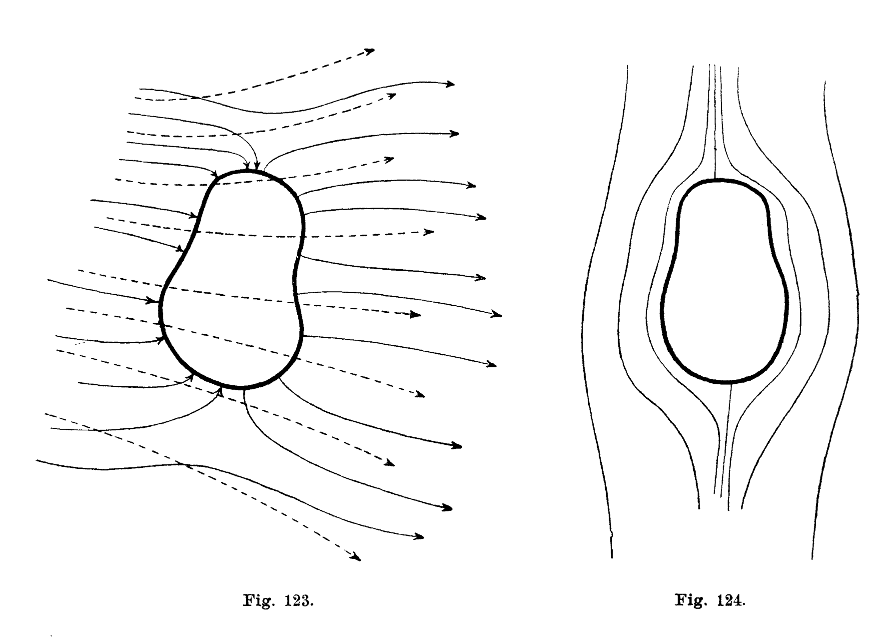


Fig. 123. Fig. 124.

11. Wir können noch einige Schlußfolgerungen ziehen:

I. Da im Innern des Leiters das Feld verschwindet, muß hier das Potential konstant sein. Die Niveauflächen werden das Bild der Figur 124 ergeben. Es tritt hier der in § 32, 7. besprochene Ausnahmefall ein, wo zwei an einer Stelle unendlich benachbarte Niveauflächen nicht überall unendlich benachbart bleiben. Der Leiter selber ist eine ausgeartete Niveaufläche, was schon aus dem senkrechten Verlauf der Kraftlinien folgt.

II. Die Änderung, die das ursprüngliche Feld in irgend einem Punkte durch Einführung eines ungeladenen Leiters erfährt, wird um so kleiner werden, je größer der Abstand dieses Punktes von dem Leiter ist. Denn die Änderung, die die Potentialverteilung erfährt, ist mit $\sum \frac{\sigma\, do}{r}$ proportional, wenn σ die Oberflächendichte, do ein Oberflächenelement, r den Abstand dieses von dem betrachteten Punkte



bedeutet. Wird r sehr groß, so wird es für alle do annähernd konstant. Dann wird

$$\sum \frac{\sigma\, do}{r} = \frac{1}{r} \sum \sigma\, do,$$

und $\sum \sigma\, do$ ist gleich Null.

III. Kennen wir das resultierende Feld E in der Nachbarschaft des Leiters, so kennen wir die Verteilung der Kompensationsladung. Da E senkrecht auf der Oberfläche steht, und E_n im Innern Null ist, so folgt aus § 30, Gleichung (3)

$$\varepsilon E = \sigma.$$

IV. Führen wir statt des massiven Leiters τ einen Hohlkörper (Fig. 125) ein, so wird gleichwohl im Innern kein Feld existieren, wenn sich keine Ladungen im Hohlraume befinden. Denn denken wir uns in die Wandung hinein eine Fläche F gelegt, so ist, da diese ganz im Metall verläuft, längs ihr überall $E = 0$. Der Kraftlinienfluß durch F wird also Null, und da im innern Raum keine Kraftlinien entspringen, so müssen, wenn solche vorhanden sind, alle auf der Oberfläche sowohl entspringen, als münden. Es sei l eine solche Kraftlinie. Dann wäre $\sum E_e\, dl$ nach § 31, Gleichung (5) die Potentialdifferenz an den beiden Endpunkten. Da die Endpunkte aber nach I. auf einer Niveaufläche liegen, muß die Potentialdifferenz verschwinden. Also ist im Innern ein Feld nicht möglich.

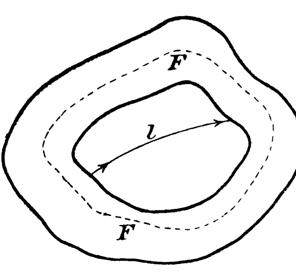


Fig. 125.

Eine leitende Hülle schützt ihren Innenraum gegen ein äußeres elektrisches Feld.

V. Bringen wir jetzt aber in den Hohlraum eine Ladung e hinein, so werden von e Kraftlinien ausgehen (Fig. 126). Der Kraftlinienfluß durch F wird nach wie vor Null sein, also muß die gesamte Ladung im Innern von F verschwinden. Es wird sich auf der Innenwandung eine Ladung $-e$ ausbilden müssen, in irgend welcher Verteilung. Dieses $-e$ kann nur durch Elektrizitätstrennung entstanden sein, und wir müssen das entsprechende $+e$ auf der äußeren Wandung wiederfinden. Wie sich dies auf der äußeren Wandung verteilt, hängt von deren Form ab.

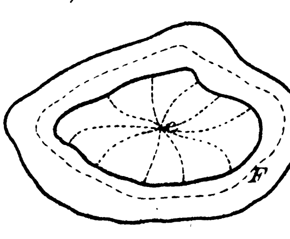


Fig. 126.

Es ist also für den Effekt im Außenraume gleichgültig, ob wir

das e im Innenraume des Hohlkörpers oder auf der Oberfläche des Hohlkörpers direkt anbringen. Der Außenraum ist demnach nicht geschützt. Der Grund für diesen Unterschied zwischen Innenraum und Außenraum ist der, daß im Außenraume die Kraftlinien ins Unendliche oder nach anderen Körpern (Zimmerwänden) hin verlaufen können, im Innenraume nicht.

12. Mit Hilfe der Leiter können wir die Beispiele des § 33 in eine praktisch verwertbare Form bringen; denn Flächenladungen in einem homogenen Medium, wie dort angenommen sind, können wir nicht wirklich herstellen. Wir nehmen z. B. den Fall des Kugelkondensators.

Wir führen die Kugel a aus Metall aus und führen ihr die Elektrizitätsmenge $+e$ zu. Diese wird sich auf ihrer Oberfläche so verteilen, daß in ihrem Innern kein Feld besteht, und das ist, wie wir gesehen haben, der Fall, wenn sie mit konstanter Dichte über die ganze Oberfläche verteilt ist.

Die Kugelfläche b stellen wir dar durch die Innenwand einer Hohlkugel von irgend welcher Wandstärke. Auf dieser Innenwand wird sich nach V. der vorigen Nummer die Elektrizitätsmenge $-e$ ansammeln, die sich wieder so verteilen wird, daß außerhalb der Fläche b kein Feld existiert, und das ist nach § 33, D wieder bei gleichförmiger Verteilung der Fall. Auf der Außenwand der Hohlkugel wird sich die Ladung $+e$ ansammeln, und zwar gleichförmig, damit auch dies $+e$ im Innern der Wandung der Hohlkugel kein Feld erzeugt. Wenn wir schließlich noch der Hohlkugel die Ladung $-e$ von außen erteilen, so wird diese sich ebenfalls auf der äußeren Oberfläche ansammeln und das dort befindliche $+e$ kompensieren. Es bleiben dann nur die Ladungen $+e$ auf der Kugelfläche a und $-e$ auf der Kugelfläche b, wie wir es bei dem Kugelkondensator angenommen hatten.

§ 35. Inhomogene Medien.

1. Bisher hatten wir stillschweigend vorausgesetzt, daß der ganze Raum, der das elektrische Feld enthielt, von einem Medium konstanter Dielektrizitätskonstante erfüllt war. Erst durch Einführung der Leiter wurde eine Inhomogenität verursacht, die aber unabhängig von der Dielektrizitätskonstanten der Leiter ist. Gerade durch diese Einführung der Leiter erhielten die abgeleiteten Gesetze eine reelle Bedeutung; denn es ist nicht möglich, in einem homogenen Medium eine elektrische Ladung zu erzeugen, oder festzuhalten, wohl aber an der Oberfläche von Metallen. Das Coulombsche Gesetz ist z. B. mit Hilfe von Metallkugeln als Träger der Ladung bewiesen worden, und wir



haben gesehen, daß eine Metallkugel eine punktförmige Elektrizitätsmenge ersetzt, die wir zur Ableitung unserer Gesetze zunächst hypothetisch eingeführt hatten, indem wir sie als Abstraktion aus einer in hinreichend kleinem Volumen verteilten Ladung ansahen.

Unser § 34 hatte gelehrt, daß ein Leiter, geladen oder nicht, einfach durch eine geeignete Oberflächenladung ersetzbar war. Diese Ladung mußte so beschaffen sein, daß sie nach außen die Kraftlinien in solche verwandelte, die auf der Leiteroberfläche senkrecht standen, und nach innen die Kraftlinien gerade kompensierten. Numerisch ist allerdings diese Ladung im allgemeinsten Falle nicht anzugeben, wohl aber in einigen speziellen Fällen, wie z. B. in dem des Kugelkondensators.

2. Bei einem Nichtleiter von veränderlicher Dielektrizitätskonstante liegen die Verhältnisse weniger einfach. Es entsteht die Frage: Wie wird durch Einführung eines Körpers, der eine vom ursprünglichen Medium abweichende Dielektrizitätskonstante besitzt, das Feld verändert?

Gewisse Gesetze über diese Frage können wir unter Zuhilfenahme neuer Tatsachen ableiten. Aber auch hier läßt sich aus dem vorher bestehenden Felde und der Kenntnis des eingeführten Körpers allgemein die Veränderung, die vor sich geht, nicht rechnerisch durchführen, außer in einigen speziellen Fällen.[1])

3. Es sei also in einem homogenen Medium von der Dielektrizitätskonstante ε_0 ein Feld E_0, von irgend welchen Ladungen (auf Leitern) herrührend, gegeben, und in dieses Feld führen wir Körper von anderer Dielektrizitätskonstante ε ein. Dadurch wird sich im allgemeinen das Feld E_0 verändern. Wir wollen das neue Feld mit E bezeichnen.

Bekannt ist also ε_0, E_0 und die Form und Lage der Körper ε nach ihrer Einführung, sowie ε selber. Gefragt muß werden: wie sieht das Feld E aus?

4. Wir definieren die „Kraftlinien" auch jetzt noch als die Linien, die nach Richtung und Dichte die dielektrische Polarisation εE an jedem Orte, also auch innerhalb der eingeführten Körper, darstellen. Im homogenen Raume war diese Definition identisch mit der anderen: „Jede Elektrizitätsmenge e sendet in den umgebenden Raum $n = e$ Kraftlinien aus." Ob wir diese Definition auch jetzt noch aufrecht erhalten dürfen, wird sich aus späterem ergeben.

5. Evident ist jedenfalls, daß das Coulombsche Gesetz [7'] und damit Gleichung (1) des § 28 uns nichts über diese neuen Verhält-

1) Z. B. bei Ellipsoiden, die in ein homogenes Feld eingeführt werden.



nisse angibt, auch nicht einer Verallgemeinerung zugänglich ist, was man bei einem Versuch sofort erkennen wird, da längs des Abstandes r ein konstantes ε vorausgesetzt ist, und dieses r alle möglichen Richtungen und Längen annehmen kann.

Dagegen haben wir nach Einführung des Begriffes „Kraftlinien" aus dem Coulombschen Gesetz andere Gesetze abgeleitet, in deren Form nichts enthalten ist, was eine Konstanz von ε über einen größeren Raum voraussetzte.

So enthält Gleichung (1), § 30 (und die daraus abgeleitete Gleichung (3)) Glieder von der Form

$$\varepsilon E_\nu \, do,$$

und es steht uns frei, die Oberflächenelemente do beliebig klein zu wählen. Dann muß dieses do mit dem Wert εE_ν multipliziert werden, wie er am Orte do existiert. Diesen Wert können wir aber jeweils ermitteln, auch wenn ε nicht konstant ist, ebensogut wie wir ihn — was im homogenen Medium auch der Fall war — bei variablem E_ν ermitteln können.

Hier ist also eine Verallgemeinerung nahe gelegt, nachdem wir bereits in 4. die Verallgemeinerung des Kraftlinienbegriffes ausgeführt haben.

6. Wir wollen nun versuchsweise diese Verallgemeinerung vornehmen, also versuchsweise das Gesetz aufstellen:

> Der Kraftlinienfluß durch eine geschlossene Fläche gibt die in dieser Fläche eingeschlossene Ladung an, auch wenn ungeladene Körper veränderter Dielektrizitätskonstante in das aus allen vorhandenen Ladungen hervorgebrachte Feld eingeführt werden.

Und dieses Gesetz soll gelten, auch wenn die geschlossene Fläche die Körper einschließt oder durchsetzt. In einer Gleichung ausgedrückt gilt also das Gesetz

(1) $$\sum N_\nu \, do = \sum e_i,$$

und hier bedeutet

$$N_\nu = \varepsilon E_\nu$$

die normale Kraftliniendichte, wie sie am Orte do existiert. Daraus folgt dann, wie in § 30, Gleichung (4), für eine beliebige Grenzfläche

(1a) $$\varepsilon_2 E_{2\nu} - \varepsilon_1 E_{1\nu} = \sigma.$$

Ist dieses verallgemeinerte Gesetz richtig, so müssen sich die



daraus hervorgehenden Folgerungen experimentell bestätigen, und dann können wir es als erwiesen ansehen.[1])

7. Ein weiteres Gesetz, das der Verallgemeinerung zugänglich ist, ist das in Gleichung (6) des § 31 ausgesprochene Gesetz, daß die elektromotorische Arbeit über einen in sich zurücklaufenden Weg verschwindet. Dieses Gesetz enthält die Dielektrizitätskonstante überhaupt nicht und das elektrische Feld in Gliedern, in denen es mit einem unendlich kleinen Wegstück multipliziert erscheint, also auch nur längs dieser unendlich kleinen Strecke konstant zu sein braucht. Wenn das Feld durch Einführung der Körper seinen Wert ändert, steht es uns frei, in dieser Gleichung (6) von Ort zu Ort veränderte Werte einzusetzen.

Es sei also nach wie vor

$$\sum_{\bigcirc} E_s \Delta s = 0, \tag{2}$$

summiert über eine geschlossene Kurve. Mit anderen Worten: es soll auch jetzt keine in sich zurücklaufenden Kraftlinien geben.

Diese Gleichung könnten wir auch in die Form der Gleichung (5) des § 31 bringen

$$\varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \sum_{P_1}^{P_2} E_s \Delta s, \tag{2a}$$

die bedeutet, daß die rechte Summe nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht vom Wege abhängig ist.

Man kann daraus ein Potential definieren, wenn man etwa einem beliebigen Punkte P_1 einen beliebigen Wert $\varphi(P_1)$ zuschreibt, und den Wert, den nach obiger Gleichung $\varphi(P_2)$ in allen Punkten P_2 des Raumes erhält, als Potential annimmt. Dieses Potential liefert dann aus den Werten von zwei benachbarten Punkten, dividiert durch deren Abstand, also durch ihr Gefälle, die Feldintensität in Richtung dieses Abstandes, analog § 31, Gleichung (4).

8. Wir wollen jetzt an der Hand dieser verallgemeinerten Gesetze zunächst die Frage beantworten: In welcher Beziehung steht das in 3. definierte Feld E direkt vor zu dem direkt hinter der Grenzfläche zweier dielektrisch verschiedener Körper?

---

1) Natürlich können wir ein solches Gesetz nicht an allen denkbaren Folgerungen prüfen. Wir können nur seine Richtigkeit durch eine hinreichend große Zahl von Experimenten wahrscheinlich machen, wie es schon bei dem Energieprinzip geschehen ist. In der Tat gibt es kein Experiment, das die hier gemachte Verallgemeinerung als die einzig mögliche fordert. Das ist ein prinzipieller Unterschied von dem Gesetz § 30, Gleichung (1), das als einzige Möglichkeit aus dem Coulombschen Gesetz folgte.

Oder: Wie ändert sich der Kraftlinienverlauf des Feldes E an dieser Grenzfläche? Nach der Beziehung des Feldes E zu dem Felde E_0 fragen wir also vorerst nicht.

9. Wir denken uns eine die Grenzfläche durchsetzende Kraftröhre von so kleinem Querschnitt, daß wir ein zu den Kraftlinien senkrechtes Flächenstück in ihr, wenigstens so weit dies im homogenen Medium liegt, als eben ansehen dürfen (Fig 127). $N_1 = \varepsilon_1 E_1$ sei die Kraftliniendichte auf der einen, $N_2 = \varepsilon_2 E_2$ die auf der anderen Seite der Grenzfläche. Wie in § 30 die Gleichung (3) aus (1) folgte, wird aus unserer Gleichung (1) für die Grenzfläche die Gleichung (1a) folgen, also

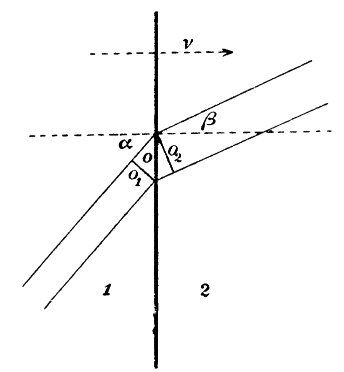


Fig. 127.

(3) $$N_{2\nu} - N_{1\nu} = \sigma,$$

oder wenn wir annehmen, die Grenzfläche habe keine Ladung,

(4) $$N_{1\nu} = N_{2\nu}; \quad \varepsilon_1 E_{1\nu} = \varepsilon_2 E_{2\nu}.$$

Die Normalkomponente der dielektrischen Polarisation ändert sich stetig, die der Feldintensität also unstetig.

Das heißt: Jede Kraftlinie im Medium 1 hat eine Fortsetzung im Medium 2. Denn nennen wir α, β die Winkel, die die Kraftlinien mit der Normalen zu der Grenzfläche einschließen, die „Einfallswinkel“, und o das Flächenelement, das die Kraftröhre aus der Grenzfläche ausschneidet, so wird (Fig. 127)

(5) $$N_1 \cos\alpha \cdot o = N_2 \cos\beta \cdot o$$

und

$$N_1 o_1 = N_2 o_2,$$

wenn o_1, o_2 die Querschnitte der Kraftröhre vor und hinter der Grenzfläche bedeuten. Die Kraftlinienzahl der Kraftröhre ändert sich also beim Übergang aus einem in das andere Medium nicht.

10. Einen Aufschluß über das Verhalten der Tangentialkomponente E_t des elektrischen Feldes gibt uns die Gleichung (2), wenn wir sie auf die Umgrenzung $ABCD$ eines Rechtecks (Fig. 128) anwenden, das wir durch die Grenzfläche so legen, daß zwei seiner Seiten l dieser parallel, die anderen, λ, zu ihr normal sind. Alle Seiten seien unendlich klein, die zur Grenze normalen λ aber wieder unendlich klein gegen l. Es wird dann die elektromotorische Arbeit über

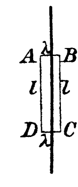


Fig. 128.

die Strecken λ gegen die über die Strecken l zu vernachlässigen sein, und es folgt:

$$E_{1t} l - E_{2t} l = 0,$$

(6) $$E_{1t} = E_{2t}.$$

Das gilt für jede Tangentialkomponente von E.

Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes ändern sich stetig, die der dielektrischen Polarisation also unstetig.

11. Unter Einfallsebene verstehen wir die Ebene, die durch das letzte Kraftlinienelement des einen Mediums an der Grenzfläche und normal zu der Grenzfläche gelegt werden kann. Die Gleichung (6) lehrt dann: Die Kraftlinien bleiben beim Durchtreten der Grenzfläche in der Einfallsebene. Denn die Projektion von E_1 in der Einfallsebene auf die Grenzfläche gibt den maximalen Betrag, den E_{1t} unter allen Tangentialkomponenten einnimmt. Dasselbe gilt für E_{2t}. Wäre für E_2 die Einfallsebene anders gelegen, also gegen die von E_1 gedreht, so würden diese beiden maximalen Beträge nicht in der Richtung übereinstimmen, woraus leicht zu sehen ist, daß dann Gleichung (6) nicht mehr allgemein befriedigt sein könnte. Die Tangentialkomponente von E muß sich nach Größe und Richtung an der Grenzfläche stetig ändern, und das ist nur möglich, wenn die Kraftlinie in der Einfallsebene bleibt.

12. Wir legen durch unsere Kraftröhre einen Schnitt parallel zur Einfallsebene, der aus der Grenze die Strecke $l = BD$ herausschneiden möge (Fig. 129). l projizieren wir auf die Schnittlinien dieses Schnittes mit dem Mantel der Kraftröhre, also auf BA und DC, und wenden die Gleichung (2) auf das Viereck $ABCD$ an. Die elektromotorische Arbeit über die Strecke AD und BC wird verschwinden, da diese Strecken normal zu den Kraftlinien gerichtet sind, und es bleibt:

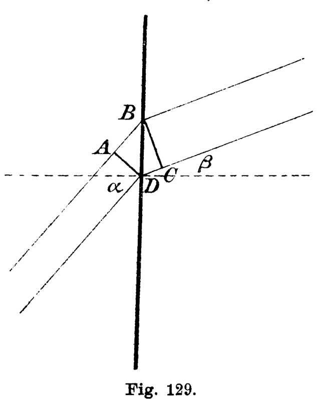


Fig. 129.

$$E_1 \overline{AB} - E_2 \overline{CD} = 0,$$

$$E_1 l \sin \alpha = E_2 l \sin \beta.$$

Nehmen wir dazu Gleichung (5)

$$\varepsilon_1 E_1 o \cos \alpha = \varepsilon_2 E_2 o \cos \beta,$$

so folgt durch Division

(7) $$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Die Tangenten der Einfallswinkel verhalten sich wie die Dielektrizitätskonstanten.

Das Verhältnis dieser Tangenten ist also unabhängig von der Richtung der Kraftlinien. Dieses Gesetz zusammengenommen mit dem Resultat der Nummer 11 heißt das „Brechungsgesetz“ der elektrischen Kraftlinien.

13. Wir wollen jetzt einmal zusehen, was wir über die Veränderung, die das ursprüngliche Feld durch Einführung des dielektrisch abweichenden Körpers erlitten hat, aussagen können. Der Einfachheit halber bezeichnen wir dieses Feld statt wie früher mit E_0 jetzt mit A. Die Kraftlinien dieses Feldes verlaufen ganz in einem homogenen Medium von der Dielektrizitätskonstante ε_0 und haben ihre Quellpunkte da, wo sich elektrische Ladungen, die wir als unveränderlich annehmen wollen, befinden. Für dieses Feld gilt die Gleichung (1)

$$\sum_o \varepsilon_0 A_\nu \, do = \sum e_i.$$

Führen wir einen Körper von der Dielektrizitätskonstanten ε in das Feld ein, so wird es sich in ein Feld E verändern, dessen Kraftlinien nach den früheren Sätzen ebenfalls nur dort Quellpunkte haben, wo elektrische Ladungen sind. Also auch für dieses Feld gilt:

$$\sum_o \varepsilon E_\nu \, do = \sum e_i.$$

Den Körper wollen wir an einem Orte einführen, an dem sich keine Ladungen befinden; er selber sei auch ungeladen.

14. Das Feld E können wir durch vektorielle Addition aus dem Felde A und einem „Zusatzfelde“ Z ableiten, derart, daß dieses Feld Z überall die durch den Körper verursachte Veränderung ersetzt. Mit anderen Worten: Wir können, statt den Körper einzuführen, über das Feld A ein anderes Feld Z überlagern, das so beschaffen ist, daß es an jedem Orte das Feld A zu E ergänzt. Dieses Feld Z wird dann ganz in einem homogenen Medium von der Dielektrizitätskonstanten ε_0 verlaufen. Es wird die vektorielle Gleichung

$$Z = E - A$$

gelten oder für eine Richtung l die Komponentengleichung

$$Z_l = E_l - A_l.$$

15. Von dem Felde Z können wir sofort aussagen:

I. Z besitzt keine in sich geschlossenen Kraftlinien.

Das folgt direkt aus der Definition von Z, da es für E und A gilt (§ 31, 10.).



Wenden wir die Gleichungen von 13. auf eine ganz im Außenraume des Körpers verlaufende beliebige, den Körper aber nicht umschließende Oberfläche o an, und subtrahieren wir sie voneinander, so folgt, da auf o überall $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist,

$$\sum_o \varepsilon_0 (E_\nu - A_\nu)\, do = 0,$$

$$\sum_o \varepsilon_0 Z_\nu\, do = 0, \tag{8}$$

und da diese Gleichung für jede beliebige Oberfläche o, die ganz im Außenraume verläuft, gelten muß, so heißt das:

II. Das Zusatzfeld hat im Außenraume keine Quellpunkte.

Für eine ganz im Innern des Körpers verlaufende Fläche ist

$$\sum_o \varepsilon_0 A_\nu\, do = 0,$$

$$\sum_o \varepsilon E_\nu\, do = 0;$$

und da ε längs der ganzen Oberfläche o konstant ist, ist auch

$$\sum_o \varepsilon_0 E_\nu\, do = 0.$$

Durch Subtraktion folgt also auch hier:

III. Das Zusatzfeld hat im Innenraume des Körpers auch keine Quellpunkte.

Die letzte Gleichung gilt nicht mehr, wenn die Oberfläche o die Grenzfläche durchsetzt. In der Tat ergibt sich daraus, daß das Zusatzfeld in der Grenzfläche Quellpunkte besitzt. Für das Feld A nimmt an der Grenzfläche die Gleichung (1a) (S. 219) die Gestalt an:

$$\varepsilon_0 A_{1\nu} = \varepsilon_0 A_{2\nu},$$

da $\sigma = 0$ ist; und für E gilt Gleichung (4)

$$\varepsilon_0 E_{1\nu} = \varepsilon E_{2\nu} = \varepsilon_0 E_{2\nu} + (\varepsilon - \varepsilon_0) E_{2\nu}.$$

Der Index 1 deutet hier den Außenraum, der Index 2 den Innenraum des Körpers an. Durch Subtraktion dieser Gleichung folgt

$$\varepsilon_0 Z_{2\nu} - \varepsilon_0 Z_{1\nu} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) E_{2\nu}.$$

Die Kraftliniendichte des Zusatzfeldes ändert sich also an der Grenzfläche unstetig. Nach Gleichung (1a) heißt das:

IV. Das Zusatzfeld hat an der Grenzfläche des eingeführten Körpers Quellpunkte

Aus I. bis IV. folgt somit:

V. Alle Kraftlinien des Zusatzfeldes entspringen auf der Oberfläche des eingeführten Körpers und laufen zu ihr zurück.

16. Die Quellpunkte des Zusatzfeldes entsprechen einer elektrischen Flächenladung auf der Grenzfläche von der Dichte

$$\sigma' = \varepsilon_0 Z_{2\nu} - \varepsilon_0 Z_{1\nu} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) E_{2\nu}, \tag{9}$$

oder, unter Berücksichtigung von Gleichung (4),

$$\sigma' = -\varepsilon_0 (E_{1\nu} - E_{2\nu}). \tag{10}$$

Wenn wir, statt den Körper in das Feld einzuführen, nur seine Oberfläche, mit dieser Dichte geladen, einführen würden, würden wir dadurch ein Zusatzfeld Z' erzeugen, das den fünf im vorigen Abschnitte aufgestellten Sätzen genügen würde.

Die beiden Felder Z und Z' haben also ihre Quellpunkte an denselben Stellen und in gleicher Dichte; sie verlaufen außerdem beide im selben Medium von der Dielektrizitätskonstante ε_0. Danach ist zu erwarten, daß sie überhaupt identisch sind, daß also die Veränderung, die das Feld A durch den eingeführten Körper erfährt, durch eine Flächenladung von der Dichte σ' ersetzbar ist. Bewiesen aber ist die Identität von Z und Z' damit noch nicht vollständig, und wir wollen den Beweis dafür auch nicht ausführen.

17. Man bezeichnet σ' als „influenzelektrische Ladung", während die das Feld erzeugenden Ladungen σ die „wahren elektrischen Ladungen" heißen.

Die „wahren" Ladungen liefern ein Feld in einem Raume, der bisher kein Feld besitzt, die Influenzladungen nur in einem solchen, in dem bereits ein Feld vorhanden ist.

Wir haben früher, § 30, 7., gesehen, daß Quellpunkte und Ladungen identische Begriffe sind. Diese Influenzladungen werden demnach im Felde A ebensowohl elektrischen Kräften ausgesetzt sein, wie andere Ladungen.

18. Den Betrag der Ladung σ' an jedem Orte der Oberfläche können wir im allgemeinen nicht vorausbestimmen, da er von dem Felde E abhängig ist. Wir können ihn, die Kenntnis von A vorausgesetzt, erst dann angeben, wenn wir das Zusatzfeld selber kennen.

Die Summe der influenzierten Ladungen auf der ganzen Körperoberfläche F aber läßt sich berechnen. Legen wir die in Nr. 15, I. besprochene Fläche so, daß sie den eingeführten Körper beliebig dicht umschließt, aber doch noch ganz im Außenraume, also im Medium ε_0

verläuft, so gilt nach wie vor die Gleichung (8), die aussagt, daß die gesamte Ladung im Innern der Fläche verschwindet. Diese gesamte Ladung besteht aber wegen III. und IV. nur aus der gesamten Influenzoberflächenladung des Körpers, und es folgt also:

Die Gesamtladung auf der Oberfläche ist gleich Null.

Die Influenzladung verhält sich somit ähnlich, wie die Kompensationsladung eines in ein Feld eingeführten Leiters; aber sie kompensiert nicht das Feld im Innern der Oberfläche.

19. Beispiel. In gewissen Fällen können wir aus dem Anfangszustand das Feld nach Einführung des Körpers, also auch die influenzierte Ladung berechnen.

In den Plattenkondensator § 33, B, vom Plattenabstand h und der Dielektrizitätskonstante ε_0 führen wir eine planparallele Platte eines Körpers von der Dielektrizitätskonstante ε und der Dicke $d < h$ ein (Fig. 130). Von der Flächeneinheit der Grenzplatte α gehen σ Kraftlinien aus, und das wird nach Einführung der Zwischenschicht nicht geändert, da sich die Dichte σ nicht ändern soll. Auch die Richtung der Kraftlinien kann sich aus Symmetriegründen nicht ändern. Die Kraftlinien werden nach wie vor geradlinig und normal von einer Platte zur andern verlaufen. Auf die Grenzfläche α' (Fig. 130) treffen also

$$\sigma = \varepsilon_0 E_0$$

Kraftlinien normal auf, und in das Innere der eingeführten Schicht treten nach Gleichung (4)

$$\varepsilon E = \varepsilon_0 E_0$$

Kraftlinien ein und bei β wieder

$$\varepsilon_0 E_0 = \varepsilon E$$

aus.

Fig. 130.

Das Feld E_0 in den Zwischenräumen wird also durch die eingeführte Schicht nicht geändert, und das Feld in der eingeführten Schicht ist berechenbar, nämlich

$$E = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot$$

Die Dichte der Influenzladung auf der Fläche α' wird nach (9)

$$-\sigma' = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma.$$

Analog ergibt sich auf der Fläche β' die Ladung

$$\sigma' = +\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma.$$

Die Potentialdifferenz der Platten α und β wird

$$\varphi_\alpha - \varphi_\beta = E_0 d_1 + E_1 d + E_0 d_2,$$

wenn wir den Abstand von α und α' mit d_1, den von β und β' mit d_2 bezeichnen. Es ist $d_1 + d_2 = h - d$. Also wird

$$\varphi_\alpha - \varphi_\beta = E_0 \left\{ (h-d) + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} d \right\}$$
$$= \sigma \left(\frac{h-d}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon} \right).$$

Wenn wir statt die Schicht ε einzuführen nur auf deren Grenzflächen α', β' die Ladungen

$$-\sigma' = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma; \quad +\sigma' = +\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma$$

anbringen würden, so würden diese wie ein zweiter Plattenkondensator wirken. Es wäre nach § 33, B

$$\varphi_{\alpha'} - \varphi_{\beta'} = -\frac{\sigma'}{\varepsilon_0} d = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon\,\varepsilon_0}\sigma d = -\sigma \frac{d}{\varepsilon_0} + \sigma \frac{d}{\varepsilon}.$$

Diese Potentialdifferenz würde sich zu der von den Ladungen $\pm\sigma$ auf α, β allein herrührenden

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h$$

addieren, so daß eine Potentialdifferenz

$$\varphi_\alpha - \varphi_\beta = \sigma \left(\frac{h}{\varepsilon_0} - \frac{d}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon} \right)$$

resultieren würde, was mit unserem Resultat übereinstimmt. Hier haben wir also die Identität des Feldes Z und Z' (Nr. 16) bewiesen.

20. Diese Gleichung lehrt, daß bei konstant bleibender Oberflächenladung σ durch Einschieben einer Schicht von größerer Dielektrizitätskonstanten, $\varepsilon > \varepsilon_0$, die Potentialdifferenz an den Grenzflächen herabgesetzt wird.

Die Kapazität der Flächeneinheit, die nach der Definition § 33, 5. den Wert

$$C' = \frac{1}{\frac{h}{\varepsilon_0} - \frac{d}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon}}$$

besitzt, wird infolgedessen durch Einführung der Zwischenschicht vermehrt. Für den Fall $d = h$ können wir dieses Resultat auch direkt aus § 33, B ablesen.

§ 36. Die Energie des elektrostatischen Feldes.

1. Wenn in einem abgeschlossenen Raumteil τ ein elektrisches Feld existiert, dessen Kraftlinien die Oberfläche des Raumes τ nicht durchsetzen, so heißt dieser Raum τ ein „vollständiges elektrisches Feld“.

Streng genommen erstreckt sich jedes Feld, das nicht von einer leitenden Hülle umschlossen ist (vgl. § 34, 11., V. und Fig. 126), ins Unendliche. Ein solches Feld würde also erst dann vollständig sein, wenn wir die Oberfläche ins Unendliche verlegen. Praktisch aber wird es in vielen Fällen genügen, wenn wir sie hinreichend fern von allen Ladungen annehmen, da dann nur noch Kraftlinien von geringer Gesamtzahl durch sie hindurchtreten.

Wir wollen die Energie eines solchen vollständigen Feldes ermitteln, d. h. wir wollen eine Funktion suchen, deren Abnahme bei irgend welcher Veränderung des elektrischen Feldes die damit verbundene Arbeitsleistung der elektrischen Kräfte liefert.

2. Es sei eine Anzahl elektrischer Ladungen e_1, e_2, ... im Raume verteilt. Eine von ihnen, e_k, möge sich um eine sehr kleine Strecke verschieben. Sie leistet dabei eine Arbeit, die sich zusammensetzt aus den Arbeiten gegen die Kräfte, die von den einzelnen Ladungen herrühren. Diese Kräfte haben nach dem Coulombschen Gesetze die Werte

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{e_1 e_k}{r_{1k}^2};\quad \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,\frac{e_2 e_k}{r_{2k}^2};\quad \cdots$$

Ist die mit der Verschiebung verbundene Zunahme der Radien Δr_{1k}, Δr_{2k}, ..., so ergibt sich eine Gesamtarbeit

$$A_k = e_k\left(\frac{e_1\,\Delta r_{1k}}{r_{1k}^2} + \frac{e_2\,\Delta r_{2k}}{r_{2k}^2} + \cdots\right),$$

und zwar ist dies eine Arbeit, die die elektrischen Kräfte leisten, wenn wir eine Zunahme Δr als positiv bezeichnen.

Die in der Klammer stehenden Glieder können wir so umformen, wie es in § 31, (1), (2) ausgeführt ist. Dann stellt jedes Glied die Änderung des Potentials dar, das eine der Elektrizitätsmengen im Punkte k hervorruft, und die Arbeit der elektrischen Kräfte

$$A_k = -\,e_k(\Delta\varphi_{1k} + \Delta\varphi_{2k} + \cdots)$$

wird negativ, wenn wir unter Δ nicht wie in § 31, (7) eine Abnahme, sondern eine Zunahme verstehen.

Da e_k konstant ist, können wir setzen

$$A_k = -\,\Delta(e_k\varphi_{1k} + e_k\varphi_{2k} + \cdots + e_k\varphi_{k-1,k} + e_k\varphi_{k+1,k} + \cdots).$$



Es ist hierin

$$\varphi_{1k} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon r_{1k}}.$$

Wie in § 31, 3. können wir zeigen, daß die Gleichung für A_k auch für endliche Verschiebungen richtig bleibt. Es fehlt in dieser Gleichung das Glied $e_k \varphi_{k,k}$.

3. Verschiebt sich außerdem eine zweite Elektrizitätsmenge e_i, so verstehen wir unter Δr_{ik} die Längenänderung von r_{ik}, die durch die Verschiebung von e_i und e_k zusammen hervorgebracht wird. Der Arbeitsanteil, der durch die Verschiebung von e_i gegen die von e_k herrührende Kraft geleistet wird, ist dann in A_k schon enthalten. Die Arbeit A_i, die nun hinzukommt, setzt sich also nur aus den Arbeiten zusammen, die gegen die von allen Ladungen außer e_i und e_k herrührenden Kräfte geleistet wird. A_i enthält also analoge Glieder wie A_k, nur fehlt außer dem Gliede $e_i \varphi_{i,i}$ auch das Glied $e_i \varphi_{i,k}$.

Verschiebt sich eine dritte, vierte u. s. f. Elektrizitätsmenge, so wird in jedem weiteren Arbeitsbeitrag ein weiteres Glied fehlen, das im vorhergehenden bereits Berücksichtigung gefunden hat.

4. Bei einer Verschiebung aller elektrischen Ladungen gegeneinander erhalten wir also eine Arbeit:

$$\begin{aligned} A = -\Delta[0 &+ e_1\varphi_{21} + e_1\varphi_{31} + e_1\varphi_{41} + e_1\varphi_{51} + \cdots \\ &(+ e_2\varphi_{12}) + 0 + e_2\varphi_{32} + e_2\varphi_{42} + e_2\varphi_{52} + \cdots \\ &(+ e_3\varphi_{13}) + (e_3\varphi_{23}) + 0 + e_3\varphi_{43} + e_3\varphi_{53} + \cdots \\ &(+ e_4\varphi_{14}) + (e_4\varphi_{24}) + (e_4\varphi_{34}) + 0 + e_4\varphi_{54} + \cdots \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot].\end{aligned}$$

In Klammern, wie $(+ e_2 \varphi_{12})$ sind hier die Glieder dazugeschrieben, die wir nicht mit addieren dürfen. Es ist aber

$$e_2\varphi_{12} = \frac{e_2 e_1}{4\pi\varepsilon r_{12}} = e_1\varphi_{21},$$

und so hat ein jedes der eingeklammerten Glieder den gleichen Wert wie eines der nicht eingeklammerten, und wir erhalten ein richtiges Resultat, wenn wir über die eingeklammerten Glieder mit summieren und dann durch 2 dividieren. Dann wird:

$$\begin{aligned} A = -\Delta\tfrac{1}{2}[e_1(\ 0 &+ \varphi_{21} + \varphi_{31} + \varphi_{41} + \cdots) \\ + e_2(\varphi_{12} &+ \ 0 \ + \varphi_{32} + \varphi_{42} + \cdots) \\ + e_3(\varphi_{13} &+ \varphi_{23} + \ 0 \ + \varphi_{43} + \cdots) \\ + \cdot \cdot \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot],\end{aligned} \tag{1}$$

$$A = -\Delta\tfrac{1}{2}\sum e_k\varphi_k, \tag{2}$$

worin

$$\varphi_k = \varphi_{1k} + \varphi_{2k} + \cdots + \varphi_{k-1,k} + \varphi_{k+1,k} + \cdots$$

das Potential aller Ladungen außer der Ladung e_k im Punkte k bedeutet. In den Klammerausdrücken der Gleichung (1) sind die „Potentiale der Ladungen auf sich selbst" auszulassen.

5. Diese Arbeit entspricht einer Abnahme der elektrischen Energie, da sie von den elektrischen Kräften geleistet wird. Setzen wir

$$W = \tfrac{1}{2} \sum e_k \varphi_k, \tag{3}$$

so ist W eine Funktion, deren Abnahme die von den elektrischen Kräften bei beliebigen Verschiebungen der Ladungen geleistete Arbeit darstellt.

Die Gleichung (2) trägt allen durch Verschiebung von Ladungen verursachten Veränderungen Rechnung, also auch dem Verschwinden von Ladungen, das durch Verschiebung ins Unendliche oder durch das Zusammentreten zweier entgegengesetzt gleicher Ladungen erfolgt. Sie trägt der Verschiebung eines nichtgeladenen Dielektrikums auch Rechnung, wenn wir die induzierten Ladungen einführen. Ob sie es aber auch tut, wenn wir diese induzierten Ladungen, die ja nur fingiert sind, nicht einführen, dafür aber die veränderte Dielektrizitätskonstante berücksichtigen, werden wir später erkennen.

6. Die Gleichung (3) lehrt, daß die Energie eines vollständigen Feldes eine eindeutige Funktion der Ladungsverteilung, also nicht von der Art der Erzeugung dieser Verteilung abhängig ist; und das gilt, wie wir auch über die in § 31, 6. angeführte willkürliche Konstante φ_0 des Potentials verfügen.

Haben wir einen beliebigen Wert φ_0 für diese Konstante festgelegt, so können wir das Potential in der Form

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi'$$

schreiben und φ_0 ist im ganzen Raume konstant, während φ' das im Raume variable Potential etwa in der Definition § 31, 4., (1) bedeutet. Dann wird aus Gleichung (3)

$$W = \tfrac{1}{2} \sum e_k \varphi_k = \tfrac{1}{2} \varphi_0 \sum e_k + \tfrac{1}{2} \sum e_k \varphi_k',$$

und in einem vollständigen Felde ist, da keine Kraftlinien die umschließende Oberfläche durchsetzen, nach § 35, (1)

$$\sum e_k = 0,$$

also

$$W = \tfrac{1}{2} \sum e_k \varphi_k = \tfrac{1}{2} \sum e_k \varphi_k',$$

das heißt von φ_0 unabhängig.

7. Die Energie, die wir einem endlichen Stück eines unendlich großen ebenen Plattenkondensators zuzuschreiben haben, können wir direkt aus der Feldintensität, die die eine der Platten am Orte der anderen erzeugt, berechnen.

Ist nur eine der beiden Platten, etwa α, mit ihrer Ladung σ vorhanden, so sendet sie nach § 33, 2. in den umgebenden Raum geradlinige Kraftlinien von der konstanten Dichte

$$\varepsilon E_1 = \frac{\sigma}{2}$$

aus, erzeugt also ein „homogenes" Feld von der Intensität

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon},$$

wenn ε die Dielektrizitätskonstante in dem umgebenden Medium bedeutet (Fig. 131).

Die Feldintensität ist nach § 28, 1. die Kraft auf die unendlich kleine Ladungseinheit. Auf die Ladung, die ein Element Δq der Platte β trägt und die gleich $-\sigma\Delta q$ ist, würde die Platte α also in positiver Richtung der Kraftlinien die Kraft

$$-E_1 \sigma \Delta q = \frac{-\sigma^2 \Delta q}{2\varepsilon}$$

ausüben. Der positive Betrag dieser Kraft sucht also das Element Δq der Platte α zu nähern.

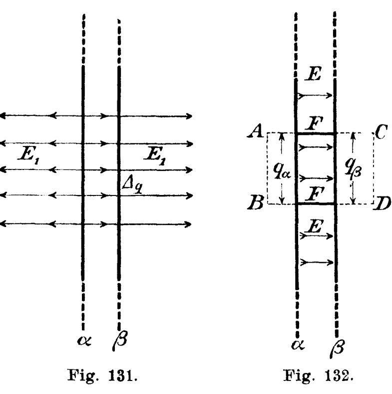


Fig. 131. Fig. 132.

Dieselbe Kraft wird aber auf jedes Flächenelement Δq der Fläche β ausgeübt. Grenzen wir nun auf der Fläche α ein beliebiges endliches Flächenstück q_α ab (Fig. 132) und errichten auf dessen Umrandung eine Zylinderfläche F normal zur Ebene α, so wird diese auf der Fläche β ein kongruentes Flächenstück $q_\beta = q_\alpha = q$ herausschneiden. Die Kraft, die auf das endliche Stück q_β ausgeübt wird, setzt sich additiv aus den Kräften auf die einzelnen Elemente Δq von q_β zusammen und ist demnach ihrem absoluten Werte nach

$$K = \frac{\sigma^2 q}{2\varepsilon}.$$

8. Bezeichnen wir die Feldintensität, die wirklich im Kondensator herrscht, die also von den Ladungen auf α und auf β herrührt und die nur zwischen den Platten existiert, mit E, so ist nach § 33, 4.

$$\varepsilon E = \sigma,$$

es wird

$$K = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 q,$$

und diese Kraft K sucht den Abstand der beiden Platten zu verkleinern.

Vergrößern wir die Zylinderfläche F über die Flächen α, β hinaus, und begrenzen diese Vergrößerungen durch beliebige Basisflächen AB und CD (in der Figur 132 sind die Vergrößerungen punktiert gezeichnet), so bildet der innerhalb dieser vergrößerten Zylinderfläche gelegene Raum ein vollständiges Feld; denn da die Kraftlinien des Kondensators der Zylinderwandung F parallel laufen, treten durch die Oberfläche dieses Raumes nirgends Kraftlinien hindurch.

Führen wir nun eine Verkleinerung des Abstandes zwischen den ganzen Platten α und β um ein endliches Stück d unter Konstanthaltung der Ladungen aus, so bleibt nach § 33, 4. das Feld konstant, da $E = \sigma / \varepsilon$ unabhängig vom Plattenabstande ist, und die Kraft K leistet uns eine Arbeit

$$A = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 q d = \varDelta W_q,$$

wenn wir unter $\varDelta W_q$ die Abnahme der elektrischen Energie bei dieser Verschiebung verstehen. Es ist hierbei Verschiebung der ganzen Platte β vorausgesetzt, so daß $\varDelta W_q$ nur den Anteil der gesamten Energieabnahme bedeutet, der dem aus q_α und q_β gebildeten Kondensatorstück zukommt. Jedes analog konstruierte Kondensatorstück wird die analoge Energieabnahme erleiden.

Statt der Verschiebung der Platte β hätten wir auch eine Verschiebung von α, oder auch eine Verschiebung beider Platten ausführen können. Das Resultat bleibt das gleiche, wenn wir nur unter d die Abnahme des Plattenabstandes verstehen.

9. Die Arbeit, die im Maximum von den elektrischen Kräften in dem Kondensatorstück geleistet werden kann, ist

$$W_q = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 q h,$$

wenn wir unter h den Plattenabstand in der Ausgangsstellung verstehen; denn sobald eine solche Verschiebung $d = h$ ausgeführt ist, ist überhaupt kein elektrisches Feld mehr vorhanden und jede weitere Verschiebung würde einen Arbeitsaufwand von außen verlangen. Es berühren sich jetzt die Platten α und β, also auch ihre Ladungen $+\sigma$ und $-\sigma$.

Umgekehrt müssen wir, um den Plattenabstand h wieder herzustellen, die Arbeit

$$W_q = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 q h \tag{4}$$

für jedes Kondensatorstück von der Flächengröße q aufwenden und W ist demnach die dem Kondensatorstück zukommende Energie. $qh = \tau$ ist das zwischen q_α und q_β gelegene Raumstück, so daß

(5) $$W_q = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 \tau$$

wird.

10. Die Gleichungen (4), (5) entsprechen in der Tat der Gleichung (3); denn es ist nach § 33, Gleichung (3)

$$Eh = \varphi_\alpha - \varphi_\beta,$$

nach § 33, 4.

$$\varepsilon E q = \sigma q = e_\alpha = -\,e_\beta,$$

wenn wir unter e_α und e_β die auf q_α und q_β befindlichen Ladungen verstehen. Demnach folgt als Energie des Kondensatorstückes zwischen q_α und q_β

$$W_q = \tfrac{1}{2}\,e_\alpha(\varphi_\alpha - \varphi_\beta) = \tfrac{1}{2}\,e_\alpha\varphi_\alpha + \tfrac{1}{2}\,e_\beta\varphi_\beta,$$

oder

(6) $$W_q = \tfrac{1}{2}\sum e\varphi.$$

Es ist hier aber φ das Potential, wie es wirklich am Orte der Ladung e herrscht, also ohne Auslassung des Potentials von e auf sich selbst (Nr. 4). Das erklärt sich dadurch, daß bei einer Flächenladung der einem Punkte zukommende Anteil der Ladung unendlich klein wird, und damit auch, trotz des zu Null werdenden Abstandes r im Nenner der Potentialfunktion, das Potential auf sich selbst.

Der Ausdruck (6) unterscheidet sich also von (3) nur um unendlich kleine Glieder, wofür wir einen strengen Beweis hier nicht bringen können.

11. Die Gleichung (3) gibt uns den Energieinhalt des vollständigen Feldes. Es liegt aber nahe, anzunehmen, daß jedem Raumteile, in dem ein Feld existiert, ob es Ladungen enthält oder nicht, auch eine elektrische Energie zugesprochen werden darf. Um hierüber zu entscheiden, denken wir uns eine Kraftröhre R von so kleinem Querschnitt q (Fig. 133), daß wir längs des Querschnittes die Kraftlinien als parallel ansehen dürfen. Wir zeichnen sie vollkommen von der Stelle a an, wo sie an positiven Ladungen entspringt, bis zu der Stelle b, wo sie an negativen endet. Unterwegs mag sie beliebig durch ungeladene Grenzen γ verschiedener Medien hindurchgehen.

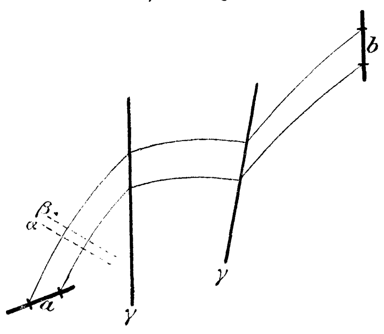


Fig. 133.

An zwei benachbarten Stellen legen wir Querschnitte α, β durch die Kraftröhre. Der Abstand h der beiden sei als unendlich klein gegen die Querschnittdimensionen anzusehen.

N sei die Kraftliniendichte. Dann ist

$$Nq = \varepsilon E q$$

die Kraftlinienzahl in der Kraftröhre.

12. Besitzt der kleine Raum τ der Kraftröhre zwischen α und β eine eigene Energie, so müßte die Energie W des ganzen Feldes um einen kleinen Teil W_τ abnehmen, wenn wir die Kraftlinien in diesem Raume auslöschen könnten. Dann würden bei α die Kraftlinien enden und bei β wieder einsetzen.

Das alte Feld könnten wir wieder herstellen, wenn wir die Flächen α, β wie einen Plattenkondensator mit Ladungen σ, $-\sigma$ versehen würden, die so beschaffen sind, daß sie das ursprüngliche Feld E in τ erzeugen, d. h. wir müßten dem Raume τ die Energie (Gleichung (5)) $\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \tau$ liefern.

Daraus folgern wir: Das Kraftlinienstück zwischen α und β besitzt die Energie

$$W_\tau = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \tau.$$

13. Das gilt zunächst für einen durch zwei Kraftröhrenquerschnitte α, β begrenzten Raum τ. Es gilt aber allgemein für jedes Raumelement $\Delta\tau$, das so klein ist, daß wir E und ε als konstant in ihm ansehen können, denn jeden solchen Raum können wir durch Schichten in Räume von den Eigenschaften von τ zerlegen.

Für einen beliebigen endlichen Raum wird demnach der Energieinhalt

(7) $$W = \tfrac{1}{2}\sum \varepsilon E^2 \Delta\tau,$$

und wenden wir diese Gleichung auf die ganze Kraftröhre an, so folgt:

$$W_R = \tfrac{1}{2}\sum \varepsilon E q \cdot E h.$$

$\varepsilon E q = N$ ist in der ganzen Röhre konstant, auch an Grenzflächen γ, also ist

$$W_R = \tfrac{1}{2} N \sum E h,$$

und $\sum Eh$ ist, über die ganze Länge der Kraftröhre erstreckt, die Potentialdifferenz an den Enden derselben (§ 35, Gl. (2a)).

$+N$ ist der Teil der elektrischen Ladung bei a, der die Kraftlinien der Röhre erzeugt, $-N$ das Gleiche bei b. Wir setzen

$$+N = e_a, \quad -N = e_b,$$

und es wird

$$W_R = \tfrac{1}{2}(e_a \varphi_a + e_b \varphi_b).$$



14. Führen wir dies für alle Kraftröhren des ganzen Raumes aus, so ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} \sum e\varphi,$$

also wieder die Gleichung (3), mit dem einzigen Unterschiede, daß die die Potentiale auf sich selbst enthaltenden Glieder nicht fehlen.

Wir haben hier gleichzeitig erkannt, daß uns die Gleichung (3) dieses Paragraphen die gesamte Energie liefert, auch wenn wir die Influenzladungen an den Grenzen verschiedener Medien nicht mit einführen, wenn die e nur die „wahren" Ladungen bedeuten. Denn in der Ableitung Nr. 11 u. f. haben wir die Influenzladungen nicht eingeführt, wohl aber durch die Dielektrizitätskonstante ε auf Inhomogenitäten Rücksicht genommen.

§ 37. Elektrische Ströme.

1. Wenn wir einen Leiter in ein elektrisches Feld einführen, wird eine Trennung der Elektrizitäten so lange eintreten, bis das Feld im Innern kompensiert ist. Bis das erreicht ist, findet eine „Strömung" statt, indem positive elektrische Ladungen in der Richtung der Kraftlinien, negative entgegengesetzt dieser Richtung zu fließen beginnen. Das folgt, wenn wir die Annahme machen, wie in § 34, daß die Elektrizität nach allen Richtungen hin gleichmäßig beweglich ist.

2. Man kennt nun zwei Fälle der Beweglichkeit. Entweder die Ladungen sind „frei" beweglich, wie ein Körper im luftleeren Raume, d. h. ohne Reibung. Dann wird die Bewegung beschleunigt sein und die Beschleunigung der Kraft proportional. Oder es treten Reibungskräfte auf, Kräfte, die erst mit der Bewegung einsetzen und ihr nach einer gewissen Zeit τ eine konstante Geschwindigkeit verleihen (vgl. § 18 der Dynamik).

Die letztere Bewegungsart entspricht bei den elektrischen Strömungen der Erfahrung. Im folgenden betrachten wir Zeitpunkte nach Überschreitung der Zeit τ (§ 18), indem wir einmal voraussetzen, daß diese Überschreitung überhaupt vorkommt.

Die Elektrizitätsmengen folgen also, so weit der Leiter reicht, den elektrischen Kraftlinien mit einer Geschwindigkeit, die der Kraft proportional ist.

3. Wir denken uns ein kurzes Stück einer Kraftröhre. Die Dimensionen dieses Stückes sollen so klein sein, daß die in einem Moment im Innern des Stückes während der Strömung vorhandene



Ladung e als gleichförmig über das ganze Stück verteilt angesehen werden darf. l sei die Länge des Kraftröhrenstückes, q der Querschnitt, der ebenfalls als konstant über das ganze Stück angesehen werden möge. Ist ϱ_1 die Dichte der positiven Elektrizität, so ist

$$e_1 = \varrho_1 q l$$

die in dem Röhrenstück enthaltene positive Ladung.

Infolge der Verschiebung der Ladung längs der Kraftlinien wird durch einen Querschnitt der Kraftröhre die Ladung e_1 in einer gewissen Zeit $\varDelta t$ hindurchtreten. Wenn v_1 die Bewegungsgeschwindigkeit von e_1 und $\varDelta t$ die Zeit ist, die e_1 zum Durchwandern der Strecke l braucht, so ist

$$v_1 = \frac{l}{\varDelta t}$$

und

$$e_1 = \varrho_1 q v_1 \varDelta t.$$

Durch die unendlich kleine Querschnittseinheit von q strömt also in der unendlich kleinen Zeiteinheit eine positive Elektrizitätsmenge in der Richtung der Kraftlinien vom Betrage

$$i_1 = \varrho_1 v_1.$$

Findet gleichzeitig eine Strömung einer negativen Ladung $-\varrho_2$ statt, so tritt durch dieselbe Querschnittseinheit eine negative Ladung mit einer Geschwindigkeit v_2 gegen die Kraftlinien wandernd, d. h. also mit einer Geschwindigkeit $-v_2$ in Richtung der Kraftlinien wandernd hindurch. In gleichem Sinne wie i_1 fließt also auch eine Strömung

$$i_2 = (-\varrho_2)(-v_2)$$
$$= \varrho_2 v_2.$$

> Der gegen die Kraftlinienrichtung fließende Strom negativer Elektrizität ist äquivalent mit einem in der Kraftlinienrichtung fließenden Strom positiver Elektrizität von gleichem Betrage.

4. Die Gesamtheit der in der Richtung von E durch eine zu E senkrechte Querschnittseinheit in der Zeiteinheit hindurchtretenden Ladungen ist also

$$i = i_1 + i_2,$$

und da v_1 und v_2 mit E proportional sind (§ 18, (2)),

$$i = \lambda E. \tag{1}$$

Während der Strömung wird sich das elektrische Feld ändern.

Man betrachtet also den Vorgang nur während einer unendlich kleinen Zeit $\varDelta t$.

5. i heißt die „Stromdichte" der elektrischen Strömung, λ die „Leitfähigkeit" des betreffenden Leiters. Dieses λ enthält einen der reziproken „Reibungskonstante" (§ 18, 3.) analogen Faktor und außerdem die für die Strömung zur Verfügung stehenden elektrischen Ladungen, die absoluten Werte von ϱ. Über diese beiden Faktoren, oder vielmehr gleich über den Wert λ, hat das Experiment zu entscheiden, und dieses ergibt:

λ ist eine Konstante des Materials.

Mit gewissen physikalischen Eigenschaften des Leiters, z. B. mit der Temperatur, ändert sich die Leitfähigkeit.

6. Da die Bewegung der Ladung nach § 34, 4. derart erfolgt, daß das Feld herabgesetzt wird, so ist damit eine Energieverminderung am Orte der Strömung verbunden. Wir denken uns, wie in § 36, 11., in die Kraftröhre hinein zwei unendlich benachbarte Schnitte im Abstand h gelegt. Das Feld zwischen diesen ist das eines Plattenkondensators. Die Energie in dem Zwischenraume ist

$$\tfrac{1}{2}\,\varepsilon E^2 q h.$$

Wir fassen einen so kurzen Zeitabschnitt $\varDelta t$ der Strömung ins Auge, daß E sich innerhalb $\varDelta t$ nur um den unmerklichen Betrag $\varDelta E$ ändert. Die Energie nach der Zeit $\varDelta t$ wird sein

$$\tfrac{1}{2}\,\varepsilon (E - \varDelta E)^2 q h.$$

Die Energie hat somit um

$$\varDelta W = \varepsilon E\, \varDelta E\, q h$$

oder

$$\varDelta W = E h\, \varDelta(\varepsilon E q)$$

abgenommen, wenn wir quadratische Glieder von $\varDelta E$ vernachlässigen. $\varDelta E$ war die Abnahme von E; $\varepsilon q\, \varDelta E = \varDelta(\varepsilon E q)$ ist danach die Abnahme der Kraftlinienzahl im Plattenkondensator. Geht von der Platte α (Fig. 133, Seite 233) eine positive Ladung e nach β über (oder eine negative $-e$ von β nach α, was aufs gleiche hinauskommt), so wird

$$e = \varDelta(\varepsilon E q) = i q\, \varDelta t$$

die gesamte in den Kondensator in der Zeit $\varDelta t$ von α nach β übergeströmte Ladung sein und

$$\varDelta W = i E q h\, \varDelta t$$

wird der Energieverbrauch im Plattenkondensator. Daraus folgt:

Wenn an einem Orte eines Leiters eine Stromdichte i herrscht, so verliert an diesem Orte ein Volumenelement $\Delta\tau$ in der unendlich kleinen Zeiteinheit die elektrische Energie

(2) $$Q = iE\Delta\tau,$$

und diese Gleichung gilt für ein beliebiges Raumelement $\Delta\tau$, das so klein ist, daß wir i und E in ihm als konstant annehmen dürfen, da wir ein solches durch parallele Schnitte normal zu den Kraftlinien in Schichten zerlegt denken können.

Für ein unendlich kurzes Kraftröhrenstück, das von zwei zu den Kraftlinien normalen Querschnitten q begrenzt ist, wird

$$\Delta\tau = qd,$$

wenn d den Abstand der beiden Normalflächen bedeutet. Dadurch wird

$$Q = iqEd$$

oder (§ 31, 7.)

(2') $$Q = iq\Delta\varphi.$$

Hierin ist $\Delta\varphi$ die Potentialdifferenz der beiden Grenzflächen.

7. Diese Energie muß sich nach dem Energieprinzip als anderweitige Energie wiederfinden, im allgemeinen als Wärme. Setzen wir nach Gleichung (1) $E = i/\lambda$, so wird

(3) $$Q = \frac{i^2}{\lambda}\Delta\tau$$

die auftretende Wärme, die den Namen „Joulesche[1]) Wärme" führt. Sie ist dem Quadrat der Stromdichte proportional.

8. Es sei ein Kraftröhrenstück von endlichen Dimensionen gegeben (Fig. 134). Die Endflächen 1, 2 mögen so gelegt sein, daß sie die Kraftlinien überall normal durchschneiden; dann sind sie Niveauflächen. An einer beliebigen Stelle legen wir einen ebensolchen Querschnitt q normal zu den Kraftlinien und diesen zerlegen wir in Elemente Δq, die wir als Querschnitte von Elementarkraftröhren auffassen wollen. $l = \Sigma\Delta l$ sei die Länge einer solchen Elementarkraftröhre.

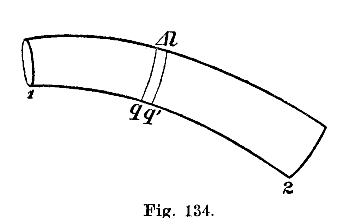


Fig. 134.

Durch den ganzen Querschnitt q fließt in der Zeiteinheit die Elektrizitätsmenge

$$J = \sum_q i\Delta q = \sum_q \lambda E\Delta q.$$

1) Über Joule vergleiche Anm. 2. Seite 147.

J heißt die „Stromstärke“ oder der elektrische „Strom“. Im Abstand Δl von q ziehen wir durch die Kraftröhre einen zweiten Querschnitt q' normal zu den Kraftlinien. Es wird

$$J = \sum_q \frac{\lambda E \Delta l \Delta q}{\Delta l},$$

und $E\Delta l$ ist über den ganzen Querschnitt q konstant, nämlich gleich der Potentialdifferenz an den beiden Querschnitten q, q':

$$E\Delta l = \varphi(q) - \varphi(q') = \Delta\varphi;$$

also wird

$$J = \Delta\varphi \sum_q \frac{\lambda \Delta q}{\Delta l}.$$

Der Ausdruck:

$$w_1 = \frac{1}{\sum_q \frac{\lambda \Delta q}{\Delta l}}$$

heißt der „elektrische Widerstand“ des zwischen q und q' gelegenen Raumes. Er ist von der Richtung der Kraftlinien abhängig, da die Lage und Krümmung von q und q' und damit Δl von dieser Richtung abhängt.

Es wird jetzt

$$J = \frac{\Delta\varphi}{w_1}.$$

Der Richtung nach fällt J mit E, also mit dem Potentialgefälle zusammen.

9. Zerlegen wir das ganze Kraftröhrenstück in lauter Schichten durch Querschnitte von der Art q, q', so folgt, wenn die Indizes sich auf die einzelnen Schichten beziehen,

$$J_1 w_1 + J_2 w_2 + J_3 w_3 + \cdots = \sum E\Delta l = \sum \Delta\varphi.$$

Wenn $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(\nu)}$ die Potentiale an den einzelnen aufeinander folgenden Querschnitten, φ_1, φ_2 die Potentiale an den Endflächen 1, 2 bedeuten, wird

$$\sum \Delta\varphi = (\varphi^{(\nu)} - \varphi_2) + (\varphi^{(\nu-1)} - \varphi^{(\nu)}) + \cdots + (\varphi' - \varphi'') + (\varphi_1 - \varphi') = \varphi_1 - \varphi_2,$$

und es wird

$$J_1 w_1 + J_2 w_2 + J_3 w_3 + \cdots = \sum E\Delta l = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Ist $J = J_1 = J_2 = \cdots$ im ganzen Kraftröhrenstück konstant (Bedingung A der stationären Strömung), was, wie wir sehen werden, ein besonders wichtiger Fall der Strömung ist, dann folgt

(4) $$J = \frac{\Sigma E \Delta l}{w} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{w},$$

wo

(5) $$w = \sum w_n = \sum_l \frac{1}{\sum_q \frac{\lambda \Delta q}{\Delta l}}$$

der „elektrische Widerstand“ der ganzen Kraftröhre heißt. w ist wieder im allgemeinen von der Richtung der Kraftlinien abhängig, weil es die einzelnen w_n sind.

w ist also eine durch die geometrischen Anordnungen der Kraftröhre und die Leitfähigkeit bedingte Größe.

10. Die Gleichung (5) nimmt in speziellen Fällen einfache Formen an.

a) Ist die Kraftröhre eine Elementarkraftröhre, d. h. von unendlich kleinem Querschnitt, so wird $\sum_q \frac{\lambda \Delta q}{\Delta l}$ einfach durch $\frac{\lambda \Delta q}{\Delta l}$ zu ersetzen sein, und es folgt

(5a) $$w = \sum_l \frac{\Delta l}{\lambda \Delta q}.$$

b) Für ein zylindrisches, axial, also parallel von Kraftlinien durchsetztes Stück eines homogenen Körpers werden die Querschnitte q, q' alle einander parallel, daher Δl über jede aus zwei benachbarten Querschnitten gebildete Schicht konstant, also aus der Summe $\sum_q$ heraus gesetzt werden dürfen. Ebenso ist λ konstant und es wird

$$w = \sum_l \frac{1}{\frac{\lambda}{\Delta l} \Sigma \Delta q} = \sum_l \frac{\Delta l}{\lambda q},$$

wenn q der Querschnitt des Zylinders ist. Da nun wieder λ und q von l unabhängig sind, folgt weiter

(5b) $$w = \frac{l}{\lambda q}.$$

c) Zerlegen wir eine Kraftröhre durch beliebige Niveauflächen in Teilstücke, deren Widerstände wir mit w_n bezeichnen, so folgt aus (5) als Gesamtwiderstand

(5c) $$W = \sum w_n.$$

Die Widerstände „hintereinander geschalteter“ Kraftröhrenstücke addieren sich.

d) Betrachten wir eine Anzahl nebeneinander verlaufender Kraftröhrenstücke, die von den gleichen Niveauflächen 1, 2 begrenzt sind,



und in denen über die ganzen Längen konstante Ströme $J', J'', \ldots, J^{(n)}$ fließen, so wird die Summe der Ströme

$$\begin{aligned} J &= J' + J'' + \cdots + J^{(n)} \\ &= (\varphi_1 - \varphi_2)\left(\frac{1}{w'} + \frac{1}{w''} + \cdots + \frac{1}{w^{(n)}}\right) \\ &= \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{w}, \end{aligned}$$

wenn w den gesamten Widerstand, $w^{(n)}$ die Widerstände der einzelnen Kraftröhrenstücke bedeuten. Also

(5d) $$\frac{1}{w} = \sum \frac{1}{w^{(n)}}.$$

Der reziproke Widerstand „parallel geschalteter“ Kraftlinienstücke berechnet sich als die Summe der reziproken Widerstände der einzelnen Kraftlinienstücke.

Das gilt auch, wenn wir Kraftröhrenstücke wählen, die nicht aneinander anliegen, wenn nur die Enden derselben identische Niveauflächen sind.

11. Die Energieabgabe des zwischen q und q' gelegenen durchströmten Raumes (Fig. 134) ist nach Gleichung (2)

$$\sum_q i \varDelta q \cdot E \varDelta l,$$

oder, da $E \varDelta l = \varDelta \varphi$ über den Querschnitt konstant ist,

$$\varDelta \varphi \sum_q i \varDelta q = J \varDelta \varphi,$$

und demnach die Energieabgabe (Joulesche Wärme) des ganzen Kraftröhrenstückes, wenn J konstant ist,

$$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2)$$

und nach Gleichung (4)

(6) $$Q = J^2 w.$$

12. Es sei ein leitender Körper, ungefähr von der Gestalt der Figur 135, gegeben. Wir führen einem Flächenstück a eine positive Ladung $+e$ und einem Flächenstück b die gleiche negative Ladung $-e$ zu. Es wird ein elektrisches Feld entstehen, das zum Teil im Innern des Leiters verläuft, dessen Kraftlinien aber zunächst auch die Oberfläche desselben, z. B. bei c, durchsetzen.

Es tritt im Innern eine Trennung der Ladungen ein, die den



Erfolg haben wird, daß die Ladungen bei a und b schließlich kompensiert sind und das kommt aufs gleiche hinaus, als ob die Ladung $+e$ von a nach b hinüber geflossen ist, oder die Ladung $-e$ von b nach a, oder beides teilweise.

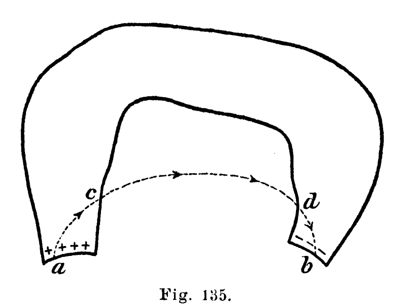


Fig. 135.

Dieser Fluß muß, wie wir gesehen haben, den Kraftlinien folgen; es wird also eine Verschiebung der Elektrizität von a längs der Kraftlinie $acdb$ erfolgen. Diese Verschiebung kann nur bis c gehen, da hier die Leitfähigkeit aufhört. Hier sammelt sich also positive Ladung an und diese erzeugt eine Normalkomponente eines Feldes ins Innere hinein, die im Innern entgegengesetzt der Normalkomponente der ursprünglichen Kraftlinie $acdb$ gerichtet ist. Die Ladung bei c wird so lange wachsen, bis diese Normalkomponente gerade kompensiert ist, bis also die ursprüngliche Kraftlinie in eine zur Oberfläche parallele verwandelt ist. Dasselbe findet mit negativer Ladung bei d statt, und ähnliches an allen Punkten, wo ursprüngliche Kraftlinien die Oberfläche durchsetzen.

Der erste Anteil der Strömung wird also den Erfolg haben, den ganzen Körper oberflächlich so zu laden, daß alle von a aus ins Innere eintretenden Kraftlinien auch ganz im Innern verlaufen.[1])

Erfahrungsgemäß wird schon nach unmeßbar kurzer Zeit τ' die Oberflächenladung nur noch unmerklich wenig von ihrem definitiven Werte abweichen, wenn die Leiter die in Laboratorien gebräuchlichen Dimensionen nicht überschreiten. Wir können nach Ablauf dieser Zeit τ' die Kraftlinien und Kraftröhren im Innern des Leiters als Stromlinien und Stromröhren bezeichnen, indem wir quantitativ definieren:

Die Anzahl der den Querschnitt 1 durchsetzenden Stromlinien ist gleich der Stromdichte.

13. Im Außenraume wird die Normalkomponente der Kraftlinien $acdb$ bei c von der Oberflächenladung nicht kompensiert, da

1) Dieser erste Anteil der Strömung ist es, der die Telegraphie auf große Entfernung durch Kabel, z. B. über Meere, so sehr erschwert, die Telephonie unmöglich macht. Da ein Kabel mit Rücksicht auf seine isolierende Umhüllung und das umgebende leitende Erdreich oder Meerwasser als ein Zylinderkondensator aufgefaßt werden kann, so erfordert dessen Kapazität (§ 33, 14.) eine viel größere Oberflächenladung, als ein frei durch die Luft geführter Draht. Bei einem transatlantischen Kabel zählt die Zeit zwischen Stromschluß und Ankunft einer meßbaren Strömung am Bestimmungsorte nach Sekunden.

beide gleichgerichtet sind. Es wird vielmehr ein nicht näher zu bestimmendes Feld gebildet, das sich aus dem ursprünglichen und dem der Oberflächenladungen zusammensetzt (Fig. 136).

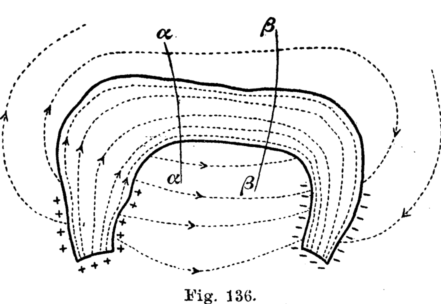


Fig. 136.

Die Strömung kann jetzt ungestört von a durch das Innere längs der neuen Kraftlinien bis b erfolgen.

Wenn wir nun die Ladungen bei a und b dauernd erneuern und dadurch a und b auf konstanter Potentialdifferenz erhalten, so wird jetzt ein zeitlich konstanter Strom eine „stationäre Strömung" (Bedingung B der stationären Strömung) den Körper durchfließen. Das Feld im ganzen Raume, also auch im Innern, bleibt konstant. Daraus folgt, daß die Bedingung A (Nr. 9), daß J längs einer Kraftröhre konstant ist, für die Kraftröhre, die unseren ganzen Körper durchsetzt, erfüllt sein muß. Denn wenn z. B. bei α (Fig. 136) J größer wäre als bei β, so würde das aussagen, daß durch einen Querschnitt bei α mehr Elektrizität hindurchtritt als bei β; und das würde ein dauerndes Anwachsen der Ladung zwischen α und β bedeuten. Damit wäre aber eine Feldänderung verbunden. Die Bedingung B der stationären Strömung schließt also die Bedingung A in sich, nicht aber umgekehrt.

Dies läßt sich leicht auf jede beliebige Kraftröhre verallgemeinern, da aus einer Kraftröhre heraus keine Ladung treten kann.

14. Stationäre Ströme. Ein Apparat, der die an a und b zu liefernden Ladungen dauernd erzeugen kann, ist die Elektrisiermaschine oder die Influenzmaschine. Sie können sehr hohe Felder im Dielektrikum erzeugen, aber sie erzeugen die dazu erforderlichen Ladungen nicht so rasch, daß sie bei der Geschwindigkeit, mit der sie durch den leitenden Körper von a nach b abfließen, zu großen Werten anwachsen können. Sie arbeiten zu langsam, um eine nennenswerte Stromstärke — verglichen mit anderen modernen Apparaten — zu erzeugen.

Weit kräftiger wirken chemische Elektrizitätsquellen.

Erforderlich ist zum Zustandekommen eines Stromes, daß zwei Flächen in ein und demselben Leiter gegen einander eine Potentialdifferenz besitzen.

15. Wenn zwei verschiedene Leiter miteinander in Berührung gebracht werden, so laden sie sich erfahrungsgemäß gegenseitig auf

verschiedenes Potential. Wir genügen allen Erfahrungen durch die folgende Annahme:

Wir stellen uns die Berührungsfläche zweier Leiter als eine unendlich dünne Schicht vor (AB in Fig. 137), in der normal zu der Schicht Kräfte irgend welcher Art, die „Kontaktkräfte", wirken, die die positiven elektrischen Ladungen der Schicht von den negativen trennen. Die positiven Ladungen werden in den einen Leiter hineinfließen und diesen nach den Gesetzen der Statik (§ 34) laden, bis er ein konstantes Potential φ_1 besitzt, die negativen werden den anderen laden, bis er ein konstantes Potential φ_2 besitzt.

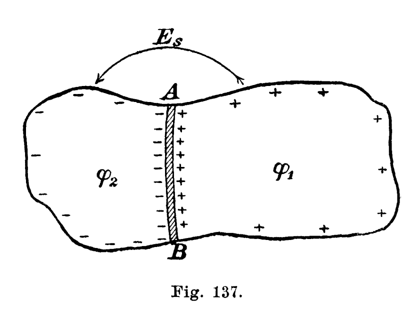


Fig. 137.

Das hierdurch entstandene elektrische Feld gehorcht unseren elektrostatischen Gesetzen. Die Ladung erfolgt so lange, bis durch die elektrostatischen Kräfte in der Berührungsschicht die Kontaktkräfte gerade kompensiert sind, und das ist erfahrungsgemäß dann der Fall, wenn die Potentialdifferenz $\varphi_1 - \varphi_2$ einen nur von der Natur der beiden Körper abhängigen Grenzwert K erreicht hat.

K ist im allgemeinen mit der Temperatur der Leiter variabel. Für ein gegebenes Leiterpaar, bei gegebener Temperatur aber ist K eine Konstante, von ihrer geometrischen Beschaffenheit, also auch von der Form und Größe der Berührungsfläche unabhängig. Wir nennen K die „elektromotorische Differenz" oder die „eingeprägte Potentialdifferenz" der beiden Leiter.

16. Wenn Gleichgewicht eingetreten ist, was erfahrungsgemäß nach unmeßbar kurzer Zeit der Fall ist, haben wir in der Umgebung der beiden Leiter ein statisches elektrisches Feld. In der Berührungsschicht aber ist dieses elektrische Feld durch die Kontaktkräfte kompensiert.

Es würde nach § 31, 7. die Größe

$$E' = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}$$

besitzen, wenn wir unter d die Dicke der Schicht verstehen. Da d unendlich klein ist, folgt, daß E' unendlich groß wird und es müssen auch die Kontaktkräfte unendlich groß sein. Gleichwohl werden sie bei der Trennung der Ladungen nur eine endliche Arbeit leisten, da sie nur über einen unendlich kleinen Weg wirken. Diese Arbeit ist, auf die Ladungseinheit berechnet, eben durch die elektromotorische Differenz $\varphi_1 - \varphi_2$ gegeben.

Auf das Feld außerhalb der Schicht üben die Kontaktkräfte keinerlei Einfluß aus. Es gelten für dieses Feld nach wie vor die Gesetze der Elektrostatik. Speziell wird dieses Feld als das Gefälle einer eindeutigen Potentialverteilung nach § 31, 9.; § 35, 7. zu berechnen sein. Die Potentialdifferenz der beiden Leiter selber werden wir aus einer im Außenraume von einem zum anderen verlaufenden Linie zu

$$K = \varphi_1 - \varphi_2 = \sum E_s \Delta s$$

(§ 35, 7., (2a)) berechnen können. (Fig. 137.)

17. Fügen wir mehrere Leiter zu einem Ring zusammen (Fig. 138), so tritt an jeder Berührungsstelle eine solche Potentialdifferenz auf, so daß also jede solche Stelle zwei unendlich benachbarten Flächen a, b der Figur 135 entsprechen würde. Jede Berührungsstelle würde die Bedingungen zum Zustandekommen eines elektrischen Stromes erfüllen. Gleichwohl ist ein Strom unmöglich, weil sonst das Energieprinzip durchbrochen wäre. Für die Strömungsenergie wäre ein Äquivalent nicht vorhanden. Wir können das Ausbleiben eines Stromes dadurch erklären, daß die Ströme der einzelnen eingeprägten Potentialdifferenzen so verlaufen, daß sie sich gegenseitig aufheben.

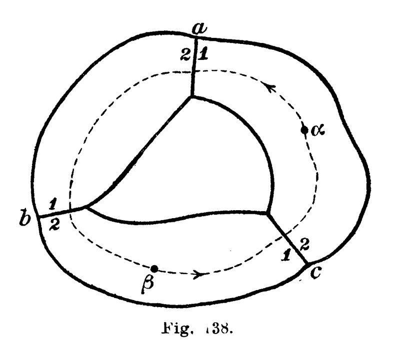


Fig. 138.

18. Das ist nicht mehr der Fall, wenn wir einem Teile der Berührungsstellen von außen Energie zuführen, etwa durch Erwärmung („Thermoelektrizität"). Auch chemische Energie können wir einigen der Berührungsstellen zuführen. Wenn wir z. B. einen der Leiter als „Elektrolyt" wählen, d. h. als Lösung eines Salzes oder einer Säure, in die die benachbarten Leiter eintauchen, so wird diese Lösung chemisch auf die Kontaktstellen wirken. Es tritt eine chemische Umwandlung ein, die äquivalent mit einer Energiezufuhr an die betreffende mit der Lösung in Berührung stehende Leiterfläche ist.

Es wird jetzt ein Strom resultieren, der sich als die algebraische Summe der von den einzelnen K erzeugten Ströme darstellt. Nach Gleichung (4) wird also

$$J = \frac{K_1}{w_1} + \frac{K_2}{w_2} + \frac{K_3}{w_3} + \cdots$$

und w_1, w_2, w_3, ... sind die Widerstände, die die einzelnen Ströme

auf dem ganzen Wege von dem Sitze ihres K bis zu dieser Stelle zurück finden.

Jeder der Einzelströme muß den resultierenden Kraftlinien folgen. Nach der Definition des Widerstandes (Nr. 9) ist also $w_1 = w_2 = w_3 = \cdots = W$ und

(7) $$J = \frac{K_1 + K_2 + K_3 + \cdots}{W}.$$

Dies Gesetz heißt das „Ohmsche Gesetz".[1])

In gleicher Weise folgt für eine einzelne beliebig aus dem Ring herausgegriffene Kraftröhre

(7') $$J' = \frac{K_1 + K_2 + K_3 + \cdots}{w},$$

wenn w' den Widerstand dieser Kraftröhre, J' den in ihr fließenden Anteil der Strömung bedeutet.

Führen wir keiner Berührungsstelle Energie zu, so folgt $J = 0$, also

(8) $$K_1 + K_2 + K_3 + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung enthält das sogenannte „Voltasche[2]) Gesetz", das aussagt:

> Wenn wir zwei gegebene Metalle miteinander in Berührung bringen, erhalten wir die gleiche Potentialdifferenz auf ihnen, wie wenn wir noch beliebige Metalle zwischen sie einschalten.

Dieses Gesetz ist also eine unmittelbare Folge des Energieprinzips.

Aus dem Voltaschen Gesetz leitet sich der Begriff der „Spannungszahlen" ab, die wir dadurch erhalten, daß wir einem ein für alle mal gewählten Metall A eine beliebige Zahl a, etwa die Einheit, zu-

---

1) Georg Simon Ohm, der Entdecker dieses Gesetzes, ist am 16. März 1787 in Erlangen geboren und am 7. Juli 1854 als Ordinarius in München gestorben.

2) Alessandro Volta ist am 19. Februar 1745 in Como geboren und ebendaselbst am 5. März 1827 gestorben. Er wurde 1774 Professor der Physik am Gymnasium in Como, 1779 an der Universität Pavia. 1815 wurde er Direktor der philosophischen Fakultät in Padua. (Vgl. Rosenberger, Geschichte der Physik, Bd. 2, S. 356.) Volta hat der berühmten Entdeckung des Galvanismus durch Luigi Galvani die richtige Deutung gegeben, soweit das ohne das Energieprinzip damals möglich war.

Luigi Galvani ist am 9. September 1737 in Bologna geboren und am 4. Dezember 1798 dort gestorben. Er war Professor der Medizin in seiner Vaterstadt. Seine Entdeckung fällt nach einer in Bologna befindlichen Gedenktafel in das Jahr 1786; die erste Publikation darüber ist 1791 erfolgt.

schreiben, und allen anderen Metallen $B, C, \ldots$ solche Zahlen $b, c, \ldots$, daß $b-a$, $c-a$ die Potentialdifferenz zwischen dem Metall B und A, C und A wird. Dann ist allgemein $m-n$ die Potentialdifferenz zwischen M und N. Die Worte „Spannung", „Spannungsdifferenz" haben die Bedeutung von „Potential", „Potentialdifferenz". Die Zahlen $a, b, \ldots$ sind also nicht dimensionslose Zahlen, sondern haben die Dimensionen eines Potentials.

19. Wir haben hier zum ersten Male einen Fall kennen gelernt, in dem $\sum\limits_{\bigcirc} E_l \Delta l$ nicht gleich Null ist, wo also die elektromotorische Arbeit über eine geschlossene Kurve nicht verschwindet. Denn bilden wir (Fig. 138) diesen Ausdruck von α aus bis α zurück über irgend eine Kraftlinie im Innern des Ringes (in der Figur punktiert gezeichnet), so wird

$$
\begin{aligned}
\sum_{\bigcirc} E\Delta l &= \sum_{\alpha}^{a_1} E\Delta l + \sum_{a_2}^{b_1} E\Delta l + \sum_{b_2}^{c_1} E\Delta l + \sum_{c_2}^{\alpha} E\Delta l \\
&= (\varphi_\alpha - \varphi_{a_1}) + (\varphi_{a_2} - \varphi_{b_1}) + (\varphi_{b_2} - \varphi_{c_1}) + (\varphi_{c_2} - \varphi_\alpha) \\
&= (\varphi_{a_2} - \varphi_{a_1}) + (\varphi_{b_2} - \varphi_{b_1}) + (\varphi_{c_2} - \varphi_{c_1}) \\
&= K_a + K_b + K_c,
\end{aligned} \tag{9}
$$

und das ist nicht mehr gleich Null, wenn einem Teil der Flächen a, b, c Energie von außen zugeführt wird.

Wir haben die Ursache dieser Abweichung von früheren Gesetzen darin zu suchen, daß wir in Figur 135 die Stellen a, b zur gegenseitigen Berührung gebracht haben, ohne ihre Potentialdifferenz zu ändern. Das ist bei statischen Ladungen nicht möglich, wohl aber unter Zuhilfenahme der „eingeprägten" Potentialdifferenzen K, die das Feld in der Zwischenschicht kompensieren. Wenn wir dieses Feld in die Summe $\sum E\Delta l$ mit aufnehmen, muß sich wieder der Wert Null ergeben.

Die Kraftlinien, und damit die Stromlinien, bilden in sich geschlossene Kurven.

20. Ebenso wie die Gleichung (9) erhalten wir für ein Stück einer solchen Kraftlinie, etwa von α über a, b bis β (Fig. 138)

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha}^{\beta} E\Delta l &= \sum_{\alpha}^{a_1} E\Delta l + \sum_{a_2}^{b_1} E\Delta l + \sum_{b_2}^{\beta} E\Delta l \\
&= \varphi_\alpha - \varphi_\beta + \sum_{\alpha}^{\beta} K,
\end{aligned} \tag{9'}
$$

wenn wir unter $\sum\limits_{\alpha}^{\beta} K$ die Summe der Beträge aller Potentialsprünge

an Grenzen verschiedener Metalle verstehen, die auf dem Kraftlinienstück zwischen α und β gelegen sind.

Infolge dieser Gleichung geht die Gleichung (4), wenn die dort besprochene Kraftröhre Grenzflächen verschiedener Metalle durchsetzt, in die allgemeinere Gleichung

$$(4') \qquad J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \Sigma K}{w}$$

über, und hierin ist ΣK die Summe der Beträge aller zwischen den Grenzflächen 1 und 2 der Kraftröhre gelegenen Potentialsprünge.

21. Durch eine graphische Darstellung können wir uns die Verhältnisse im Innern des Leiterringes am leichtesten veranschaulichen, indem wir eine Kraftlinie, etwa die in Figur 138 punktiert gezeichnete, verfolgen. Wir gehen vom Punkte α aus und tragen uns als Ordinate die Potentiale φ an jedem Orte in einem Koordinatensystem auf, dessen Abszisse der von α längs der Kraftlinie zurückgelegte Weg l ist (Fig. 139). Wir erhalten ein stetig gekrümmtes Kurvenstück AB bis zu der Stelle a, die in Figur 139 durch die am Fußpunkte mit a bezeichnete Vertikale angezeigt ist. Hier erfolgt ein Potentialsprung um den Betrag $\varphi_{a_1} - \varphi_{a_2}$, den wir als eine Verminderung des Potentials angenommen haben. Die Gerade CB stellt die Größe der hier eingeprägten Potentialdifferenz dar. Jenseits der Grenze a setzt sich die Kurve wieder stetig gekrümmt fort (CD), um wieder bei b eine sprungweise Änderung zu erfahren, deren Betrag $\varphi_{b_1} - \varphi_{b_2}$ wieder durch die Strecke ED dargestellt wird. So setzt sich das fort, bis wir bei α — in Figur 139 mit α_1 bezeichnet — auf das ursprüngliche Potential φ_α zurückkommen.

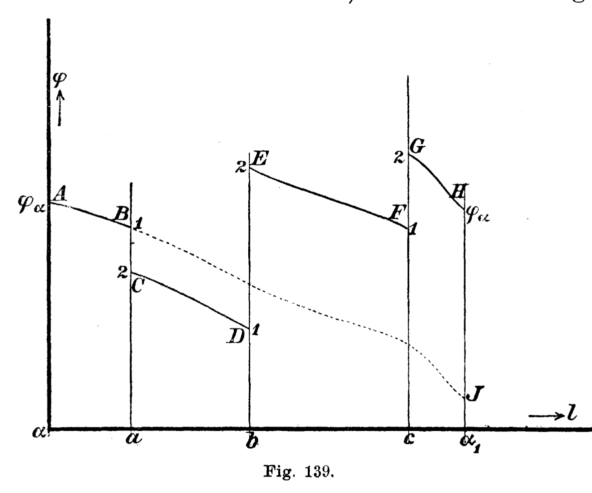


Fig. 139.

Wie in Figur 118 ist durch die Steilheit der Kurvenstücke an den einzelnen Orten das elektrische Feld wiedergegeben.

Denken wir uns die einzelnen Kurvenstücke senkrecht zur Abszisse so verschoben, daß sie sich aneinander anschließen, wie es durch die punktierte Linie in Figur 139 angedeutet ist, so erkennt

man leicht, daß die Strecke HJ die algebraische Summe der einzelnen Potentialsprünge bedeutet. Es ist also

$$HJ = \sum K.$$

Ist $\sum K = 0$, so fließt in den Leitern kein Strom. Es existiert in ihnen kein elektrisches Feld, das Potential in jedem homogenen Teile des Ringes wird konstant und die Kurvenstücke Linien, die mit der Abszisse parallel laufen.

22. Der Ausdruck

$$\sum K = K_a + K_b + K_c$$

heißt die „gesamte elektromotorische Kraft“[1]) des Ringes. Jedes der K können wir als die elektromotorische Kraft der betreffenden Grenzfläche ansehen. Wir wollen eins der einzelnen K dann als positiv bezeichnen, wenn es für sich einen Strom in einem ein für alle mal festgelegten Umlaufsinn hervorbringen würde. K ist dann positiv, wenn man beim Fortschreiten in diesem Umlaufsinne an der betreffenden Grenzfläche von kleinerem zu größerem Potential gelangt.

23. Wir können uns auch den Fall denken, daß die K in unendlich kleinen Beträgen auf eine unendlich große Zahl unendlich benachbarter Flächen verteilt sind, daß eine elektromotorische Kraft einen endlichen Raumteil des Ringes stetig erfüllt. Das tritt z. B. ein, wenn sogenannte „Konzentrationsketten“ vorliegen, oder auch bei einer anderen Deutung[2]) der thermoelektrischen Erscheinungen, nach der das Potential in einem einzelnen Leiter eine Funktion der Temperatur ist.

24. Das erstere dieser Beispiele wollen wir uns eingehender veranschaulichen. Bringen wir zwei verschieden stark konzentrierte Lösungen desselben Salzes an einer Grenzfläche miteinander in Berührung, so verhalten sie sich wie zwei verschiedene Metalle, laden sich also gegenseitig auf eine Potentialdifferenz K.

Eine Anzahl Schichten von abnehmender Konzentration liefert demnach in den äußersten Schichten eine Potentialdifferenz

$$\varphi_a - \varphi_b = K_1 + K_2 + \cdots + K_n.$$

Die K werden im allgemeinen gleiche Richtung (gleiches Vor-

1) Der Name „Kraft“ ist hier traditionell. Besser wäre der Ausdruck „Arbeit“, wie in § 31, 8., obwohl K erst die Dimensionen einer Arbeit erhält, wenn es mit einer Elektrizitätsmenge multipliziert wird.

2) Nach L. Hermann und F. Kohlrausch. Vgl. F. Kohlrausch, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. Göttingen 1874.

zeichen) haben, wenn die Konzentration von a nach b dauernd abnimmt oder dauernd wächst.

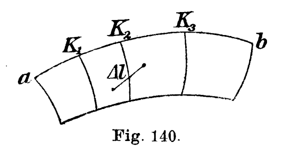


Fig. 140.

Durch Verminderung dieser Konzentrationsunterschiede und Vermehrung der Schichtenzahl ins Unendliche können wir zu stetiger Konzentrationsänderung übergehen, die uns im allgemeinen, wenn die Konzentrationsdifferenz an den Enden a, b endlich ist, eine endliche Potentialdifferenz $\varphi_a - \varphi_b$

$$\varphi_a - \varphi_b = \lim_{n=\infty} \sum_n K_n$$

liefern wird.

25. Legen wir durch die unendlich benachbarten Schichten eine beliebig gerichtete unendlich kleine Länge Δl hindurch (Fig. 140), und berechnen wir die ΣK von einem Ende von Δl bis zum anderen, so wird infolge der stetigen Verteilung von K diese proportional mit Δl gesetzt werden können:

$$\sum_{\Delta l} K = A_l \Delta l.$$

Der Faktor A_l ergibt sich als die Komponente nach Δl eines Vektors von der Richtung normal zu den Schichten. Er geht aus der Summe ΣK ebenso hervor, wie die elektrische Feldintensität aus der elektrischen Potentialdifferenz. Wir nennen A die „elektromotorische Intensität".

Reihen wir eine beliebige Zahl von Elementen Δl zu einem endlichen Kurvenstück l aneinander, so wird sich die elektromotorische Kraft über das ganze Kurvenstück K analog der Potentialdifferenz an deren Enden ergeben:

$$K = \sum_l A_l \Delta l. \tag{10}$$

26. Eine elektromotorische Differenz ist nur da möglich, wo verschiedene Medien aneinander grenzen, eine elektromotorische Intensität nur, wo ein Medium kontinuierlich seine physikalischen oder chemischen Eigenschaften variiert. Die Niveauflächen der elektromotorischen Intensität sind parallel mit den Niveauflächen der chemischen oder physikalischen Eigenschaften.

Die Summen aller von einem Linienzug durchsetzten elektromotorischen Differenzen und aller nach Gleichung (10) summierten elektromotorischen Intensitäten fassen wir unter dem Namen „die elektromotorische Kraft" längs dieses Linienzuges zusammen. Sie verursacht eine Trennung der elektrischen Ladungen gegen das durch diese getrennten Ladungen erzeugte Feld. Es

wird also wieder durch diese Vektoren ein Teil des elektrischen Feldes kompensiert. Deshalb ist auch, wo sie vorhanden sind, die Summe

$$\sum_{\bigcirc} E_s \varDelta s$$

über eine geschlossene Kurve nicht mehr gleich Null.

Es sei hier erwähnt, daß elektromotorische Kräfte oder elektromotorische Intensitäten auch durch einen Strom selber erzeugt werden können, wenn der Strom etwa die chemischen Eigenschaften eines Elektrolyten verändert. Die Richtung dieser sogenannten „Polarisations-elektromotorischen Kräfte“ ist immer der Stromrichtung entgegengesetzt.

27. Die Energie des Stromes (Gleichung (2), (3)) hatten wir aus der Abnahme des elektrischen Feldes abgeleitet. Bei einer stationären Strömung findet aber eine solche Abnahme nicht statt. Da nun die Gleichungen (2), (3) diese Abnahme gar nicht mehr enthalten, liegt es nahe, sie auch auf stationäre Ströme zu verallgemeinern. Der energetische Vorgang kann dann so erklärt werden, daß zwar dauernd ein elektrisches Feld zerfällt und seine Energie in Wärme übergeführt wird, aber auch gleichzeitig dieses Feld immer wieder neu entsteht, seine Energie aus der chemischen oder sonstigen Energie der Elektrizitätsquelle in gleichem Maße wieder nachgeliefert wird.

Jedenfalls aber gelten die Ableitungen der Gleichungen (2), (3) nur in einem homogenen Medium, d. h. an Orten, wo elektromotorische Differenzen K nicht existieren.

In einer Grenzschicht zweier Medien, die wir wieder als unendlich dünn ansehen wollen, ist im Falle des elektrostatischen Gleichgewichts ein Feld nicht vorhanden; wohl aber, wenn eine Strömung vorhanden ist infolge der Oberflächenladungen (Nr. 12), die die Kraftlinien ins Innere der Leiter hineindrängen. Dieses Feld wird die Potentialdifferenz $\varphi_a - \varphi_b = K$ an den beiden Grenzflächen der Schicht nicht merklich beeinflussen, da es nur den Beitrag Ed liefert, und die Schichtdicke d unendlich klein ist.

Nehmen wir an, daß jetzt die Energie der Strömung durch die Gleichung (2′) in Nr. 6 gegeben ist, so wird

$$Q = \sum i(\varphi_a - \varphi_b)q = (\varphi_a - \varphi_b)\sum i\,q,$$

zu summieren über die ganze Oberfläche der Schicht, oder, da $\sum i\,q = J$ die gesamte Stromstärke ist,

$$Q = J(\varphi_a - \varphi_b) = JK.$$

Nach Nr. 22 kann K positive und negative Werte annehmen. An Stellen, wo letzteres der Fall ist, wird Q negativ, d. h. der Strom



gibt keine Energie ab, sondern nimmt solche auf. Das ist z. B. da der Fall, wo der Strom erzeugt wird, also wo etwa chemische Energie in elektrische übergeführt wird. Es kann aber auch an Stellen, wo zwei Metalle aneinander grenzen, K negativ werden. Dann steht dem Strome nur Wärmeenergie zur Verfügung, es tritt eine Abkühlung der betreffenden Kontaktstelle ein. Das findet bei dem sogenannten Peltiereffekt[1]) (oder wenn sich K entsprechend Gleichung (10) aus elektromotorischen Intensitäten ableitet, beim „Thomsoneffekt“) statt.

28. Stromverzweigung. Das Gesetz $J = \text{const.}$ (Nr. 13) muß auch gelten, wenn das Leitersystem nicht einen einzigen Ring, sondern einen mehrfachen Ring (Fig. 141) bildet, also wenn sich das System verzweigt. Nur muß man die Summe der Ströme mehrerer Zweige als einen Strom auffassen. Legen wir an einer Verzweigungsstelle eine geschlossene Fläche σ so in das System hinein, wie in Figur 141 angedeutet, daß sie also eine Verzweigungstelle einschließt, so muß aus dieser Fläche ebensoviel Elektrizität in einem beliebigen festgelegten Zeitabschnitte aus- wie einfließen. Rechnen wir alle ausfließenden Ströme positiv, die einfließenden negativ, so muß

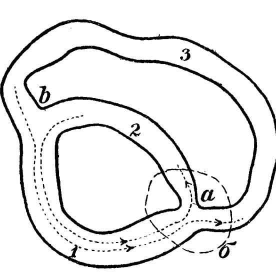


Fig. 141.

$$(11) \qquad \sum J_z = 0$$

sein, wenn J_z die einzelnen Zweigströme bedeutet. Wäre das nicht der Fall, so würde damit ein Ansammeln von Elektrizität im Innern von σ verbunden sein, und es wäre keine zeitliche Konstanz des Feldes möglich.

29. Lineare Ströme. Unter einem linearen Strome verstehen wir einen solchen, der in einem Leiter fließt, dessen Querdimensionen als unendlich klein gegen seine Längsdimensionen angesehen werden können. Eine Verzweigungsstelle kann dann als ein Punkt angesehen

---

1) Bringt man z. B. ein Stück Wismutdraht und ein Stück Antimondraht an zwei Enden miteinander in Berührung und verbindet die zwei anderen Enden durch beliebige Drähte, so erzeugt eine Erwärmung der Berührungsstelle des Wismuts und Antimons eine „thermoelektromotorische Kraft“, die einen elektrischen Strom in der Richtung vom Wismut zum Antimon an der erwärmten Stelle hervorruft.

Leitet man durch den Drahtring umgekehrt einen elektrischen Strom, der an der genannten Berührungsstelle vom Wismut zum Antimon fließt, so kühlt sich diese Berührungsstelle ab. Das ist die unter dem Namen „Peltiereffekt“ bekannte Erscheinung.

werden, und ist somit genauer definiert, als in unseren bisherigen Betrachtungen.

Wir nehmen an, es bestehe eine Verzweigungsstelle nur aus homogenem Material, so daß ein Wechsel des Materials nur auf den Zweigen, wenn auch in beliebiger Nachbarschaft des Verzweigungspunktes, vorkommt. Dann ist das Potential auf einem Verzweigungspunkte eindeutig definierbar. Für einen ganzen Leiterzweig, der zwischen zwei aufeinander folgenden Verzweigungspunkten liegt, z. B. für den Zweig 1 der Figur 142, wird dann nach Gleichung (4')

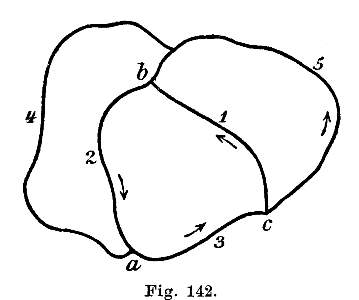


Fig. 142.

$$J_1 = \frac{\varphi_c - \varphi_b + \Sigma K_1}{w_1}.$$

Ebenso wird für einen sich an den Leiter 1 anschließenden Leiter 2

$$J_2 = \frac{\varphi_b - \varphi_a + \Sigma K_2}{w_2},$$

und weiter

$$J_3 = \frac{\varphi_a - \varphi_c + \Sigma K_3}{w_3};$$

und das können wir so lange fortsetzen, bis wir in zusammenhängendem Umlauf zu dem Anfange des ersten Leiters zurückgekommen sind, was nach Figur 142 hier bereits nach dem Leiter 3 erreicht ist. Diese sich schließenden Leiter bilden eine „Masche" des verzweigten Systems. In den drei Gleichungen bedeutet J_n die Stromstärke im Leiter n, positiv gerechnet in einem bestimmten Umlaufsinne der Masche, in der Figur durch Pfeile angedeutet; ΣK_n ist die algebraische Summe der auf diesem Leiterstück befindlichen elektromotorischen Kräfte, positiv gerechnet entsprechend Nr. 22 im gleichen Umlaufsinne; und w_n ist der Widerstand dieses Leiterstückes.

Wenn wir die Gleichungen mit w_n multiplizieren und addieren, folgt

$$J_1 w_1 + J_2 w_2 + J_3 w_3 = \sum K,$$

und hierin ist $\Sigma K = \Sigma K_1 + \Sigma K_2 + \Sigma K_3$ die Summe aller in der Masche vorhandenen elektromotorischen Kräfte. Besteht die Masche aus mehr als drei Leiterstücken, so wird allgemein

$$\sum J_n w_n = \sum K, \tag{12}$$

eine Gleichung, die in das Ohmsche Gesetz übergeht, wenn das verzweigte System aus einer einzigen Masche besteht.

30. Die Gleichung (11) gilt nach wie vor, auch für lineare Leiter. Wir können die beiden Gleichungen (11) und (12), die die „Kirchhoffschen Gesetze"[1]) enthalten, in Worten folgendermaßen aussprechen:

I. An einem Verzweigungspunkte ist die Summe aller abfließenden Ströme gleich Null.

II. Die Summe aller Produkte von Stromstärke und Widerstand für eine ganze Masche ist gleich der algebraischen Summe der in dieser Masche enthaltenen elektromotorischen Kräfte.

Anwendung auf die „Wheatstonesche Brückenanordnung". (Vgl. Bd. I, § 42 der 1ten, § 46 der 2ten Auflage.)

31. Es sei ein verzweigtes System der Art gegeben, wie es in Figur 143 angedeutet ist. Ein Zweig 0 enthalte eine elektromotorische Kraft. Deren Strom J_0 möge in der Pfeilrichtung fließen. Bei a muß er sich verzweigen in die zwei Zweige 1 und 3, die sich in den Zweigen 2, 4 fortsetzen und bei b wieder vereinigen. Durch einen Zweig 5 sollen bei c und d diese beiden Zweige noch überbrückt sein. Der Endpunkt d des Zweiges 5 ist auf dem Zweige 3, 4 verschiebbar.

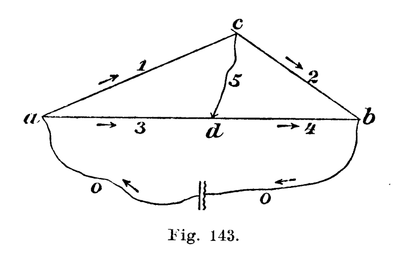


Fig. 143.

Verschieben wir den Punkt d nahe an a hinan, so wird offenbar ein Strom von d nach c in Zweig 5 fließen. Verschieben wir ihn nahe an b hinan, wird ein umgekehrter Strom, d. h. von c nach d fließen. Dazwischen wird es aller Voraussicht nach eine Stellung von d zwischen a und b geben, die so liegt, daß in 5 überhaupt kein Strom fließt. Diese Stellung setzen wir als erreicht voraus.

Wir bezeichnen die Stromstärken und Widerstände der einzelnen Zweige mit den Indizes derselben. Dann ist also

$$J_5 = 0.$$

32. Das erste Kirchhoffsche Gesetz (Gleichung (11)) ergibt

$$J_1 + J_2 + J_5 = 0, \quad \text{also} \quad J_1 + J_2 = 0,$$

1) Gustav Robert Kirchhoff ist am 12. März 1824 in Königsberg geboren und am 17. Oktober 1887 in Berlin gestorben. Er habilitierte sich 1847 in Berlin, wurde 1850 außerordentlicher Professor der Physik in Breslau, 1854 ordentlicher Professor in Heidelberg und 1874 in Berlin. Die genannten Gesetze fand Kirchhoff als Student im Jahre 1845.

wenn wir von c ausfließende Ströme positiv rechnen. Rechnen wir sie in der Pfeilrichtung positiv, so folgt

(13) $$J_1 = J_2,$$
ebenso
(14) $$J_3 = J_4.$$

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz (Gleichung (12)) gibt, auf die Masche 1, 5, 3 angewandt und wieder die Ströme in den Pfeilrichtungen positiv gerechnet, da sich in dieser Masche keine elektromotorische Kraft befindet, und $J_5 = 0$ ist:

$$J_1 w_1 - J_3 w_3 = 0$$
$$J_1 w_1 = J_3 w_3.$$

Ebenso ergibt die Anwendung des zweiten Kirchhoffschen Gesetzes auf die Masche 2, 4, 5:

$$J_2 w_2 = J_4 w_4.$$

Division der zwei letzten Gleichungen, unter Berücksichtigung der Gleichungen (13), (14), gibt

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4.$$

33. Bestehen die zwei Zweige 3 und 4 aus Stücken desselben Drahtes von konstantem Querschnitt, so können wir auf sie die Gleichung (5b) in Nr. 9 anwenden. w_3 und w_4 werden dann den Längen l_3 und l_4 der Drähte proportional und es wird

$$w_1 : w_2 = l_3 : l_4.$$

Dies Ergebnis gestattet, die Vergleichung zweier Widerstände auf die zweier Längen zurückzuführen.

34. Die Einheiten (und damit die Dimensionen) der im letzten Abschnitte neu definierten Größen ergeben sich folgendermaßen:

a) Die Stromstärke ist die in der Zeiteinheit einen Querschnitt durchfließende elektrische Ladung. Ihre Einheit ist demnach eine Elektrizitätseinheit in einer Sekunde oder

$$J: \qquad 1 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ sec}^{-2}.$$

Die Technik braucht aus Zweckmäßigkeitsgründen eine $3 \cdot 10^9$ mal so große Einheit und nennt diese ein „Ampère“

$$J: \qquad 1 \text{ Amp} = 3 \cdot 10^9 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{3}{2}} \text{ sec}^{-2}.$$

Die Stromdichte ergibt sich hieraus einfach durch Division mit der Fläche. Ihre Einheit ist demnach

$$i: \qquad 1 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{-\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-2}$$

b) Die Einheit der Leitfähigkeit können wir am zweckmäßigsten aus Gleichung (1) ermitteln. Sie ergibt:

$$\lambda = \frac{i}{E}.$$

Die Einheit der Leitfähigkeit ist die Einheit der Stromdichte dividiert durch die Einheit der Feldintensität. Das gibt

λ: 1 sec^{-1}.

c) Hieraus folgt als Einheit des elektrischen Widerstandes nach Gleichung (5b)

w: $1 \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{+1}$.

Der Widerstand hat die Einheit und Dimensionen einer reziproken Geschwindigkeit.

Die Technik braucht wieder eine andere Einheit, das „Ohm". Es ist

$$1 \text{ Ohm } (1\ \Omega) = \tfrac{1}{9} \cdot 10^{-11} \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{+1}.$$

d) Die Einheit der elektromotorischen Kraft ist die des Potentials (der Potentialdifferenz)

K: $1 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}$

und die in der Technik gebräuchliche Einheit

$$1 \text{ Volt} = \tfrac{1}{300} \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1}.$$

e) Die Energie, die ein Strom in einer Zeit t sec abgibt, und die keineswegs immer als Joulesche Wärme auftritt, muß die Einheit der mechanischen Energie besitzen. In der Tat folgt, da nach Gleichung (6) diese Energie durch $J^2 wt$ gegeben ist, unter Berücksichtigung der Einheiten für J und w, als Einheit der Stromenergie:

Qt: $1 \text{ gr cm}^3 \text{ sec}^{-4} \cdot \text{cm}^{-1} \text{ sec} \cdot \text{sec} = 1 \text{ gr cm}^2 \text{ sec}^{-2} = 1 \text{ Erg}$.

Die in der Zeiteinheit abgegebene Energie, die „Leistung" des Stromes hat die Einheit

Q: $1 \frac{\text{Erg}}{\text{sec}} = 1 \text{ gr cm}^2 \text{ sec}^{-3}$.

Die Technik braucht für die Stromenergie die 10^7-fache Einheit, und nennt sie ein „Joule".

$$1 \text{ Joule} = 10^7 \text{ Erg}.$$

Ebenso gebraucht sie für die Leistung die 10^7-fache Einheit, ein „Watt".

$$1 \text{ Watt} = 10^7 \text{ gr cm}^2 \text{ sec}^{-3}.$$

Aus dieser technischen Einheit der Leistung leiten sich dann wieder andere praktische Einheiten der Stromenergie, die „Wattstunde“ und die „Kilowattstunde“ ab, deren Erklärung schon im Namen liegt.

Die sämtlichen bisher durch gr, cm und sec ausgedrückten Einheiten bilden das „Gaußsche absolute Maßsystem“.

§ 38. Das statische Magnetfeld.

1. Mit dem elektrischen Felde ist das magnetische Feld verwandt, so daß wir die vorigen Betrachtungen mit gewissen Einschränkungen direkt für die Theorie des Magnetismus übernehmen können. Es gilt das Coulombsche Gesetz, aus dem wir die Begriffe

Magnetische Feldintensität H,
Magnetische Mengen m,
Diamagnetisierungskonstante, gewöhnlich „Permeabilität“ genannt, μ,
Magnetische Energie $W^{(m)}$

ableiten können. Weiter können wir ein magnetisches Potential ψ und eine magnetomotorische Arbeit (§ 31, 8.)

$$A_m = \sum H_s s$$

und den Kraftlinienfluß durch eine geschlossene Oberfläche (§ 30, 3.)

$$\sum_0 \mu H_r do = \sum m$$

definieren.

Die Einheiten wählen wir ebenso wie die elektrischen Einheiten. Die Einheit der magnetischen Feldintensität heißt kurz „ein Gauß“.

In diesen Einheiten ausgedrückt heißen die genannten Größen, wie die elektrischen, im „Gaußschen absoluten Maßsystem“ gemessen.

2. Folgende Abweichungen vom elektrischen Felde zeigt das magnetische Feld.

a) Wahre magnetische Mengen (vgl. § 35, 17.), also magnetische Ladungen, die in einem Raume, der ohne sie kein Magnetfeld besitzt, ein solches erzeugen, existieren nur und können nur in merklichem Betrage in einer ganz beschränkten Zahl von Körpern erzeugt werden, in Stahl und in Magneteisenstein, in geringem Betrage auch in Eisen.

Dagegen treten induzierte Ladungen in allen Körpern unter den dem § 35 entsprechenden Verhältnissen und auch nach denselben Gesetzen auf.

b) Die Summe aller (wahren und induzierten) magnetischen Mengen eines abgeschlossenen Körpers ist immer gleich Null.

Die wahren magnetischen Mengen stimmen darin mit den influenzierten elektrischen Ladungen (§ 35, 18.) überein. Das magnetische Feld wird sich danach immer so verhalten, wie das Zusatzfeld des § 35, ohne aber ein solches zu sein.

Auch die Summe der dort besprochenen influenzierten Ladungen in einem ganzen Körper war immer gleich Null. Und wenn wir einen solchen auseinander brechen, wird jeder seiner Teile wieder die Ladungssumme Null besitzen.

c) Es gibt Körper, deren Permeabilität μ kleiner ist, als die des Vakuums μ_0 (vgl. § 27, 5.). Man nennt solche Körper diamagnetisch. Dies Verhalten zeigen sogar weitaus die meisten Körper. Für Wasser ist z. B.

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 0{,}9999902.$$

Körper, bei denen $\mu > \mu_0$ ist, heißen „paramagnetisch".

Es gibt andere Körper, bei denen μ extrem hohe Werte annimmt, z. B. bei Eisen (μ ungefähr 1000), Stahl ($\mu = 30$ bis 200), ferner nach F. Heusler Legierungen von Mangan, Aluminium und Kupfer (μ bis ca. 200). Diese Körper heißen ferromagnetisch. Die Permeabilität selber ist aber bei ihnen eine Funktion der Feldintensität.

d) Es gibt keine Leiter für den Magnetismus, und damit auch keine magnetischen Ströme und streng genommen kein vollständiges Magnetfeld außer dem unendlichen Raume.

3. Ein mit magnetischen Mengen behafteter Stahlkörper heißt ein Magnet (permanenter Magnet, im Gegensatz zu einem durch Influenz magnetisierten Körper, der temporärer Magnet heißt). Man erhält einen solchen, indem man ein Stahlstück in ein Magnetfeld hinein bringt. Von der influenzierten Ladung dieses Feldes (§ 35, 17.) bleibt ein Teil gleichsam als wahre Ladung zurück, wenn wir das magnetisierende Feld entfernen.

Diese wahre Ladung, ϱ, erzeugt ein neues Feld, und dieses Feld in dem Stahlkörper selber eine induzierte Ladung ϱ'. Wir können dem Stahlkörper die Permeabilität seiner Umgebung zuschreiben, wenn wir $\varrho + \varrho'$ als die wahre Ladung ansehen, wie wir auch das Zusatzfeld Z in § 35, 14. in einem Raume von konstanter Dielektrizitätskonstante annehmen mußten. Das gilt aber nur für die Berechnung eines vorliegenden statischen Feldes. Ändert sich das Feld, z. B. durch Einführung eines zweiten Magneten, so wird sich ϱ' um einen Betrag ϱ'' ändern, und ϱ'' ist von der Permeabilität des Stahl-

magneten abhängig. ϱ, ϱ', ϱ'' genügen alle dem Gesetz $\Sigma\varrho = 0$, wenn man über den ganzen Stahlmagneten summiert.

Die Ladungen ϱ aber sind auch im Innern des Stahlmagneten denkbar, während ϱ', ϱ'' nur auf seiner Oberfläche möglich sind (§ 35, 16.).

4. Den positive Ladungen enthaltenden Raum zerlegen wir in unendlich kleine Raumelemente $\Delta\tau$ (Fig. 144). Ein solches wird dann eine Ladung

$$\varrho\,\Delta\tau + \sigma\,\Delta o = + m$$

besitzen, wenn ϱ die räumliche, σ die Flächendichte, Δo ein durch $\Delta\tau$ aus einer geladenen Fläche ausgeschnittenes Flächenelement bedeutet. Von den beiden Summanden kann auch einer fehlen.

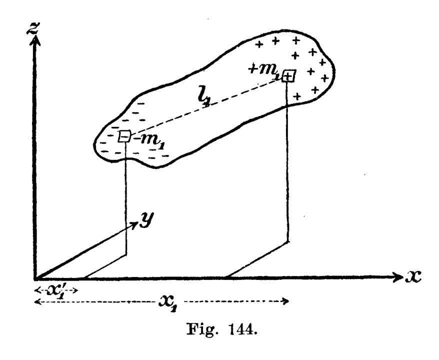


Fig. 144.

Jeder solchen Ladung $+m$ können wir eine gleich große negative $m' = -m$ des negativ geladenen Raumteiles entsprechen lassen, und $-m$ wird sich ebenfalls in einem unendlich kleinen Raumteil befinden. Der Abstand zweier solcher sich entsprechenden Ladungen $+m_1$, $m_1' = -m_1$ heiße l_1. Dann nennen wir

$$M_1 = m_1 l_1$$

das „magnetische Moment“ des Polpaares $+m_1$, $-m_1$ (Fig. 144), m_1, m_1' heißen „Pole“ dieses Paares.

5. Wir fassen M_1 als einen Vektor auf, der die Richtung von l_1 und zwar im Sinne von $-m_1$ und $+m_1$ hat. In einem beliebigen Koordinatensystem x, y, z hat dieser Vektor dann die Komponenten

$$M_{1x} = m_1 l_1 (\cos \widehat{xl}) = m_1(x_1 - x_1'),$$
$$M_{1y} = m_1(y_1 - y_1'),$$
$$M_{1z} = m_1(z_1 - z_1'),$$

oder

$$M_{1x} = m_1 x_1 + m_1' x_1' = \sum_{m_1, m_1'} m x$$

u. s. w.

Die geometrische Summe

(1) $$M = \sum_{+} m\, l$$

über alle vorhandenen positiven Massen summiert heißt das magnetische

Moment des ganzen Magneten. M ist wieder eine Vektorgröße, die nach drei gegebenen Kordinatenrichtungen die Komponenten besitzt:

$$
\begin{aligned}
M_x &= \sum m x, \\
M_y &= \sum m y, \\
M_z &= \sum m z,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

worin die Summierung über alle, auch die negativen Massen zu erstrecken ist, weil $+m(x-x') = (+m)x + (-m)x'$ ist. Von der Lage des Nullpunktes des Koordinatensystems sind die Ausdrücke $\Sigma m x$ unabhängig. Denn nehmen wir an, wir verschieben den Nullpunkt um eine Strecke l_0 mit den Komponenten x_0, y_0, z_0, so wird

$$M_x = \sum m(x + x_0),$$

und da x_0 für alle m denselben Wert besitzt,

$$M_x = x_0 \sum m + \sum m x.$$

Es ist aber $\Sigma m = 0$, also

$$M_x = \sum m(x + x_0) = \sum m x$$

von der ausgeführten Nullpunktverschiebung unabhängig. Dasselbe gilt von M_y und M_z.

Die Ausdrücke (2) sind außerdem auch von der Einteilung der ganzen Ladung in Elemente unabhängig, wenn die Elemente nur hinreichend klein sind. Denn eine weitere Unterteilung z. B. der negativen Elementarladungen verändert das Resultat nicht mehr. Auch die Zuordnung von einem $-m$ zu einem $+m$ ist beliebig, da so wie so über alle mx summiert wird. Wir können überhaupt jetzt von einer solchen Zuordnung absehen.

Die Richtung des Vektors M heißt die Achse des Magneten.

6. Es sei ein Stahlmagnet gegeben, dessen magnetisches Potential und magnetische Feldintensität wir in einem gegen seine Dimensionen sehr fernen Punkte P berechnen wollen. Wir greifen ein Polpaar $+m_1$, $-m_1$ heraus (Fig. 145). Dieses liefert uns in P das Potential

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{m_1}{4\pi\mu r_1} - \frac{m_1}{4\pi\mu r_2} \\
&= -\frac{m_1}{4\pi\mu} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$r_1 - r_2 = l_1 \cos\vartheta_1,$$

wenn r_1, r_2 sehr groß gegen den Abstand l_1 der zwei Pole sind; denn

fällen wir von $-m_1$ und $+m_1$ die Lote auf die Verbindungslinie r von P mit dem Mittelpunkte von l_1 (Fig. 145), die mit l_1 den spitzen Winkel ϑ_1 einschließen möge, so sieht man, daß

$$\frac{l_1}{2} \cos \vartheta_1 = r - r_2 \cos(r r_2),$$

$$\frac{l_1}{2} \cos \vartheta_1 = r_1 \cos(r_1 r) - r$$

wird. Mit wachsendem r, also ferner rückendem P wird $\cos(r r_2) = \cos(r_1 r) = 1$, und durch Addition der beiden Gleichungen folgt die vorige. (In der Figur ist l_1 und ϑ_1 mit l und ϑ bezeichnet.) Danach wird

Fig. 145.

$$\psi_1 = -\frac{m_1 l_1 \cos \vartheta_1}{4\pi\mu r^2}$$
$$= -\frac{M_1 \cos \vartheta_1}{4\pi\mu r^2}.$$

$M_1 \cos \vartheta_1$ ist die Projektion von M_1 auf den Strahl r.

Sämtliche Polpaare des Stahlmagneten zusammengenommen liefern daher in einem gegen die Ausmessungen des Stahlmagneten großen Abstande ein Potential

(3) $$\psi = \sum \psi_1 = -\frac{M \cos \vartheta}{4\pi\mu r^2},$$

da $M \cos \vartheta = \Sigma m_1 \cos \vartheta_1$ ist. M ist das magnetische Moment des Stahlmagneten, r der von P nach dem Magneten (seinem Mittelpunkte) hin gezogene Strahl, ϑ der Winkel dieses Strahls gegen die Achse des Magneten.

7. Wir bestimmen drei zueinander senkrechte Komponenten der Feldintensität aus ψ nach § 31, Gleichung (4). Es sei jetzt l in Figur 145 die Richtung des resultierenden magnetischen Momentes M.

a) Verschieben wir den Punkt P unendlich wenig normal zur Zeichenebene, so wird dadurch weder ϑ noch r geändert. ψ bleibt konstant und die Feldintensität hat keine Komponente normal zur Zeichenebene. Die Feldintensität fällt der Richtung nach in die Ebene von r und l.

b) Wir verschieben P längs r um Δr. ϑ bleibt ungeändert. ψ nimmt ab um

$$\Delta^r(\psi) = -\frac{M \cos \vartheta}{4\pi\mu r^2} + \frac{M \cos \vartheta}{4\pi\mu(r+\Delta r)^2}$$
$$= -\frac{M \cos \vartheta}{4\pi\mu} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2\left(1 + 2\frac{\Delta r}{r}\right)}\right),$$

wenn wir das Quadrat von $\Delta r / r$ vernachlässigen.

Es ist aber

$$\frac{1}{1+2\frac{\Delta r}{r}} = \frac{1-2\frac{\Delta r}{r}}{\left(1+2\frac{\Delta r}{r}\right)\left(1-\frac{2\Delta r}{r}\right)} = \frac{1-2\frac{\Delta r}{r}}{1-\left(\frac{2\Delta r}{r}\right)^2} = 1 - \frac{2\Delta r}{r},$$

da wir wieder das quadratische Glied im Nenner vernachlässigen dürfen. Demnach wird

$$\Delta^r(\psi) = -\frac{2M\cos\vartheta\,\Delta r}{4\pi\mu r^3},$$

und die Komponente der Feldintensität nach r

$$H_r = -\frac{2M\cos\vartheta}{4\pi\mu r^3}. \tag{4}$$

c) Wir verschieben unter Konstanthaltung von r den Punkt P in der Zeichenebene um Δs, so daß sich ϑ um $\Delta\vartheta = \Delta s/r$ vergrößert.

Es verändert sich ψ um

$$\Delta^\vartheta(\psi) = -\frac{M\cos\vartheta}{4\pi\mu r^2} + \frac{M\cos(\vartheta+\Delta\vartheta)}{4\pi\mu r^2}.$$

Da $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\alpha+\beta)/2 \cdot \sin(\alpha-\beta)/2$ ist, so ist

$$\cos\vartheta - \cos(\vartheta+\Delta\vartheta) = 2\sin\left(\vartheta+\frac{\Delta\vartheta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\vartheta}{2},$$

und wenn $\Delta\vartheta$ hinreichend klein ist,

$$= \sin\vartheta\cdot\Delta\vartheta.$$

Danach wird

$$\Delta^\vartheta(\psi) = -\frac{M\sin\vartheta\,\Delta s}{4\pi\mu r^3}$$

und die Komponente von H in der Richtung von Δs

$$H_s = -\frac{M\sin\vartheta}{4\pi\mu r^3}. \tag{5}$$

8. Die resultierende Feldintensität wird demnach

$$H = \sqrt{H_r^2 + H_s^2} = \frac{M}{4\pi\mu r^3}\sqrt{1+3\cos^2\vartheta}. \tag{6}$$

Die Gleichungen (4), (5), (6) gestatten, den Kraftlinienverlauf in allen fernen Punkten zu zeichnen. Speziell ergibt sich

1. Hauptlage: In der Verlängerung der magnetischen Achse wird $\vartheta = 0$, also $H_s = 0$,

$$H = H_r = -\frac{2M}{4\pi\mu r^3}.$$

2. Hauptlage: In einer auf der magnetischen Achse am Orte des Magneten senkrechten Ebene wird $\vartheta = \pi/2$, $H_r = 0$,

$$H = H_s = \frac{-M}{4\pi\mu r^3}.$$

Die Kraftlinien laufen hier parallel der magnetischen Achse, im Sinne $+m$ gegen $-m$.

Aus allen diesen Gleichungen geht hervor, daß wir einen Stahlmagneten bezüglich seines Feldes in fernen Punkten durch ein Polpaar von dem magnetischen Moment M ersetzen können.

Ein Bild von dem Kraftlinienverlauf eines parallelepipedischen Magneten gibt die Figur 146, die mittels Eisenfeilspänen hergestellt ist.

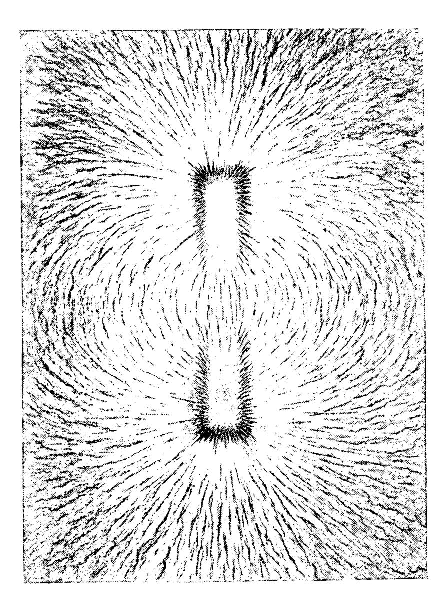


Fig. 146.

9. Bringen wir in ein homogenes Magnetfeld, d. h. ein Magnetfeld, das überall nach Richtung und Größe konstant ist (z. B. das Magnetfeld der Erde, Nr. 10), ein Polpaar, dessen Ladungen m so klein gedacht seien, daß sie das Feld nicht merklich ändern, so erfährt der positive Pol eine Kraft in Richtung der Kraftlinien von der Größe Hm, der negative Pol eine solche in entgegengesetzter Richtung von gleicher Größe. Es wirkt auf das Polpaar ein Kräftepaar, und das Polpaar steht unter der Wirkung eines Drehmomentes

$$D = Hml \cos\psi = Hml \sin\varphi,$$

Fig. 147.

da $l \cos\psi$ der Abstand der beiden parallelen Kräfte ist (Fig. 147). φ bedeutet den Winkel zwischen der Achse l des Polpaares und der Kraftlinienrichtung. Es ist

$$D = HM\frac{2s}{l},$$

und wenn φ innerhalb kleiner Grenzen $+\alpha > \varphi > -\alpha$ bleiben muß, so ist s identisch mit dem Bogen AD anzusehen.

Es sei R das Trägheitsmoment des Körpers, der das Polpaar trägt. Dann wird nach § 19, 5. die Winkelbeschleunigung

$$\varphi'' = 2\frac{HM}{Rl}s,$$

die Beschleunigung jedes der beiden Pole also (§ 19, 3.)

$$p = \varphi''\frac{l}{2} = \frac{HM}{R}s.$$

Die Beschleunigung ist proportional mit dem Abstand des Poles von einer festen Lage. Eine solche Beschleunigung kann, wie aus der Analogie des mathematischen Pendels § 17, D folgt, eine Schwingung des Magneten zur Folge haben, und deren Schwingungsdauer muß sich nach § 17, 15. ergeben zu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{HM}}. \tag{7}$$

10. Die Erde ist von einem magnetischen Felde umgeben, das innerhalb eines die Dimensionen eines Laboratoriums weit übertreffenden Raumes als homogen angesehen werden darf. Die Kraftlinien dieses Feldes sind gegen den Horizont geneigt. Der Neigungswinkel heißt die „magnetische Inklination". Von besonderer Wichtigkeit ist die Horizontalkomponente dieses Erdfeldes, die „Horizontalintensität", da von ihr die Schwingungen eines nur um die Vertikalachse drehbaren Magneten (Kompaß) abhängig sind. Diese Horizontalkomponente weicht um einige Grade von der geographischen Nordsüdrichtung (in unseren Gegenden nach Westen) ab um einen Winkel, der die „magnetische Deklination" heißt. Diese erdmagnetischen Größen sind von der geographischen Lage eines Ortes abhängig. So nehmen sie z. B. die folgenden Werte an[1]):

In	Horizontal-intensität	Inklination	Deklination
Königsberg	0,184 Gauß	67,4°	5,5°
Berlin	0,189 „	66,4°	9,3°
Heidelberg	0,199 „	64,5°	11,5°
Straßburg	0,203 „	64,0°	11,9°

1) Die ersten und bedeutendsten Untersuchungen über den Erdmagnetismus stammen von Gauß, in dem Werke von Gauß und Weber: „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins" niedergelegt. Dieser Verein war von den beiden Verfassern gegründet und von 1837—1843 tätig. Im Jahre 1833 hatten sie das erste erdmagnetische Observatorium in Göttingen errichtet. Jetzt existieren deren über hundert. (Vgl. Winkelmann, Handbuch der Physik, Bd. V. I., Seite 474, 1905.)



11. Ein um eine vertikale Achse drehbarer Magnet stellt sich in die Richtung der Horizontalintensität ein. Danach hat man den (nahezu) nach Norden weisenden Pol der „Magnetnadel" den „Nordpol" derselben genannt. Dieser Nordpol trägt die von uns als „positive magnetische Menge" definierte Ladung, die man kurz als „nordmagnetische" Ladung bezeichnet. Es liegt in dieser Bezeichnungsweise eine Inkonsequenz, die, da sich ungleichnamige Ladungen anziehen, zu dem Resultat führen würde, daß im Norden der Erde sich ein magnetischer Südpol befindet. Die Engländer haben diese Inkonsequenz vermieden, indem sie das nach Norden weisende Ende der Nadel als Südpol oder (also entgegengesetzt unserer Definition) als negativen Pol bezeichnen.

Die Gleichungen (6) (speziell die für die beiden Hauptlagen geltenden Formen) und (7) enthalten die Hilfsmittel zur Berechnung der Horizontalintensität nach einer von Gauß angegebenen Methode.

12. Es ist zweckmäßig, für das Magnetfeld noch einige Begriffe einzuführen, die wir Analogien mit den elektrischen Strömen entnehmen. Wir wollen im folgenden annehmen, daß die wahren magnetischen Ladungen, die Ladungen in Stahlmagneten, konstant bleiben. Wir greifen eine vollständige Elementarkraftröhre heraus, die also bei wahren positiven Ladungen entspringt, bei negativen endet. q sei der unendlich kleine Querschnitt derselben. Dann ist $\mu H q = \mathfrak{H} q = J_m$ die Kraftlinienzahl der Röhre und als solche über die ganze Röhre konstant. Es sei $\psi_a - \psi_b$ die Potentialdifferenz an zwei Querschnitten, so daß nach § 31, 8.

$$\psi_a - \psi_b = \sum_a^b H\,dl$$

ist. Dann folgt also

$$\psi_a - \psi_b = J_m \sum_a^b \frac{dl}{q\mu}. \tag{8}$$

Diese Summe ist aber (§ 37, 10., Gleichung (5a)) ebenso gebaut, wie der elektrische Widerstand des Kraftröhrenstückes, nur daß statt der Leitfähigkeit λ die Permeabilität μ eintritt. Das J_m ist dasselbe, was wir früher bereits als Kraftlinienfluß bezeichnet haben. Wir wollen jetzt

$$w_m = \sum_a^b \frac{dl}{q\mu} \tag{9}$$

als „magnetischen Widerstand" der Kraftröhre bezeichnen, indem wir μ als eine Art Leitfähigkeit für die magnetischen Kraftlinien auffassen.

Für ein unendlich kurzes Stück der Kraftröhre wird der Widerstand

$$w_m = \frac{dl}{q\mu},$$

und es besteht somit allgemein zwischen der Potentialdifferenz zweier beliebiger Niveauflächen und dem Kraftlinienfluß eines zwischen ihnen gelegenen Kraftröhrenstückes endlicher Dimensionen dann die durch § 37, Gleichungen (4), (5) ausgedrückte Relation.

Die gleichen Definitionen lassen sich auch für elektrische Kraftröhren durchführen. Das dem w_m entsprechende w_e heißt dann (nach Drude) der „dielektrische Widerstand". Da die elektrischen Kraftlinien in der Technik keine solche Rolle spielen, sieht man gewöhnlich von der Definition des Widerstandes elektrischer Kraftröhren ab.

13. Die magnetische Energie der Kraftröhre ist $\frac{1}{2}\Sigma\mu H^2 \varDelta\tau$ (§ 36, 13.), wo $\varDelta\tau = q\varDelta l$ gesetzt werden kann. Da $\mu Hq = J_m$ konstant über die ganze Röhre und $\Sigma H \varDelta l = \psi_1 - \psi_2$ ist, so folgt nach (8) und (9)

(10) $$W_m = \tfrac{1}{2} J_m^2 w_m,$$

und J_m ist die Anzahl der Kraftlinien in der Kraftröhre, also der Teil der magnetischen Ladung, von dem die Kraftröhre ausgeht. Diese Gleichung hat, abgesehen von dem Faktor $\frac{1}{2}$, ebenfalls dieselbe Form, wie die von einem elektrischen Strome in der Zeiteinheit abgegebene Energie.



Fünfter Abschnitt.

Elektromagnetismus.

§ 39. Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Kraftlinien.

1. Im Jahre 1819 entdeckte Oersted[1]), daß ein elektrischer Strom stets von einem Magnetfelde umgeben ist. Ampère[2]) hat ein Gesetz für die Richtung dieses Magnetfeldes aufgestellt und Biot und Savart[3]) haben das nach ihnen benannte quantitative Gesetz gegeben, das wir später kennen lernen werden. Die Versuche, umgekehrt aus magnetischen Vorgängen elektrische Ströme zu erzielen, führten Faraday[4]) 1831 zu der Entdeckung der „Volta“- und

1) Hans Christian Oersted, geboren 14. August 1777 in Rudkjöbing (Langeland), gestorben 9. März 1851 in Kopenhagen, war Professor der Physik in Kopenhagen.

2) André Marie Ampère, geboren 22. Januar 1775 in Lyon, gestorben 10. Juni 1836 in Marseille, war Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule und Professor der Physik am Collège de France in Paris, außerdem Mitglied der Akademie der Wissenschaften daselbst.

3) Jean Baptiste Biot, geboren 21. April 1774 in Paris, gestorben 3. Februar 1862 in Paris, war Professor der Physik am Collège de France und der Astronomie an der Fakultät der Wissenschaften zu Paris.

Felix Savart, geboren 30. Juni 1791 zu Mézières, gestorben 16. März 1841 in Paris, war Arzt in Straßburg, später Professor der Physik in Paris, zuletzt Conservator des physikalischen Kabinets im Collège de France.

4) Michael Faraday ist am 22. September 1791 zu Newington bei London als Sohn eines Hufschmieds geboren und am 25. August 1867 in Hampton Court bei Richmond gestorben. Faraday wurde mit 13 Jahren Lehrling bei einem Buchbinder und Buchhändler, wo er seine freie Zeit mit der Lektüre wissenschaftlicher Bücher und dem Anhören von Vorträgen, besonders bei Humphry Davy ausfüllte. 1813 wurde er durch dessen Vermittlung Assistent am Laboratorium der Royal Institution. Nach einer anderthalbjährigen Reise mit Davy hielt er 1816 seine ersten Vorlesungen. 1824 wurde er Mitglied der Royal Society, 1827 Professor an der Royal Institution. Seine berühmte Entdeckung der Induktion, zu deren Erklärung er den Begriff der Kraftlinien geschaffen hat, fällt in das Jahr 1831. (J. Tyndall, Faraday as a discoverer. London. 5. Aufl. 1894.)

„Magnetoinduktion", die darin bestehen, daß eine Veränderung eines Magnetfeldes in einem geschlossenen Leiterkreise einen elektrischen Strom verursacht. Rührt das veränderliche Magnetfeld von Strömen her, so heißt die Erscheinung Voltainduktion, rührt sie von Magneten her, Magnetoinduktion.

2. Das von Faraday geschaffene Kraftlinienbild hat ihn zu einem quantitativen Gesetze dieser Induktionserscheinungen geführt. Der in einem linearen Leiterkreise induzierte Strom wird sich nach dem Ohmschen Gesetz aus einer elektromotorischen Kraft ableiten. Die vom Leiterkreise umspannte Fläche ist von magnetischen Kraftlinien durchsetzt, und die Anzahl dieser Kraftlinien ändert sich, wenn sich das Magnetfeld ändert, in dem sich der Leiterkreis befindet. Faraday nahm an, daß die in der Zeiteinheit erfolgende Änderung dieser Kraftlinienzahl proportional mit der den Strom verursachenden elektromotorischen Kraft sei. Denken wir uns die Änderung des Feldes dadurch verbildlicht, daß die Kraftlinien sich verschieben, also nicht am Orte verloren gehen, so wird sich die Änderung der Kraftlinienzahl, die den Leiterkreis durchsetzt, als die Kraftlinienzahl ergeben, die den Leiterkreis bei ihrer Verschiebung durchschneidet.

3. Aus diesem letzteren Bilde, das schon Faraday gehabt hat, wollen wir uns eine Verallgemeinerung schaffen, indem wir zunächst annehmen, daß nicht nur in Leitern eine elektromotorische Kraft oder Intensität induziert wird, sondern auch in Nichtleitern. Es soll ganz allgemein ein „elektrisches Feld" entstehen, wenn ein materieller Körper von magnetischen Kraftlinien durchschnitten wird.[1]) Dieses Feld ist, wenn der Körper ein Leiter ist, die Ursache eines elektrischen Stromes.

Umgekehrt soll aber auch, wenn ein materieller Körper von elektrischen Kraftlinien geschnitten wird, ein magnetisches Feld entstehen.

4. Die folgenden quantitativen Gesetze für diese beiden Annahmen erfüllen alle Erfahrungstatsachen.

Es sei E, H, v (Fig. 148) ein rechtwinkliges Koordinatensystem, und zwar in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

I. Es sollen sich elektrische Kraftlinien (εE), die die Richtung von E haben, in der Richtung v verschieben, so daß in der (unendlich klein gedachten) Zeiteinheit durch eine zu H parallele

1) Das Wort „Durchschneiden" soll hier und im folgenden im Sinne von „Durchwandern", also nicht einfach als ein Durchschneiden im geometrischen Sinne verstanden sein.



Längeneinheit die Anzahl n hindurchtritt. Dann ist zwangsweise damit ein magnetisches Feld parallel der Richtung H von der Größe

(I) $$H = \frac{n}{c}$$

verbunden, worin c eine universelle Konstante bedeutet. Das Feld H wird „induziert".

II. Verschieben sich magnetische Kraftlinien (μH), die die Richtung von H haben, in der Richtung v, so daß in der Zeiteinheit durch eine zu E parallele Längeneinheit m Kraftlinien hindurchtreten, so wird parallel der Richtung E ein elektrisches Feld

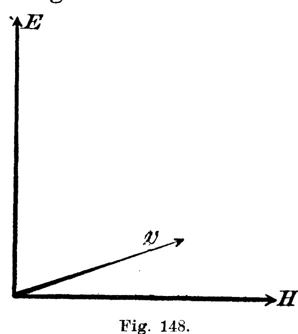


Fig. 148.

(II) $$E = \frac{m}{c}$$

induziert. c ist dieselbe Konstante, wie in (I).

5. Haben im Falle I die Kraftlinien εE, im Falle II die Kraftlinien μH nicht die Richtung normal zu v, wie hier angenommen, so ist zunächst die zu v in der vE-Ebene resp. in der vH-Ebene normale Komponente der Kraftlinienzahl zu bilden und in die Gleichungen (I), (II) einzusetzen.

6. Ist $\mathfrak{E}_n$ die Dichte der Kraftlinienzahl n, in richtiger Komponente, so ist, wenn v ihre Wanderungsgeschwindigkeit bedeutet,

(1) $$n = \mathfrak{E}_n v.$$

Das erkennt man aus Figur 149. Es sei AB die von den Kraftlinien durchschnittene Längeneinheit, normal zu v, und wir bilden ein Rechteck aus AB und v, $ABCD$. Auf der Fläche dieses Rechtecks fußen $\mathfrak{E}_n v$ Kraftlinien. Da v qcm der Flächeninhalt desselben ist, und da die Kraftlinien die Geschwindigkeit v haben, so werden gerade die Kraftlinien, die diese Fläche $ABCD$ erfüllen, in der Zeiteinheit durch AB hindurchtreten.

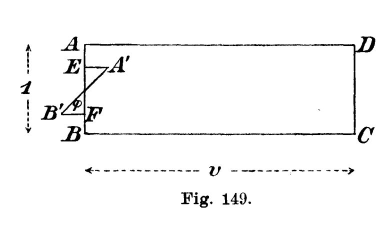


Fig. 149.

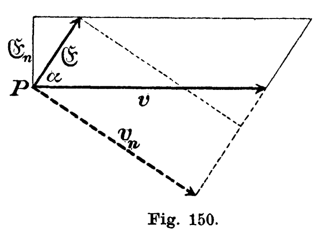


Fig. 150.

7. Aus Figur 150 erkennt man eine geometrische Deutung, die man dem Produkt $\mathfrak{E}_n v$ geben kann. Da $\mathfrak{E}_n$ die Projektion von $\mathfrak{E}$ auf

die zu v normale Gerade der vE-Ebene bedeutet, wenn wir $\mathfrak{E}$ als Länge aufgetragen denken, so ist $\mathfrak{E}_n v$ der Flächeninhalt des Parallelogramms aus $\mathfrak{E}$ und v. Es ist

$$\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E} \sin \alpha,$$

$$n = \mathfrak{E} v \sin \alpha = [\mathfrak{E} v], \tag{2}$$

wenn wir mit den eckigen Klammern die Bildung des Flächeninhaltes andeuten.

Statt $\mathfrak{E}$ auf die Normale zu v zu projizieren, können wir auch v auf die Normale zu $\mathfrak{E}$ projizieren (Fig. 150), und es wird

$$n = \mathfrak{E} v_n. \tag{3}$$

$\mathfrak{E} v_n$ ist aber die Anzahl $\mathfrak{E}$-Linien, die die Fläche $ABCD$ (Fig. 149) durchsetzt und es folgt, daß wir auch jetzt noch, wenn $\mathfrak{E}$ gegen v geneigt ist, die Anzahl Kraftlinien in (I) einsetzen dürfen, die in der Zeiteinheit die Linieneinheit AB durchschneidet, daß wir also nicht die Komponente von $\mathfrak{E}$ normal zu v zu bilden brauchen. Das steht in direktem Zusammenhange mit dem in § 29, 7. über die Kraftliniendichte Gesagten.

8. Die Längeneinheit, die von den Kraftlinien n durchschnitten wird, ist normal zu der Ev-Ebene zu legen. Dann liefert (I) die resultierende Feldintensität H. Die Komponenten von H erhalten wir in bekannter Weise.

Geben wir dieser Längeneinheit eine beliebige andere Richtung, z. B. $A'B'$ der Figur 149, die mit AB den Winkel φ einschließt, so muß das Magnetfeld nach dieser Richtung die Komponente haben

$$H_s = H \cos \varphi = \frac{n}{c} \cos \varphi. \tag{4}$$

Die Anzahl n' der Kraftlinien φ, die in der Zeiteinheit die Linie $A'B'$ durchsetzt, ist aber gleich der, die die Strecke EF, die Projektion von $A'B'$ auf AB, durchsetzt. Es ist $EF = A'B' \cos \varphi = AB \cos \varphi$ und deshalb

$$n' = n \cos \varphi.$$

Aus diesem und dem vorigen Abschnitt folgt dann

I'. Ist s eine beliebige Richtung und bewegen sich n elektrische Kraftlinien in einer beliebigen Richtung wandernd durch die Längeneinheit von s in der Zeiteinheit hindurch, so wird ein Magnetfeld induziert, das längs s die Komponente liefert:

$$H_s = \frac{n}{c} = \frac{[\mathfrak{E} v] \cos \varphi}{c}. \tag{I'}$$

$\mathfrak{E}$, s, v bilden ein Rechtssystem und es ist $\mathfrak{E} = \varepsilon E$ die elektrische Kraftliniendichte (Fig. 151).



II′. Analog ergibt II. die Verallgemeinerung: Wenn magnetische Kraftlinien sich in beliebiger Richtung so verschieben, daß eine zu s parallele Längeneinheit in der Zeiteinheit von m Kraftlinien geschnitten wird, so wird ein elektrisches Feld induziert, das längs s die Komponente besitzt:

$$\text{(II}'\text{)} \qquad E_s = \frac{m}{c} = \frac{[\mathfrak{H} v] \cos \varphi}{c}.$$

$\mathfrak{H}$, s, v ist ein Linkssystem (da H, E, v in Figur 148 ein solches ist). Hierin ist $\mathfrak{H} = \mu H$ die magnetische Kraftliniendichte (Fig. 152).

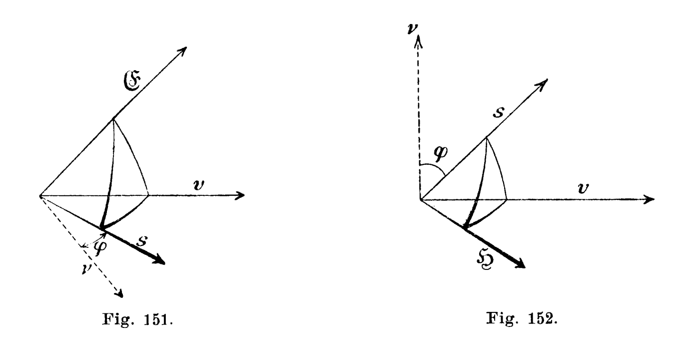


Fig. 151. Fig. 152.

In den Figuren 151, 152 ist ν die Normale zu der Ebene, die die bewegten Kraftlinien und die Bewegungsrichtung enthält. Längs dieser Linie liegt die resultierende Richtung des erzeugten Feldes.

9. Wir haben noch zu erörtern, was wir unter einer „Verschiebung“ von Kraftlinien verstehen. Wir setzen fest:

a) Die Kraftlinien haften an ihren Quellpunkten.

b) Die Quellpunkte haften — auch in Leitern — an der Materie.

c) Nur im Falle elektrischer Strömung verschieben sich die Quellpunkte in der Materie, dem Leiter.

d) Bei der Verschiebung eines Quellpunktes bleiben die nach Darstellung A, § 30, gezeichneten Kraftlinien sich parallel. Dieser Satz enthält eine Definition des Identitätsbegriffes von Kraftlinien und soll bedeuten: Hat sich ein Quellpunkt von einem Orte A nach einem Orte B verschoben, und ist l die Richtung einer Kraftlinie $\mathfrak{E}_1$ während seiner Lage in A, so ist eine zu l parallele Linie durch B als identisch mit der Kraftlinie $\mathfrak{E}_1$ anzusehen.

e) Gehören die zwei Endpunkte einer Kraftlinie Körpern an, die relativ zueinander bewegt sind, so tritt eine Schwierigkeit dadurch ein, daß wir nicht aussagen können, welche Geschwindigkeit wir den dazwischen gelegenen Teilen der Kraftlinie zuschreiben sollen. Wir setzen daher fest: Die Kraftliniendarstellung A (§ 30), die von

jedem Ladungselement die Kraftlinien in den umgebenden Raum radial und gleichförmig hinaustreten läßt, liefert das richtige Resultat.

Hierzu läßt sich der folgende Zusatz beweisen:

10. Wenn zwei oder mehr Quellpunkte sich so bewegen, als ob sie starr miteinander verbunden wären, so daß sie also mit den Systemen ihrer Kraftlinien einen starren Körper zu bilden scheinen, dann dürfen wir die Resultierenden ihrer Kraftlinien bilden und in die Gleichungen (I), (II) einsetzen.

Das heißt, wir können für die Kraftlinien dieser Quellpunkte die Darstellungen B oder C (§ 30) wählen.

Wir beweisen dies für zwei elektrische Ladungen, d. h. wir beweisen, daß sich das Resultat nach I. identisch berechnet, ob wir die Kraftlinien jeder der beiden Ladungen für sich in Gleichung (I) einsetzen und die beiden Magnetfelder zu einer Resultierenden zusammensetzen, oder ob wir die resultierenden elektrischen Kraftlinien in (I) einsetzen und daraus das Magnetfeld berechnen. Für mehr als zwei Ladungen folgt dieser Satz dann durch vollständige Induktion.

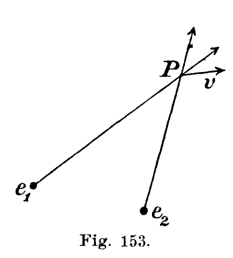


Fig. 153.

Bewegen sich zwei Ladungen e_1, e_2 mit ihren Kraftlinien so, als ob sie starr miteinander verbunden wären, so heißt das: In einem beliebigen Punkte P besitzt die von e_1 ausgehende Kraftlinie $(\overline{e_1 P}$ in Fig. 153) nach Größe und Richtung dieselbe Geschwindigkeit, wie die von e_2 ausgehende $(\overline{e_2 P})$. Auch die Resultierende dieser beiden Kraftlinien wird diese selbe Geschwindigkeit besitzen, wenn wir sie starr mit e_1 und e_2 verbunden denken.

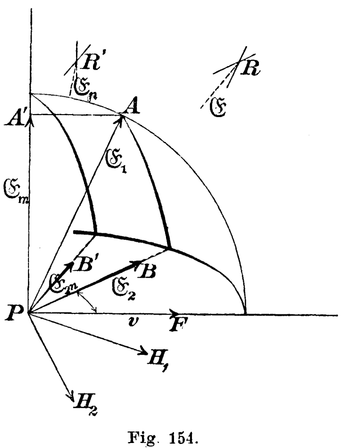


Fig. 154.

11. Es sei $PF = v$ (Fig. 154) diese gemeinschaftliche Geschwindigkeit. $PA = \mathfrak{E}_1$ und $PB = \mathfrak{E}_2$ mögen die Kraftlinien, die von e_1 und e_2 herrühren, nach Dichte und Richtung bedeuten. $PR = \mathfrak{E}$ sei die resultierende Kraftliniendichte. $PA' = \mathfrak{E}_{1n}$, $PB' = \mathfrak{E}_{2n}$, $PR' = \mathfrak{E}_n$ seien die im Sinne von Nr. 5 gebildeten Projektionen. Die Kraftlinien $\mathfrak{E}_1$ erzeugen ein Magnetfeld

$$H_1 = \frac{\mathfrak{E}_{1n} v}{c},$$

die Kraftlinien $\mathfrak{E}_2$ ein Magnetfeld

$$H_2 = \frac{\mathfrak{E}_{2n} v}{c},$$

die senkrecht zu den Ebenen $\mathfrak{E}_1, v$ und $\mathfrak{E}_2, v$ stehen (Fig. 154) Die Resultante $\mathfrak{E}$ würde ein Feld

$$H_r = \frac{\mathfrak{E}_n v}{c}$$

erzeugen, und es wäre zu beweisen, daß

$$H_r = H = H_1 + H_2$$

(geometrisch addiert) ist, daß also H_r die Resultante H von H_1 und H_2 ist.

Der Punkt R' ist die Projektion von R auf die zu v normale Ebene. Ebenso ist A' die Projektion von A, B' die von B in die gleiche Ebene. $PA'R'B'$ ist also die Projektion des Parallelogramms $PARB$ in diese Ebene, und deshalb ist

$$PR' = PA' + PB',$$
$$\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_{1n} + \mathfrak{E}_{2n},$$

geometrisch addiert, also $\mathfrak{E}_n$ die Resultante von $\mathfrak{E}_{1n}$ und $\mathfrak{E}_{2n}$.

H_1 und H_2 schließen miteinander den gleichen Winkel ein, wie $\mathfrak{E}_{1n}$ und $\mathfrak{E}_{2n}$, da sie auf diesen senkrecht stehen. H_1 ist nach seiner Länge das v/c-fache von $\mathfrak{E}_{1n}$, H_2 das v/c-fache von $\mathfrak{E}_{2n}$; das aus H_1 und H_2 gebildete Parallelogramm somit ähnlich dem aus $\mathfrak{E}_{1n}$ und $\mathfrak{E}_{2n}$ gebildeten, und deshalb die Resultante $H = H_1 + H_2$ das v/c-fache der Resultante $\mathfrak{E}_n$:

$$H = \frac{\mathfrak{E}_n v}{c},$$

also

$$H = H_r.$$

Außerdem sieht man auch leicht, daß H senkrecht auf $\mathfrak{E}_n$ steht, wie es die Gleichung (I) verlangt (Fig. 155), und damit ist der in Nr. 10 aufgestellte Satz bewiesen.

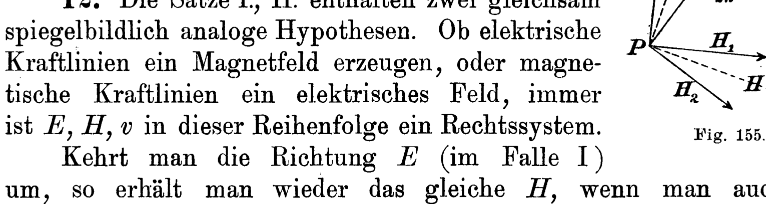


Fig. 155.

12. Die Sätze I., II. enthalten zwei gleichsam spiegelbildlich analoge Hypothesen. Ob elektrische Kraftlinien ein Magnetfeld erzeugen, oder magnetische Kraftlinien ein elektrisches Feld, immer ist E, H, v in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Kehrt man die Richtung E (im Falle I) um, so erhält man wieder das gleiche H, wenn man auch die Richtung von v umkehrt. Daraus folgt, daß es auch für das umgebende Magnetfeld gleichgültig ist, ob wir negative Elektrizität in der einen oder die gleiche Menge positiver in der entgegengesetzten

Richtung bei gleicher Geschwindigkeit bewegen. Bei elektrischen Strömen dürfen wir demnach auch hier (vgl. § 37, 3.) uns auf eine einzige Art von elektrischer Ladung beschränken.

Es folgt ferner:

Das elektrische Feld zweier bewegter elektrischer Ladungen kann sich unter Umständen an einem Punkte gerade kompensieren, z. B. wenn zwei gleiche Ladungen verschiedenes Vorzeichen haben und unendlich nahe beieinander liegen. Bewegen sich aber die Ladungen in entgegengesetzter Richtung, so werden die von ihren Kraftlinien erzeugten Magnetfelder sich gegenseitig verstärken. Das Entsprechende gilt natürlich für bewegte magnetische Mengen. So erklärt es sich z. B., daß ein Punkt in der Umgebung eines elektrischen Stromes das elektrische Feld Null besitzen kann, in diesem Punkte die elektrischen Kraftlinien aber doch ein Magnetfeld erzeugen.

13. Weiter können wir aus den Gleichungen (3) und (I) schließen, daß wir jede Elementarladung e durch eine beliebige andere ersetzen dürfen, wenn wir gleichzeitig deren Geschwindigkeit so ändern, daß ev den Wert nicht ändert; denn es ist $\mathfrak{E} v_n$ poroportional mit ev, wenn wir die Kraftliniendarstellung A (§ 30) wählen, da dann $\mathfrak{E}$ proportional mit e, v_n proportional mit v ist.

§ 40. Das Magnetfeld elektrischer Ströme.

1. Es sei ein linearer elektrischer Strom gegeben, der irgend eine geschlossene Leiterbahn durchfließt.[1]) Jedes Teilchen der bewegten elektrischen Ladung verursacht an einem Punkte P ein Magnetfeld und alle diese Felder werden sich zu einem resultierenden zusammensetzen.

Wir stellen die Frage auf, wie ist das Magnetfeld $\varDelta H$ beschaffen, das die durch ein unendlich kleines Element ds der Strombahn fließende Elektrizitätsmenge mittels ihrer Kraftlinien in P erzeugt (Fig. 156).

Es sei $\varrho\, ds$ die in einem Zeitmoment auf ds befindliche Menge

1) Ampère hat einen solchen Strom bezüglich seiner magnetischen Wirkungen durch die „magnetische Doppelfläche" ersetzt, zwei unendlich benachbarte Flächen, von denen die eine positive, die andere die gleiche Menge negative magnetische Ladung trägt. Diese Auffassung ist für die Entwicklung der Theorie sehr fruchtbar gewesen. Besonders lassen sich auch die ponderomotorischen Kräfte zweier Ströme aufeinander, auf die wir hier nicht eingehen werden, daraus ableiten.

der in ds in der Pfeilrichtung strömenden Elektrizität, ϱ also eine „Liniendichte" der Ladung (entsprechend der „Flächendichte"), oder ϱ die auf der Linieneinheit befindliche Ladung. Ist v die Geschwindigkeit dieser Ladung, so ist ϱv die auf der Länge v befindliche Ladung, und dies ist die Ladung, die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters hindurchtritt, weil eben v die Geschwindigkeit ist. Es ist also

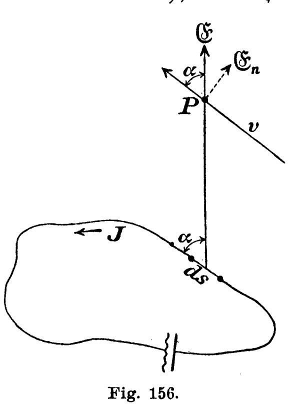


Fig. 156.

(1) $$\varrho v = J$$

die „Stromstärke", wobei in ϱ mit umgekehrtem Vorzeichen bei umgekehrter Geschwindigkeit auch die negativen strömenden Ladungen enthalten sind (§ 39, 12.).

Will man annehmen, daß sich die einzelnen Elementarladungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, so bietet das keine Schwierigkeit, da man nach § 39, 13. jede solche Ladung durch eine geeignet gewählte andere mit beliebiger Geschwindigkeit ersetzen darf.

Es sei r der Abstand des Punktes P von ds, α der Winkel, den r mit ds einschließt.

Nach § 29, 6. haben die von $\varrho\, ds$ ausgehenden elektrischen Kraftlinien im Punkte P eine Dichte $\varrho\, ds/4\pi r^2$, gleichgültig, welches die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums ist.

Diese Kraftlinien verschieben sich parallel mit ds. Um das Gesetz I anzuwenden, haben wir von dieser Kraftliniendichte die Komponente normal zu v (also zu ds) in der r, v-Ebene zu bilden:

$$\mathfrak{E}_n = \frac{\varrho\, ds}{4\pi r^2} \sin \alpha.$$

Dann wird

$$n = \mathfrak{E}_n v$$

in Gleichung (I) zu setzen sein, und somit in P ein Magnetfeld erzeugt:

$$\Delta H = \frac{\varrho\, ds\, v}{c\, 4\pi r^2} \sin \alpha,$$

oder

(2) $$\Delta H = \frac{J\, ds}{4\pi c\, r^2} \sin \alpha,$$

und dieses Magnetfeld wird in Figur 156 nach hinten normal zur Zeichenebene gerichtet sein, da es normal zu der durch r und ds gelegten Ebene ist. Die Gleichung (2) enthält das Biot-Savartsche

Gesetz und außerdem die Ampèresche sogenannte „Schwimmerregel“, die aussagt:

„Denkt man sich mit dem elektrischen Strome schwimmend, so daß der Strom in die Beine ein- und zum Kopfe austritt, und wendet man sich mit dem Gesicht gegen die Magnetnadel, so wird deren Nordpol durch den Strom nach links abgelenkt.“

Anwendungen.

2. Das Magnetfeld eines geradlinigen unendlich langen linearen Stromes.

Wir können uns einen solchen Strom angenähert realisiert denken durch einen möglichst dünnen, gerade ausgespannten Draht von großer Länge, dessen Enden man mittels weit gebogener Zuleitungsdrähte mit einer Stromquelle verbindet. Das von uns zu berechnende Magnetfeld herrscht dann an Orten, deren Abstand von dem geradlinigen Draht klein ist gegen die Abstände von den Drahtenden und den Zuleitungsdrähten, aber groß gegen den Drahtdurchmesser.

Dieser Draht wird nun von einem Strome positiver Ladung in einer Richtung und einem Strome negativer in der entgegengesetzten Richtung durchflossen. Ersetzen wir nach § 39, 12. die letztere durch eine mit der ersteren gleichgerichtete positive Strömung, so muß, wenn der Strom J im Draht stationär ist, die lineare Dichte ϱ der bewegten Ladung äquivalent mit einer im Draht zeitlich und örtlich konstanten Ladung sein (§ 39, 13.).

Die resultierenden Kraftlinien in der Umgebung, die wir nach § 39, 10. in die Rechnung einführen dürfen, sind die einer gleichförmig elektrisch geladenen Geraden. Die Symmetrie verlangt, daß diese Kraftlinien radial zum Draht in den umgebenden Raum verlaufen, so daß die Niveauflächen Zylinderflächen mit dem Draht als Achse bilden. Die Längeneinheit dieses Drahtes sendet ϱ Kraftlinien aus und diese durchsetzen eine Zylinderfläche vom Radius r cm und der Höhe 1 cm, also vom Flächeninhalt $2 r \pi$ qcm, gleichförmig. Die Flächeneinheit dieser Zylinderfläche wird somit von

$$\mathfrak{E} = \frac{\varrho}{2 r \pi}$$

Kraftlinien normal durchsetzt.

In einem Punkte P im Normalabstande r vom Draht ist also die Kraftliniendichte $\varrho / 2 r \pi$ und diese Kraftlinien bewegen sich infolge der Strömung normal zu ihrer Richtung. In der Zeiteinheit werden

$$n = \frac{\varrho v}{2 r \pi}$$

Kraftlinien die zu r und v normale Längeneinheit durchschneiden und ein Magnetfeld

$$H = \frac{\varrho v}{2 r \pi c} = \frac{J}{2 r \pi c} \tag{3}$$

erzeugen. Dieses Feld hat die Richtung der Tangente an den durch P normal um den Draht gelegten Kreis, entsprechend der Ampèreschen Schwimmerregel.

Denselben Wert besitzt das magnetische Feld im umgebenden Raume auch dann, wenn der Strom in einem unendlich langen nicht linearen kreiszylindrischen Leiter fließt. Denn die Kraftlinienverteilung eines solchen im umgebenden Raume ist aus Symmetriegründen die gleiche, wie wenn die elektrische Ladung in seiner Achse konzentriert wäre.

3. Das Feld im Mittelpunkte der Tangentenbussole. Die Tangentenbussole wird von einem eine Kreisbahn durchfließenden Strome gebildet. Im Mittelpunkte der Kreisbahn befindet sich der Drehpunkt einer sehr kleinen um eine Vertikalachse drehbaren Magnetnadel, die das Feld anzeigt. Die Tangentenbussole ist so aufgestellt, daß die Richtung der Horizontalintensität parallel mit der Ebene der Kreisbahn ist.

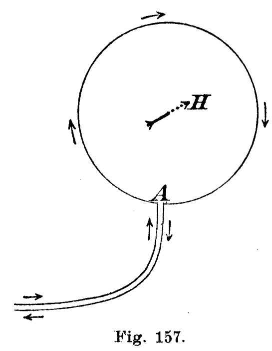


Fig. 157.

Ein solcher Kreisstrom ist mit großer Genauigkeit realisierbar in der in Figur 157 angegebenen Weise. Die Stromzufuhr erfolgt bei A an zwei unmittelbar benachbarten Punkten der Kreisbahn. Die beiden Zuleitungsdrähte können bis auf beliebige Entfernung unmittelbar benachbart geleitet werden, so daß sich, da sie von entgegengesetzten Strömen durchflossen sind, ihre Magnetfelder in geringem Abstande schon aufheben.

Zur Berechnung des Magnetfeldes im Mittelpunkte wenden wir hier zweckmäßig das Biot-Savartsche Gesetz (Gleichung (2)) an. Es ist

$$H = \sum_{\odot} \frac{J\,ds}{4 \pi c r^2} \sin \alpha,$$

geometrisch zu summieren über alle Elemente der Kreisbahn. Die Ebene, in der ds und r liegen, ist die Kreisebene. Jedes Stromelement erzeugt also ein Magnetfeld normal zur Kreisebene und die geometrische Summe wird eine algebraische. Für den Kreismittelpunkt wird allgemein $\alpha = 90^0$, $\sin \alpha = 1$ und $r = a$ konstant. Somit wird

$$H = \frac{J}{4 \pi c a^2} \sum ds$$

und $\Sigma ds = 2 a \pi$, also

(4) $$H = \frac{J}{2ca},$$

und dieses Feld steht senkrecht zur Kreisebene, in Figur 157 nach der Schwimmerregel von vorne nach hinten.

4. Ist die Magnetnadel hinreichend klein, so daß ihre Enden nicht an Orten liegen, in denen das Feld merklich von dem im Mittelpunkte befindlichen abweicht, so wird sie sich nun in die resultierende Richtung der zur Kreisebene parallelen Horizontalintensität des Erdfeldes H_c, und der dazu normalen Feldintensität H des elektrischen Stromes einstellen. Diese resultierende Richtung schließt mit der Kreisebene einen Winkel α ein, dessen Tangens gegeben ist durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{H_c} = \frac{J}{2 c a H_c},$$

und daraus folgt

$$J = 2 c a H_c \operatorname{tg} \alpha.$$

Die Kenntnis des Erdfeldes H_c, der Konstanten c und des Radius a der Tangentenbussole ermöglicht es also, die Stromstärke aus dem Ablenkungswinkel zu bestimmen. Will man bloß Stromstärken miteinander vergleichen, so ist die Kenntnis dieser Größen nicht erforderlich.

5. Gelingt es uns umgekehrt, eine bekannte Elektrizitätsmenge gleichförmig durch die Tangentenbussole zu senden, so können wir aus dem Ablenkungswinkel die Konstante c ermitteln. Das ist in etwas veränderter Form das Prinzip, nach dem in Wirklichkeit diese Konstante ermittelt worden ist. Es ergibt sich

$$c = 3 \cdot 10^{10},$$

und die Dimensionen von c sind die einer Geschwindigkeit. Letzteres erkennt man am einfachsten durch Kombination der Gleichungen (I) und (3) in § 39. Danach ist

$$H = \frac{\mathfrak{E} v_n}{c}.$$

Da H und $\mathfrak{E} = \varepsilon E$ gleiche Dimensionen haben, müssen auch v und c gleiche Dimensionen haben.

Der Wert von c ist, so weit die Genauigkeit der Messungen das erkennen läßt, identisch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum.

6. Das Feld im Innern eines unendlich langen Solenoids.

Wir denken uns einen unendlich langen Zylindermantel von un-

endlich kleiner homogener Wandstärke q und beliebiger Querschnittsform (Fig. 158) ohne scharfe Kanten. Dieser Zylinder soll von einem homogenen elektrischen Strome umflossen sein; d. h. denken wir uns aus dem Zylinder einen Ring von der Höhe $DE = 1$ cm herausgeschnitten, so soll parallel mit den Leitlinien dieses Zylinders eine Strömung von der Größe i den Ring umfließen und i soll über den ganzen unendlichen Zylinder konstant sein. Ist q hinreichend klein, so können wir die Strömung als die Bewegung einer Flächenladung ansehen. i ist die Stromdichte der Flächenladung, die durch die Längeneinheit parallel zu einer Erzeugenden des Zylinders fließende Stromstärke. Die Dimensionen von i sind die einer Stromstärke dividiert durch eine Länge.

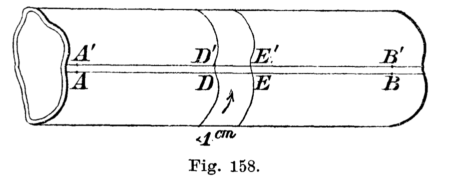


Fig. 158.

7. Wir denken uns eine eventuelle strömende negative Ladung nach § 39, 12. durch die entgegengesetzt fließende positive Ladung ersetzt. Wir denken uns weiter zwei in unendlich kleinem Abstande ds voneinander entfernte Erzeugende AB und $A'B'$ des Zylinders gezeichnet. Ist σ die Flächendichte der Ladung, so wird sich auf einem Zentimeter DE des zwischen diesen gelegenen Streifens die Ladung $\sigma\, ds$ befinden. Wenn sich diese Ladung in der Stromrichtung (Pfeilrichtung der Figur 158) verschiebt, werden sich die einzelnen Teile dieser Ladung gegeneinander nicht verschieben oder drehen, wenn ds hinreichend klein gewählt wird. Der Streifen $AA'B'B$ wird sich mit abnehmendem ds wie eine elektrisch geladene Linie verhalten, die sich normal zu ihrer Richtung bewegt. Wir können auf ihn das Gesetz § 39, 10. anwenden, nicht aber auf alle Ladungen des Zylinders. Die resultierenden Kraftlinien des Streifens werden, wie in Nr. 2 die Kraftlinien eines geraden Drahtes, in den umgebenden Raum strahlenförmig verlaufen und im Abstande r von der Geraden AB die Dichte

$$\mathfrak{E} = \frac{\sigma\, ds}{2 r \pi}$$

besitzen. Dort aber bewegten sich die Ladungen parallel der Geraden, hier senkrecht zu ihr.

8. Figur 159 sei ein Querschnitt des Zylinders. Wir wollen berechnen, was für einen Beitrag der Elementarstreifen $AA'B'B$ der Fig. 158 zu dem Magnetfelde eines beliebigen Punktes P liefert. P habe von ds den Abstand r, und r schließe mit ds den Winkel α ein. Dann ist durch obigen Wert $\mathfrak{E}$ die Kraftliniendichte der von $DD'E'E$ ausgehenden Kraftlinien gegeben. Diese verschieben

sich nach § 39, 9., d parallel mit ds und nach (I) wird das Magnetfeld in P

$$\varDelta H = \frac{\mathfrak{E} v_n}{c} = \frac{\sigma\, ds\, v \sin\alpha}{2 r \pi c}$$

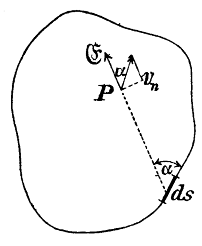


Fig. 159.

erzeugt.

Es ist $i = \sigma v$ die durch die Längeneinheit der Erzeugenden fließende elektrische Strömung. Ein Element des Zylindermantels vom Querschnitt ds liefert also zu dem Magnetfelde den Beitrag

$$(5) \qquad \varDelta H = \frac{i\, ds \sin\alpha}{2 r \pi c},$$

der, wie man sieht, ähnlich gebaut ist, wie der des Biot-Savartschen Gesetzes, nur daß im Nenner $2r$ in erster Potenz steht. Die Richtung von $\varDelta H$ ist die Normale nach vorn zur Zeichenebene der Figur 159.

Die Gleichung (5) gilt in gleicher Form für Punkte im Innenraume wie für solche im Außenraume des Zylinders.

9. Wir teilen den Querschnitt des Mantels (Fig. 160) in Elemente ds ein, die so klein sein müssen, daß die von ihren Enden (A und B) nach P laufenden Kraftlinien noch als hinreichend parallel anzusehen sind, daß also der Winkel ω, den sie miteinander einschließen, hinreichend klein ist. Demnach werden wir die Einteilung zweckmäßig so vornehmen, daß ω für alle Elemente ds das gleiche ist. Wir fassen zwei aus dem Mantel herausgeschnittene Elemente ins Auge, die zwischen denselben zwei in P sich schneidenden Ebenen gelegen sind. (Fig. 160 für einen inneren, Fig. 161 für einen äußeren Punkt.)

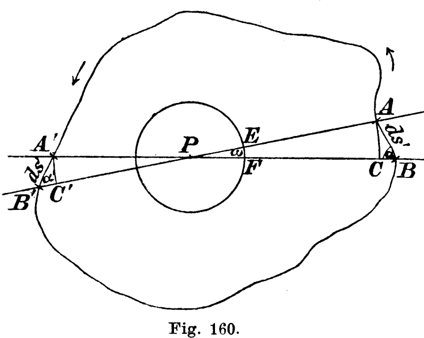


Fig. 160.

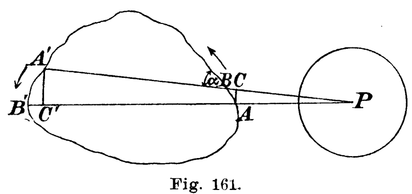


Fig. 161.

Um P schlagen wir einen Kreis (in der Zeichenebene) vom Radius 1. Die beiden Ebenen schneiden dann aus diesem ein Element von der Länge $EF = \omega$ heraus.

Das Element AB liefert zu dem Magnetfelde in P den Beitrag (nach Gleichung (5))

$$\varDelta H = \frac{i\, ds \sin\alpha}{2 r \pi c} = \frac{i\, AC}{2 r \pi c},$$

und es ist

$$AC = r\omega,$$

also

(6) $$\Delta H = + \frac{i\omega}{2\pi c}$$

ein von r unabhängiger Wert.

10. Den gleichen Beitrag liefert, abgesehen vom Vorzeichen, auch das Element $A'B'$ in P.

Ist P ein äußerer Punkt (Fig. 161), so lehrt die Schwimmerregel, daß AB und $A'B'$ in P entgegengesetzt gerichtete Beiträge ΔH liefern. Diese werden sich also paarweise aufheben.

Im Außenraume des Zylinders existiert überhaupt kein Magnetfeld.

11. Im Innenraume sind nach der Schwimmerregel die Beiträge aller Elemente ΔH gleichgerichtet. Sie superponieren sich also, und es wird im Punkte P das Feld

(7) $$H = \sum \frac{i\omega}{2\pi c} = \frac{i}{2\pi c} \sum \omega = \frac{i}{c}$$

herrschen.

Dieses Feld ist, wie man sieht, vom Orte unabhängig. Das Magnetfeld im Innern des Zylinders ist homogen.

Es ist aber auch von der Gestalt der Leitlinie des Zylinders unabhängig. Alle Zylinder, die von der gleichen Strömung umflossen sind, liefern das gleiche Magnetfeld.

12. In folgender Weise können wir die hier besprochenen Verhältnisse angenähert realisieren. Der Zylinder sei ein Kreiszylinder, der als unendlich lang gegen seinen Querschnitt angesehen werden darf. Diesen umwickeln wir spiralförmig mit einem möglichst dünnen Draht möglichst dicht, Windung neben Windung, aber so, daß jede Windung von der nächsten durch einen Nichtleiter getrennt ist. Eine solche Drahtspirale heißt ein „Solenoid". Es mögen ν Windungen auf ein Zylinderstück von der Höhe von 1 cm gehen. Lassen wir nun den Draht von einem Strome von der Stärke J durchfließen, so wird $i = \nu J$ die dieses Zylinderstück von der Höhe von 1 cm umfließende Strömung sein, wo ν eine reziproke Länge ist. Und es wird das Feld im Solenoid

(8) $$H = \frac{\nu J}{c}.$$

Dieser Wert ist nur in den Gegenden richtig, die fern genug von den Enden der Spirale gelegen sind.

§ 41. Die induzierte magnetomotorische und elektromotorische Arbeit.

1. Die gemäß den Gleichungen (I), (II) (§ 39, Seite 268) „induzierten“ Felder können von statischen Feldern überlagert sein, über die diese Gleichungen naturgemäß nichts aussagen. Solche statische Felder können aber aus den induzierten Feldern selber durch „Influenz“ (§ 35) entstehen. Denken wir uns z. B., es bewegen sich in einem Raume magnetische Kraftlinien und wir berechnen nach (II) das daraus resultierende elektrische Feld, und bringen in dieses Feld einen isolierenden Körper hinein. Die Permeabilität dieses Körpers wird im allgemeinen, wenn er nicht „ferromagnetisch“ ist, nur wenig von dem der Umgebung verschieden sein; wohl aber kann seine Dielektrizitätskonstante beträchtlich abweichen. Es werden sich demgemäß die bewegten magnetischen Kraftlinien nicht wesentlich verändern. Das elektrische Feld aber wird infolge Influenzelektrizität in den eingeführten Körpern ein ganz anderes, als aus der Gleichung (II) folgen würde.

Die Anwendung der Gleichung (II) liefert uns also ein falsches Ergebnis, wenn wir nicht gleichzeitig auf die im Raume vorhandene Verteilung der Dielektrizitätskonstanten Rücksicht nehmen, die in dieser Gleichung gar nicht vorkommt, und das Gleiche gilt für die Gleichung (I) und die Permeabilität.

2. Im vorigen Paragraphen (Nr. 2) haben wir das Magnetfeld eines geradlinigen linearen Stromes J im Abstande r von der Strombahn

$$H = \frac{J}{2 r \pi c} \tag{1}$$

gefunden. Zeichnen wir in einer zur Strombahn senkrechten Ebene einen Kreis vom Radius r, dessen Mittelpunkt in der Strombahn liegt, und nennen wir den Umlaufsinn positiv, für den die positive Stromrichtung die positive Drehachse ist (§ 12, 9.), so finden wir nach der Schwimmerregel, daß wir immer beim Durchlaufen der Kreisbahn in diesem Sinne auch das induzierte Magnetfeld in positiver Richtung durchlaufen. Bilden wir die magnetomotorische Arbeit über diese Kreisbahn, indem wir die Kreislinie in hinreichend kleine Elemente ds zerlegen,

$$A_m = \sum_{\circlearrowleft} H_s \, ds,$$

so wird diese sich aus lauter positiven Summanden zusammensetzen und nicht, wie es bei einem statischen Felde der Fall ist (§ 35, 7.), verschwinden.



Die Richtung der induzierten Feldintensität ist überall der Kreisbahn parallel, d. h. es ist $H_s = H$, und dieser Wert ist über den ganzen Kreis nach Gleichung (1) konstant. Es wird also

$$A_m = H \sum ds$$

und da $\Sigma ds = 2r\pi$, und nach § 40, 2. $H = J/2r\pi c$ ist,

$$A_m = \frac{J}{c} \cdot \tag{2}$$

3. Diese Gleichung lehrt uns, daß die „induzierten Felder“ von den statischen sich dadurch unterscheiden, daß für sie die magnetomotorische (elektromotorische) Arbeit über geschlossene Kurven nicht allgemein verschwindet, sondern bestimmte Werte annimmt. Und diese Werte sind unabhängig von den sich überlagernden Feldern, also frei von den in Nr. 1 besprochenen Fehlern: Denn ist H_1 ein induziertes, H_2 ein statisches, H das aus beiden resultierende Feld, und ist

$$\sum_{\circlearrowleft} H_{1s}\, ds = A_1$$

die magnetomotorische Arbeit des Feldes H_1 über eine vorgelegte geschlossene Kurve, so ist

$$\sum_{\circlearrowleft} H_{2s}\, ds = 0$$

über dieselbe Kurve, also

$$\sum_{\circlearrowleft} H_{1s}\, ds + \sum_{\circlearrowleft} H_{2s}\, ds = A_1.$$

Wenn wir in beiden Summen die ds identisch wählen, folgt:

$$A_m = \sum_{\circlearrowleft} (H_{1s} + H_{2s})\, ds = \sum_{\circlearrowleft} H_s\, ds = A_1,$$

d. h. ob wir die magnetomotorische Arbeit des induzierten oder des resultierenden Feldes bilden, ist für das Resultat gleichgültig.

4. Es sei eine beliebige geschlossene Kurve $s\,(= s_1 + s_2)$ gegeben (Fig. 162), in einem Raume liegend, in dem sich elektrische Kraftlinien verschieben. Nur die eine Bedingung knüpfen wir an die Lage dieser Kurve: sie soll nicht einen elektrischen Strom umschlingen, oder genauer: sie soll so gelegen sein, daß es möglich ist, eine (eventuell gewölbte) einfach zusammenhängende (Bd. II, § 96) Fläche s in ihr auszuspannen, durch die kein elektrischer Strom hindurchtritt.

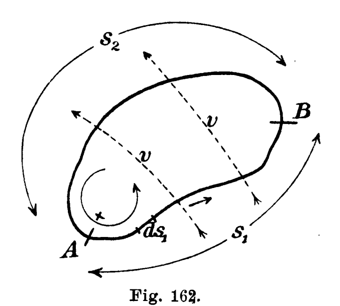


Fig. 162.

Durch eine solche Fläche ist unterschieden, was bei dieser Kurve „innen" und „außen" heißt.[1])

Die bewegten elektrischen Kraftlinien werden im allgemeinen einen Teil s_1 der Kurve von außen nach innen, einen anderen Teil s_2 von innen nach außen durchwandern. Den Umlaufsinn der Kurve s rechnen wir in einem bestimmten Sinne positiv, so daß die das Innere durchsetzende Kraftlinienrichtung dann als positiv anzusehen ist, wenn zu ihr dieser Umlaufsinn eine Rechtsdrehung bildet.

5. Durch ein Element ds_1 von s_1 mögen ν_1 positive Kraftlinien in der (unendlich kleinen) Zeiteinheit ins Innere eintreten. (Austretende negative Kraftlinien sind äquivalent mit eintretenden positiven.) Durch die Längeneinheit von ds_1 werden dann

$$n_1 = \frac{\nu_1}{ds_1}$$

Kraftlinien in der unendlich kleinen Zeiteinheit eintreten, und ein magnetisches Feld erzeugen, das nach (I′) längs ds_1 die Komponente

$$H_{1s} = \frac{\nu_1}{c\,ds_1}$$

besitzt. Dieses Feld hat die Richtung des positiven Umlaufes, wie man aus der Figur 151 und Gleichung (I′) sieht, d. h. es hat die Richtung von A nach B (Fig. 162). Alle Elemente von s_1 liefern die magnetomotorische Arbeit über das Kurvenstück s_1 von A nach B

$$A_1 = \sum_{s_1} H_{1s}\,ds = \frac{1}{c}\sum \nu_1,$$

oder

$$A_1 = \frac{p_1}{c},$$

wenn wir mit p_1 die Gesamtheit aller in das Innere der Kurve in der Zeiteinheit eintretenden Kraftlinien verstehen.

6. In gleicher Weise liefern die durch s_2 austretenden Kraftlinien Felder, die die Richtung ebenfalls von A nach B, also in negativem Umlaufsinne besitzen,

$$-H_{2s} = -\frac{\nu_2}{c\,ds_2},$$

und die magnetomotorische Arbeit über s_2 von B nach A wird

1) Wir schließen also den Fall aus, daß die Kurve einen Knoten bildet. Sie soll auf einer Fläche liegen, in der sie die ganze Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Stückes darstellt. (Gauß Werke Bd. V. Seite 604.)

$$A_2 = -\sum_{s_2} H_{2s}\, ds_1 = -\frac{1}{c}\sum \nu_2$$

oder

$$A_2 = -\frac{p_2}{c},$$

wo p_2 die (positive) Summe aller in der Zeiteinheit austretenden Kraftlinien bedeutet.

7. Es ist die magnetomotorische Arbeit über die ganze geschlossene Kurve

$$A_m = A_1 + A_2$$

oder

(3) $$\sum_{\circlearrowleft} H_s\, ds = \frac{p_1 - p_2}{c}.$$

$p_1 - p_2$ ist die Differenz der in der Zeiteinheit ein- und austretenden Kraftlinien, also der Zuwachs in der Sekunde der die Fläche S der Kurve durchsetzenden Kraftlinien.

III. Die magnetomotorische Arbeit über eine geschlossene Kurve ist gleich dem $1/c$-fachen der in der Zeiteinheit erfolgenden Zunahme der die Fläche S der Kurve durchsetzenden Zahl elektrischer Kraftlinien.

Eine Abnahme dieser Kraftlinien ist dabei als negative Zunahme in Rechnung zu setzen.

8. Für die elektromotorische Arbeit und bewegte Magnetkraftlinien gilt das Entsprechende. Aber wir müssen die Kraftlinienrichtung in entgegengesetztem Sinne zum Umlaufsinn positiv ansetzen (vgl. Fig. 152 und II'). Die magnetische Kraftlinienzahl ist dann als positiv anzusetzen, wenn diese Richtung der magnetischen Kraftlinien zum Umlaufsinn die Achse eines Linkssystems bildet.

Statt dessen können wir aber auch das Vorzeichen umdrehen und bei einem Rechtssystem bleiben. Dann wird

(4) $$\sum_{\circlearrowleft} E_s\, ds = -\frac{q_1 - q_2}{c},$$

wenn q_1 die Anzahl der eintretenden, q_2 die der austretenden magnetischen Kraftlinien bedeutet. Jetzt steht der Umlaufsinn bezüglich der Magnetkraftlinien q in der Relation der Rechtsdrehung; $-(q_1 - q_2)$ ist die Abnahme der magnetischen Kraftlinien. In Worten sagt (4):

IV. Die elektromotorische Arbeit über eine geschlossene Kurve ist gleich dem $1/c$-fachen der in der Zeiteinheit erfolgenden Abnahme der diese Kurve durchsetzenden Zahl magnetischer Kraftlinien.

In III. und IV. ist der positive Sinn von s eine Rechtsdrehung zu der positiven Richtung der Kraftlinien p und q.

9. Wenn in dem betrachteten Raume nur stationäre elektrische Ströme, aber keine anderen bewegten Elektrizitäten vorkommen, so werden sich zwar elektrische Kraftlinien verschieben, aber ihre Dichte wird überall konstant bleiben. Es werden nur an jedem Orte Kraftlinien durch solche von gleicher Dichte und Richtung ersetzt.

Denn wäre das nicht der Fall, würden sich also irgendwo Kraftlinien ansammeln, so wären die Bedingungen der stationären Strömung nicht erfüllt.

Daraus folgt: In eine geschlossene Kurve in der Umgebung stationärer Ströme, die aber von keinen Strömen durchsetzt wird, müssen ebensoviele Kraftlinien ein- wie austreten. Es ist $p_1 = p_2$ und

$$(5) \qquad A_m = \sum_{\circlearrowleft} H_s \, ds = 0$$

im Falle stationärer Ströme.

10. Wir wollen uns einen beliebigen linearen Strom J' vorstellen, dessen Strombahn keine scharfen Ecken bilden soll. Wenn wir hinreichend nahe an diese Strombahn herangehen, können wir sie als geradlinig ansehen. Legen wir in einer zu der Strombahn senkrechten Ebene einen Kreis um die Strombahn konzentrisch herum, der einen hinreichend kleinen Radius hat, so können wir die magnetomotorische Arbeit über diese Kreisbahn nach Gleichung (2) berechnen.

Wir wollen an die Fläche I dieses Kreises zwei Ansatzflächen II und III, wie in Figur 163 angedeutet, anlegen. Diese Ansatzflächen brauchen nicht ebene Flächen und auch nicht unendlich klein zu sein. Durch geeignete Form und Krümmung können wir es erreichen, daß eine beliebige Kurve s die Umrandung aller drei Flächen wird, und wir wählen für die drei einzelnen Kurven in folgender Weise positive Umlaufsinne. Der positive Umlaufsinn der Fläche I sei derart, daß die Kreisfläche in Rechtsdrehung zum Strome umlaufen wird Für die zwei Ansatzflächen soll der positive Umlaufsinn derart sein, daß die die Kreisbahn berührenden Linien entgegengesetzt zu dem Umlaufsinn der Fläche I durchlaufen werden (vgl. die Pfeilrichtungen in Fig. 163).

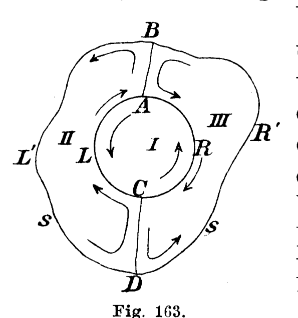


Fig. 163.

11. Wir bilden jetzt die Summe der magnetomotorischen Arbeit über die drei Randkurven der drei Flächen. Nur die magnetomoto-

rische Arbeit um die Fläche I hat einen von 0 abweichenden Wert, den Wert der Gleichung (2). Nach Gleichung (5) müssen die magnetomotorischen Arbeiten über die zwei anderen Flächen, II und III, verschwinden. Es ist also, wenn H' das Magnetfeld des Stromes J' bedeutet,

$$\sum_{I} H_s' \, ds + \sum_{II} H_s' \, ds + \sum_{III} H_s' \, ds = \frac{J'}{c} \cdot$$

Zerlegen wir die drei Summen in Einzelsummen über die zwischen den Punkten A, B, C, D (Fig. 163) gelegenen Strecken, so folgt:

$$\begin{aligned} &\left((L)\sum_{A}^{C} H_s' \, ds + (R)\sum_{C}^{A} H_s' \, ds\right) \\ (6) \quad &+ \left((L)\sum_{C}^{A} H_s' \, ds + \sum_{A}^{B} H_s' \, ds + (L')\sum_{B}^{D} H_s' \, ds + \sum_{D}^{C} H_s' \, ds\right) \\ &+ \left((R)\sum_{A}^{C} H_s' \, ds + \sum_{C}^{D} H_s' \, ds + (R')\sum_{D}^{B} H_s' \, ds + \sum_{B}^{A} H_s' \, ds\right) = \frac{J'}{c} \cdot \end{aligned}$$

Der vor dem Zeichen Σ stehende eingeklammerte Buchstabe deutet nach der Figur den Weg an, über den die Summierung erfolgen soll. Dieser Buchstabe fehlt, wo kein Zweifel über den Weg möglich ist.

12. Es stehen in diesem Ausdruck eine Anzahl Summenpaare, die sich nur durch die Richtung, in der ein und derselbe Weg durchlaufen werden soll, unterscheiden. Es lauten z. B. die erste Summe der ersten Klammer und die erste Summe der zweiten Klammer

$$(L)\sum_{A}^{C} H_s' \, ds + (L)\sum_{C}^{A} H_s' \, ds.$$

In diesen beiden wird derselbe Weg das eine Mal in Richtung der H_s', das andere Mal gegen diese Richtung durchlaufen. Im einen Falle sind also diese H_s' die negativen Werte von denen des anderen Falles, und die beiden Summen ergeben zusammen den Wert 0. Machen wir das mit allen Summenpaaren, bei denen es möglich ist, so bleibt in Gleichung (6) nur übrig:

$$(L')\sum_{B}^{D} H_s' \, ds + (R')\sum_{D}^{B} H_s' \, ds = \frac{J'}{c}$$

oder

$$\sum_{s} H_s' \, ds = \frac{J'}{c} \cdot$$

Die magnetomotorische Arbeit über eine beliebige geschlossene Kurve, die den Strom J' umschließt, ist gleich J'/c.

13. Umschließt dieselbe Kurve s nicht den Strom J', sondern einen anderen, beliebig gelegenen Strom J'', so wird

$$\sum_s H_s'' ds = \frac{J''}{c},$$

und sind beide Ströme gleichzeitig vorhanden, so superponieren sich H_s' und H_s'' zu einem H_s und es folgt:

$$\sum H_s ds = \sum_s H_s' ds + \sum_s H_s'' ds = \frac{J' + J''}{c}.$$

Für eine beliebige Anzahl die Kurve s durchsetzender Ströme J ergibt sich in gleicher Weise

(7) $$\sum_{\circlearrowleft} H_s ds = \frac{1}{c} \sum J.$$

ΣJ bedeutet hier die Summe aller die Fläche S der Kurve s durchsetzenden Ströme, wobei alle die Ströme als positiv zu nehmen sind, die die Kurve in positiver Richtung, d. h. als Achse eines Rechtssystems, durchsetzen.

Die Bedingung, daß die Ströme lineare sein müssen, ist jetzt auch überflüssig, da wir einen beliebigen räumlichen Strom als Summe von linearen Strömen auffassen können.

14. In Worten sagt die Gleichung (7):

V.[1]) In einem Raume, in dem stationäre elektrische Ströme existieren, sonst aber eine Verschiebung von Kraft-

1) Die Sätze III, IV, V enthalten die wesentlichen Grundlagen für die Maxwellschen Gleichungen, die sofort folgen, wenn wir die magnetomotorischen Arbeiten auf die Umrandung einer unendlich kleinen Flächeneinheit senkrecht zu den diese Fläche durchsetzenden Kraftlinien beziehen. Dann wird $\sum_{\circlearrowleft} H_s ds = \text{rot } H$, $\sum_{\circlearrowleft} E_s ds = \text{rot } E$; die Zunahme in der Zeiteinheit der die Flächeneinheit durchsetzenden elektrischen Kraftlinien wird $\frac{d\varepsilon E}{dt}$, die entsprechende Abnahme der die Flächeneinheit durchsetzenden magnetischen Kraftlinien wird $-\frac{d\mu H}{dt}$. Die Summe aller die Flächeneinheit durchsetzenden Ströme, bei stetiger Verteilung der Ströme, wird i, wenn $i = \lambda E$ die Stromdichte ist; und deshalb geben die Sätze III, IV, V über in

$$c \text{ rot } E = -\frac{d\mu H}{dt};$$

$$c \text{ rot } H = \lambda E + \frac{d\varepsilon E}{dt}.$$

James Clerk Maxwell ist am 13. Juni 1831 bei Edinburgh geboren und am 5. November 1879 in Cambridge gestorben. Er war von 1871 an Professor der Experimentalphysik an der Universität Cambridge und Mitglied der Lond. Roy. Soc.



linien nicht stattfindet, ist die magnetomotorische Arbeit über eine geschlossene Kurve gleich dem $1/c$-fachen der algebraischen Summe aller diese Kurve durchfließenden Stromstärken, wobei positiv die Stromstärken zu rechnen sind, die die Kurve in positiver Richtung durchfließen.

Die Gleichung (7) umfaßt die Gleichung (5), die direkt aus ihr folgt, wenn $\Sigma J = 0$ wird.

§ 42. Die magnetische Induktion.

1. Wir haben bereits im vorigen Paragraphen das Gesetz kennen gelernt, das für die Erscheinungen, die wir jetzt zu besprechen haben und deren Auffindung wir Faraday verdanken, grundlegend ist, das Gesetz IV in § 41, 8. Nennen wir die die Fläche einer geschlossenen Kurve durchsetzende Zahl magnetischer Kraftlinien die „magnetische Induktion durch diese Kurve", positiv gerechnet, wenn die Kraftlinienrichtung parallel mit der Achse einer festgelegten Rechtsdrehung ist, so können wir diesem Gesetz den Wortlaut geben:

> Die elektromotorische Arbeit A über eine geschlossene Kurve ist gleich der in der Zeiteinheit erfolgenden Abnahme der Induktion Q durch diese Kurve, dividiert durch die Konstante c.

Dieses Gesetz hatten wir aus dem Grundgesetze II (§ 39, 4.) gewonnen, vor dem es den Vorzug hat, daß es unabhängig von allen überlagerten elektrostatischen Feldern ist.

2. Verläuft die geschlossene Kurve ganz in einem Leiter, so bietet es uns einen weiteren Vorteil: Wie wir sehen werden, fließt in diesem Falle längs der Kurve ein elektrischer Strom und unser Gesetz liefert uns direkt in der elektromotorischen Arbeit eine Größe, die für diesen Strom die Rolle der elektromotorischen Kraft spielt.[1])

1) Die Gesetze der Induktionswirkung zwischen Strömen sind von Fr. Neumann 1845 in eine mathematische Form gekleidet worden. Eine etwas veränderte Form, in der die bei den Neumannschen Gleichungen fehlenden relativen Beschleunigungen zweier Stromelemente auftreten, findet W. Weber 1846. Diese Weberschen Gleichungen sind, vor allem auf Untersuchungen von v. Helmholtz hin, später wieder verlassen worden.

Franz Ernst Neumann, geboren 11. September 1798 in der Uckermark, gestorben 23. Mai 1895 in Königsberg, war seit 1828 Professor der Physik und Mineralogie in Königsberg. Neumann war Freiheitskämpfer von 1815 (Franz Neumann, Erinnerungsblätter von seiner Tochter Luise Neumann. 1904).

Wilhelm Eduard Weber, geboren 24. Oktober 1804 in Wittenberg, gestorben 23. Juni 1890 in Leipzig, wurde 1828 außerordentlicher Professor in

Das gilt allerdings nur dann, wenn die Kraftlinienänderung hinreichend langsam verläuft, oder die Kurve hinreichend klein ist.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen auf einige Beispiele beschränken.

Magnetoinduktion.

3. Es sei ein linearer Leiter in Gestalt eines ebenen Ringes gegeben, der eine Fläche f umspannt. Dieser Ring befinde sich in einem homogenen Magnetfelde (z. B. dem Erdfelde) von der Intensität H, und sei um eine Achse D drehbar, die in der Ringebene und senkrecht zu den Kraftlinien liegt (Fig. 164). Die Drehung soll mit konstanter Winkelgeschwindigkeit φ' erfolgen. Den Winkel rechnen wir von einem Moment an, wo der Ring senkrecht zu den Kraftlinien steht, und diese Stellung des Ringes nennen wir seine „Nullage" (Lage A in Fig 164).

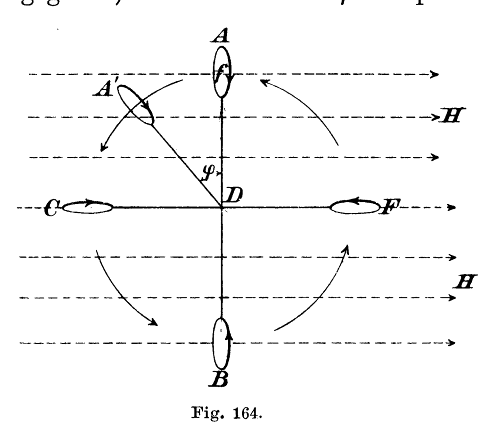


Fig. 164.

Wir fixieren auf dem Ringe den Drehsinn, der eine Rechtsdrehung zu $+H$ als Achse ist, wenn der Ring sich in der Nullage befindet. Die Kraftliniendichte des Magnetfeldes H ist

$$\mathfrak{H} = \mu H,$$

die Induktion durch die Kurve in der Nullage

$$Q_0 = \mu H f.$$

4. Wenn der Ring sich um einen Winkel φ aus der Nullage herausgedreht hat (bis A' in Fig. 164), so ist die Induktion durch ihn

$$Q = Q_0 \cos \varphi, \tag{1}$$

da $f \cos \varphi$ die Projektion der Fläche f auf eine zu den Kraftlinien normale Ebene darstellt.

Rechnen wir φ immer wachsend, so daß $\varphi = 2\pi$ ist, wenn der Ring wieder seine Nullage erreicht hat, so wird infolge letzter Gleichung im zweiten und dritten Quadranten Q negativ. Das ent-

Halle, 1831 ordentlicher Professor der Physik in Göttingen, wo er 1837, einer der „Göttinger Sieben", seines Amtes entsetzt wurde. 1843 kam er als Professor der Physik nach Leipzig, von wo er 1849 wieder in seine frühere Stelle nach Göttingen zurückkehrte.

spricht aber auch den Tatsachen, denn zu dem auf dem Ringe fixierten Drehsinn, angedeutet durch den Pfeil in der Figur, ist die Kraftlinienrichtung in diesen zwei Quadranten die negative Achse (§ 12, 9.).

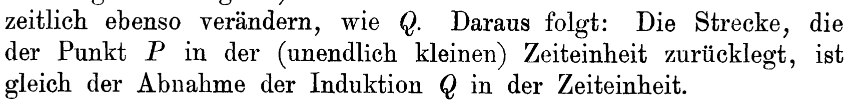
Wir werden also in dieser Darstellung die elektromotorische Arbeit im Ringe so erhalten, daß sie positiv wird, wenn sie die im Ringe festbleibende Pfeilrichtung besitzt.

5. Eine graphische Darstellung der jeweiligen Größe von Q können wir folgendermaßen erhalten. Wir stellen Q_0 durch eine beliebige Länge (CA der Fig. 165) dar, und schlagen mit dieser Länge Q_0 als Radius einen Kreis. Drehen wir in diesem Kreise einen Radius von einer „Nulllage“ CA aus bis zu einem Winkel φ (CA'), so wird seine Projektion CP auf den durch die Nullage gegebenen Durchmesser gleich dem diesem Winkel φ entsprechenden Werte Q sein; denn es ist

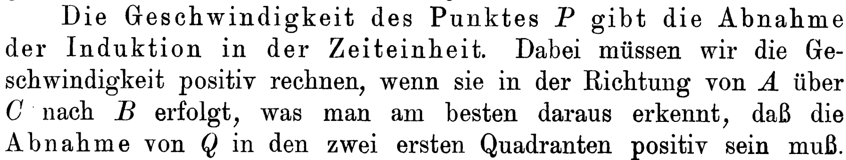
$$CP = CA' \cos \varphi = CA \cos \varphi.$$

Fig. 165.

Drehen wir den Radius mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, so wird CP sich



zeitlich ebenso verändern, wie Q. Daraus folgt: Die Strecke, die der Punkt P in der (unendlich kleinen) Zeiteinheit zurücklegt, ist gleich der Abnahme der Induktion Q in der Zeiteinheit.



Die Geschwindigkeit des Punktes P gibt die Abnahme der Induktion in der Zeiteinheit. Dabei müssen wir die Geschwindigkeit positiv rechnen, wenn sie in der Richtung von A über C nach B erfolgt, was man am besten daraus erkennt, daß die Abnahme von Q in den zwei ersten Quadranten positiv sein muß.

6. Eine solche Bewegung, wie sie der Punkt P ausführt, haben wir in § 17, 14. bei der Ableitung der Pendelbewegung kennen gelernt (Fig. 77). Danach muß die Geschwindigkeit des Punktes P (§ 17, 14., Gleichung (1)), wenn T die „Umlaufszeit“ des Radius bedeutet,

$$v = \frac{2\pi}{T} Q_0 \sin \varphi$$

sein, und das ist die in der Zeiteinheit erfolgende Abnahme von Q, die wir mit Q' bezeichnen wollen. Also ist

$$Q' = \frac{2\pi}{T} Q_0 \sin \varphi;$$

und danach ist die elektromotorische Arbeit über diese Kurve

$$A = \sum_{\odot} E_s \varDelta s = \frac{2\pi}{cT} Q_0 \sin \varphi. \tag{2}$$

7. Wir haben hierbei nicht berücksichtigt, daß durch diese elektromotorische Arbeit ein elektrischer Strom zustande kommt, der seinerseits ein Magnetfeld liefert, das über das Feld H gelagert sein und so die Induktion verändern wird. Dieses Feld ist von der Stromstärke abhängig, und wenn wir die Stromstärke, etwa durch einen hinreichend großen Widerstand, möglichst herabsetzen, so können wir es jedenfalls erreichen, daß es gegen H zu vernachlässigen sein wird. Wir vernachlässigen dann also die Kraftlinien, die ein in der Kurve fließender Strom durch seine eigene Kurve hindurchsendet, die „Selbstinduktion", oder richtiger gesagt, deren zeitliche Änderung.

8. Der Gleichung (2) entnehmen wir, daß das bei der Drehung in dem Ringleiter „induzierte Feld" $E^{(1)}$ geschlossene Kraftlinien besitzt. Welche Richtung dieses Feld an den einzelnen Stellen hat, können wir aus dieser Gleichung nicht ablesen. Darüber müßte uns die Grundgleichung (II) des § 39 Aufschluß geben. Über dieses Feld $E^{(1)}$ aber lagert sich gleichzeitig das Feld $E^{(2)}$ der in § 37, 12. besprochenen in dem Leiter auftretenden Ladungen.

Es sei in einem betrachteten Moment die Stellung des Ringes durch einen Winkel φ gegeben und wir wollen von diesem Moment an einen Zeitabschnitt τ ins Auge fassen, der so klein ist, daß φ sich nur unendlich wenig ändert. Durch hinreichend langsame Drehung können wir τ beliebig groß machen, bei unendlich langsamer Drehung sogar bis zu endlichen Werten steigern.

Innerhalb des Zeitelementes τ können wir $E^{(1)}$ als konstant ansehen. Nach § 37, 12. wird eine gewisse Zeit τ' erforderlich sein, innerhalb deren eine Oberflächenladung des Leiters und damit ein Feld $E^{(2)}$ erzeugt wird, so beschaffen, daß nach Ablauf von τ' die resultierenden Kraftlinien im Leiter parallel dessen Oberfläche verlaufen. Durch diese Oberflächenladung kann, da ihr Feld keine geschlossenen Kraftlinien besitzt, der Wert von A nicht geändert werden. Nach Ablauf der Zeit τ' können wir aber E_s durch das resultierende E ersetzen, weil E die Richtung von s hat, und es wird jetzt

$$A = \sum_{\odot} E \varDelta s = \frac{2\pi}{cT} Q_0 \sin \varphi.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß wir auch noch während der Zeit τ' das induzierte Feld $E^{(1)}$ als konstant ansehen dürfen.



9. Die Ladung, die durch das Feld $E^{(1)}$ erzeugt wird und die das Feld $E^{(2)}$ in geeigneter Weise modifiziert, wird mit Beginn des Zeitelementes τ' nicht ganz neu entstehen, sondern aus der Ladung, die in dem vorhergehenden Zeitelement vorhanden war und die, aller Wahrscheinlichkeit nach, nur wenig von ihr abweicht. Es ist danach plausibel, daß τ' nur sehr kleine Werte besitzt. Wie dem aber auch sei, wir dürfen jedenfalls bei hinreichend langsamer Drehung das Element τ so groß annehmen, daß τ' nur ein unendlich kleiner Bruchteil von τ ist. Diese hinreichend langsame Drehung des Ringes wollen wir voraussetzen. Daß sie in Wirklichkeit für eine mechanische Drehung recht beträchtlich schnell sein darf, wollen wir nur erwähnen.

10. Die Kraftlinien E sind im Innern des Ringes an dessen Grenze parallel mit der Oberfläche. Im Innern des Ringes können elektrische Ladungen nicht vorhanden sein, wenn wir nicht von vorne herein eine statische Ladung in irgend einem Punkte des Ringes annehmen. Denn die Ladungen, die das Feld $E^{(2)}$ erzeugen, sind nach § 37, 12. nur auf der Oberfläche vorhanden.

Der Innenraum des Ringkernes bildet eine Kraftröhre von unendlich kleinem Querschnitt, die ganz von in sich geschlossenen Kraftlinien erfüllt ist.

Der Kern des Ringes habe den Querschnitt q. Es muß dann

$$\varepsilon E q = \text{const.}$$

sein, also

$$E q = \text{const.}$$

11. Nach § 37, 4., Gleichung (1) ruft E eine Strömung von der Stromdichte

$$i = \lambda E$$

hervor, also eine Stromstärke

$$J = \lambda E q,$$

und J ist ebenfalls über die ganze Kraftröhre konstant, wenn es die Leitfähigkeit λ ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$\frac{J \Delta s}{\lambda q} = E \Delta s,$$

und deshalb

$$J \sum_{\circlearrowleft} \frac{\varDelta s}{\lambda q} = A = \sum_{\circlearrowleft} E \varDelta s.$$

Nach § 37, 10., Gleichung (5a) ist

$$\sum_{\circlearrowleft} \frac{\varDelta s}{\lambda q} = w$$

der Widerstand der Kraftröhre. Deshalb wird allgemein

$$J = \frac{A}{w}, \tag{3}$$

oder in dem speziellen Falle der Gleichung (2):

$$J = \frac{2\pi}{wcT} Q_0 \sin\varphi, \tag{4}$$

und A vertritt in der Tat die Rolle der elektromotorischen Kraft. Wir nennen A die „induzierte elektromotorische Kraft".

12. Ist t die Zeit, nach deren Verlauf der Winkel φ erreicht ist, so können wir

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t$$

setzen, da T die Zeit ist, die φ braucht, um den Wert 2π zu erreichen. Dann wird also

$$J = \frac{Q_0}{c} \frac{1}{w} \frac{2\pi}{T} \sin\frac{2\pi}{T} t, \tag{5}$$

und diese Gleichung lehrt uns den Verlauf des Stromes kennen, den wir wegen seiner Abhängigkeit vom Sinus einer Zeitfunktion einen „sinusförmigen Wechselstrom" nennen.

Es wird

$$\begin{aligned} J &= 0 \quad \text{zur Zeit } t = 0, \\ J &= +A_0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad t = \tfrac{1}{4}T, \\ J &= 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad t = \tfrac{1}{2}T, \\ J &= -A_0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad t = \tfrac{3}{4}T, \\ J &= 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad t = T. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$A_0 = \frac{Q_0}{c} \frac{1}{w} \frac{2\pi}{T}$$

der Maximalwert, den J erreicht, seine „Amplitude".

Die ausgezogene Linie der Figur 166 gibt graphisch den zeitlichen Verlauf von J wieder. Die punktierte Linie gibt in gleicher Weise den zeitlichen Verlauf der Induktion durch die rotierende Kurve, wie er aus Gleichung (1) folgt, wenn wir $\varphi = 2\pi t / T$ setzen. In der Figur bedeutet die Abszisse die Zeit von einem Durchgang durch die Nullage an gerechnet; die Ordinate ist für die punktierte Linie die Induktion Q, für die aus-

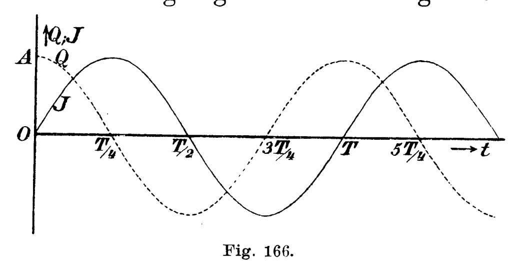


Fig. 166.

gezogene die Stromstärke J. Die Länge OA der Ordinate repräsentiert für die punktierte Kurve den Wert Q_0, für die ausgezogene Kurve den Wert A_0, die „Amplitude“ der Strömung.

Die Werte $J = 0$ sind erreicht, wenn die Ringebene senkrecht zu den Kraftlinien steht, also wenn die Induktion durch die Kurve gerade im Maximum ist. J hat seinen Maximal- und Minimalwert, wenn die Induktion durch die Kurve gleich Null ist.

Die Stromstärke ist also zeitlich variabel, aber sie ist in jedem Moment über den ganzen Ring konstant. Eine solche Strömung heißt „quasistationär“.

13. Die in den letzten Nummern besprochenen Gesetze bilden die Grundlage für die Theorie der „Dynamomaschinen“, das heißt der zur Erzeugung von elektrischen Strömen mit Hilfe von Magnetfeldern bestimmten Maschinen.

In der Technik verwendet man allerdings niemals homogene Felder, weil sie nicht mit hinreichender Kraftlinienzahl herstellbar sind. Immer aber sind die Felder symmetrisch gebaut, wie es z. B. in Figur 167 durch die punktierten Linien angedeutet ist. Infolgedessen verläuft der induzierte Strom wenigstens qualitativ ähnlich, wie bei einem homogenen Felde; aber er verläuft nicht sinusförmig.

Das in Figur 167 angedeutete Feld, das in der Technik, besonders bei älteren Maschinen, häufig Verwendung gefunden hat, kommt dadurch zustande, daß man die rotierende Leiterkurve A um einen Eisenring herumlegt, der die Form und Lage des ringförmigen Raumes hat, den die Fläche f der Kurve bei ihrer Umdrehung beschreibt. Diesen Ring bringt man in ein Magnetfeld hinein, dessen Kraftlinien symmetrisch zu der Ringebene (Zeichenebene der Figur) und symmetrisch zu einer Meridianebene des Ringes (in der Figur normal zur Zeichenebene in der Linie CF) angeordnet sind. Die Kraftlinien werden durch den Ring nach dem Brechungsgesetz (§ 35, 12.) abgelenkt, bleiben aber symmetrisch zu den beiden Ebenen, da der Ring selber zu diesen symmetrisch liegt. Der Eisenring heißt der „Ringanker“ der Maschine.[1])

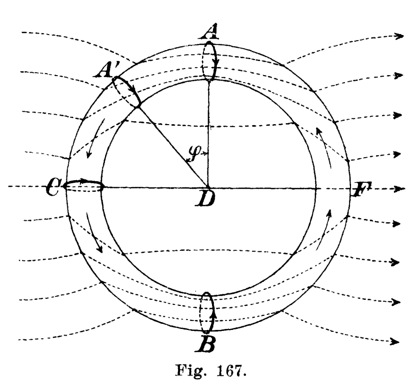


Fig. 167.

1) Dieser Ringanker heißt nach L. Th. Gramme, der ihn 1871 in Anwendung gebracht hat, der „Grammesche Ring“. Erfinder dieses Ringes ist Antonio Pacinotti, Professor der Physik an der Universität zu Cagliari.

Für die Technik war die Entdeckung des „Dynamoprinzips“ im Jahre 1867

14. Die in der Schnittlinie CF der beiden Symmetrieebenen verlaufende Kraftlinie bleibt infolge der Symmetrie in ihrer Richtung erhalten. Aus demselben Grunde wird die Fläche f der Leiterkurve in der Nullage, bei A, von den Kraftlinien normal in positiver Richtung, um den Winkel π von A entfernt, also bei B, normal in negativer Richtung zu dem festgelegten Drehsinn, durchsetzt. Die Induktion Q durch die rotierende Kurve wird sich demgemäß in ihrem zeitlichen Verlaufe ungefähr so gestalten, wie es die punktierte Linie der Figur 168 andeutet, die ebenso angeordnet ist, wie die Figur 166.

15. Aus dem Verlauf dieser Kurve können wir für die Stromstärke einige Schlüsse ziehen.

Die Induktion wird sich zeitlich nicht ändern, freilich nur während eines unendlich kleinen Zeitelementes, wenn die Kurve parallel mit der Abszisse verläuft, also zur Zeit $t=0$, $t=T/2$, $t=T$, allgemein zur Zeit $t=nT/2$, wenn n eine ganze Zahl bedeutet. In diesen Zeitpunkten wird die Strömung gleich Null sein.

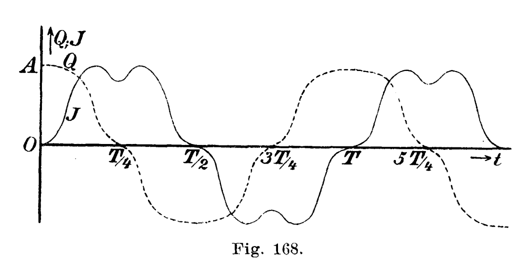


Fig. 168.

An den Stellen, wo die Kurve den steilsten Abfall besitzt, zeigt sie die schnellste zeitliche Abnahme von Q an. Hier wird die Strömung ein Maximum sein. An den Stellen, wo die Kurve den steilsten Anstieg besitzt, zeigt sie die schnellste zeitliche Zunahme von Q an, und die Strömung besitzt hier ein Minimum.

Die ausgezogene Kurze der Figur 168 stellt demgemäß den dem zeitlichen Verlauf von Q nach Gleichung (3) und Gesetz IV in § 41, 8. entsprechenden Verlauf der Stromstärke J dar.

16. Denken wir uns die rotierende Kurve in Gestalt eines Rechtecks gegeben und um eine Achse rotierend, die die Mittelpunkte zweier gegenüber liegender Seiten verbindet (Fig. 169), so

von Werner Siemens von grundlegender Bedeutung. Es beruht auf der Verwendung von Elektromagneten zur Erzeugung des induzierenden Magnetfeldes, die durch den von der Maschine gelieferten Strom selber erregt werden. Der Kern eines solchen Magneten enthält hinreichend Magnetismus, um auch beim Ingangsetzen der Maschine schon einen, wenn auch nur schwachen Strom zu liefern. Dieser Anfangsstrom steigert dann allmählich die Magnetisierung des Kerns.

Ernst Werner v. Siemens geboren 13. Dezember 1816 in Lenthe bei Hannover, gestorben 6. Dezember 1892 in Berlin, war Gründer der Firma Siemens & Halske, Dr. phil. hon. c. und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin. („Lebenserinnerungen" von Werner von Siemens. Berlin 1893.)

gilt, wenn die Rotation in einem homogenen zur Drehachse normalen Felde verläuft, auch jetzt noch die Gleichung (5) und die graphische Darstellung in Figur 166. Denn von der Gestalt der Kurve und der Lage der Drehachse innerhalb der Kurvenebene war unsere Ableitung ganz unabhängig.

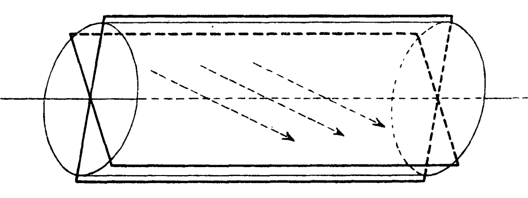


Fig. 169.

Die Kurvenfläche beschreibt bei der Rotation ein Stück eines Kreiszylinders. Erfüllen wir dieses mit Eisen, so wird das Magnetfeld und damit der zeitliche Verlauf der Induktion geändert. Der Strom wird nicht mehr sinusförmig verlaufen. Die so gewonnene Anordnung bildet eine spezielle Form des „Trommelankers“, der in der neueren Technik häufig Verwendung findet. Den allgemeinsten Fall der „Trommelwicklung“ erhält man, wenn man noch die Drehachse aus der Ebene der Kurve in eine zu dieser Ebene parallele Lage verlegt.

17. Bei praktischen Anordnungen begnügt man sich nicht mit einer einzigen Kurve oder „Windung“, sondern umhüllt den Kern vollständig mit Windungen. Für jede einzelne Windung gelten dann die abgeleiteten Gesetze, und sind die Windungen metallisch aneinander geschlossen, aber von den Nachbarwindungen isoliert, so superponieren sich die einzelnen Ströme. Sache der Technik ist es, die einzelnen Windungen so zu schalten, daß diese Ströme sich nicht dauernd zu Null addieren, sondern im Gegenteil einen möglichst günstigen Gesamtwert der Strömung ergeben. Der „Kollektor“ oder die „Schleifringe“ an der Maschine besorgen diese Schaltung.

Voltainduktion.

18. Die veränderliche magnetische Kraftlinienzahl, die einen Leiterkreis durchsetzt und in ihm einen Strom erzeugt, kann auch selber durch einen veränderlichen Strom erzeugt werden. Dann spricht man von galvanischer oder Voltainduktion.

Es sei ein ringförmiger linearer Leiter I gegeben, in dem zunächst ein stationärer Strom J_1 fließen möge.

> **19.** Das Feld H_1, das dieser Strom erzeugt, ist an einem beliebigen Orte in der Umgebung mit J_1 proportional.

Das folgt am besten aus dem Biot-Savartschen Gesetz § 40, 1.

Jedes Element ds des Leiters I erzeugt an dem betrachteten Orte ein Feld

$$\frac{J_1\, ds \sin\alpha}{4\pi c r^2},$$

alle Elemente zusammen also ein Feld

$$H_1 = \sum J_1 \frac{ds \sin\alpha}{4\pi c r^2},$$

was wegen der Konstanz von J_1 über die ganze Leiterkurve I zu

(6) $$H_1 = J_1 \sum \frac{ds \sin\alpha}{4\pi c r^2}$$

wird. Die Summe ist als geometrische Summe im Sinne von § 1, 6. zu verstehen. Daß wir auch aus einer geometrischen Summe einen konstanten Faktor heraussetzen dürfen, erhellt schon aus der Figur 4 in § 1. Wenn wir darin die Längen OA_1, A_1A_2 u. s. w., die die Summanden repräsentieren, proportional vergrößern, so vergrößert sich auch die Summe, die durch die Länge OA_n dargestellt ist, proportional, behält aber ihre Richtung. Das folgt aus der Ähnlichkeit der beiden von den Summanden gebildeten Vielecke, und es gilt auch, wenn diese Vielecke nicht ebene Figuren sind, also wenn die Vektoren nicht alle in einer Ebene liegen.

Die Gleichung (6) enthält den Satz 19; der Proportionalitätsfaktor

$$K = \sum \frac{ds \sin\alpha}{4\pi c r^2}$$

ist eine rein geometrische Größe, die keine elektrischen oder magnetischen Daten enthält.

20. Zeichnen wir in der Nachbarschaft des Leiters I eine zweite geschlossene Kurve II, die wir uns ebenfalls aus einem linearen Leiter bestehend denken wollen, so folgt aus Nr. 19:

> Die Kraftlinienzahl, die vom Leiter I erzeugt, den Leiter II durchsetzt, ist mit der Stromstärke J_1 proportional.

Denn aus 19. folgt zunächst, daß überall die Kraftliniendichte $\mathfrak{H}_1$ mit J_1 proportional ist. Die Kraftlinienzahl $Q_{1,2}$, die den Leiter II durchsetzt, setzt sich aber aus einer Summe von Produkten $\mathfrak{H}_{1n}\, do$ zusammen, wenn do ein Flächenelement einer die Kurve II überspannenden Fläche, $\mathfrak{H}_{1n}$ die zu do normale Komponente der Kraftliniendichte bedeutet (§ 29, 7.). Somit ist

$$Q_{1,2} = \sum \mathfrak{H}_{1n}\, do = \sum \mu H_{1n}\, do$$

oder

(7) $$Q_{1,2} = J \sum \mu K_n\, do = q_{1,2} J.$$

Der Proportionalitätsfaktor $q_{1,2}$ kann nach dieser Gleichung als die Kraftlinienzahl angesehen werden, die der Strom *1* im Leiter *I* durch die Kurve des Leiters *II* hindurchsendet. $q_{1,2}$ ist eine von der Permeabilität μ, sonst aber nur von der geometrischen Konstellation der beiden Kurven abhängige Größe, jedenfalls aber von dem Strome J_1 nicht abhängig.

Lassen wir umgekehrt in der Kurve *II* einen Strom J_2 fließen, so sendet er durch die Kurve *I* die Kraftlinienzahl

(8) $$Q_{2,1} = q_{2,1} J_2$$

hindurch, wenn $q_{2,1}$ die dem $q_{1,2}$ entsprechende Bedeutung besitzt.

21. Die in den Gleichungen (7), (8) ausgesprochenen Tatsachen gelten nur, wenn die Strömung in den Leitern stationär ist. Ist etwa J_1 veränderlich, so dürfen wir nicht annehmen, daß einem momentanen Werte von J_1 überall das Feld entspricht, das nach dem Biot-Savartschen Gesetze aus J_1 berechenbar wäre. Es ist denkbar — und in der Tat der Fall —, daß das Feld, das J_1 erzeugt, eine gewisse Zeit braucht, um bis zu einem fernen Orte vorzudringen.

Es muß aber jedenfalls eine Änderung von J_1 ausführbar sein, die hinreichend langsam erfolgt, so daß wir von der zeitlichen Ausbreitung des Magnetfeldes absehen können.

Vor allem muß die Änderung so langsam erfolgen, daß wir J_1 als quasistationär (Nr. 11) ansehen dürfen. Denn nur dann ist J_1 über die ganze Kurve *I* konstant, und nur dann dürfen wir in (6) den Faktor J_1 aus der Summe heraussetzen.

22. Diese Bedingungen seien erfüllt. Es sei ferner der Widerstand w_2 der Kurve *II* so groß, daß nur schwache Ströme in *II* zustande kommen können, die ihrerseits auf *I* nicht merklich induzierend wirken. Es möge im Leiter *I* ein hinreichend langsam veränderlicher, quasistationärer Strom J_1 fließen. Er sendet durch die Kurve *II* die in Gleichung (7) gegebene Kraftlinienzahl $Q_{1,2}$ in einem bestimmten Moment hindurch.

Die zeitliche Veränderung von $Q_{1,2}$ erzeugt im Leiter *II* eine elektromotorische Arbeit

$$A = \frac{1}{c} Q'_{1,2},$$

wenn $Q'_{1,2}$ die Abnahme von $Q_{1,2}$ in der unendlich kleinen Zeiteinheit bedeutet. A vertritt nach Gleichung (3) die Rolle einer elektromotorischen Kraft, der „induzierten elektromotorischen Kraft".

Nach (7) wird

(9) $$A = \frac{q_{1,2}}{c} J' = p_{1,2} J_1',$$

wenn J_1' die in der Zeiteinheit erfolgende Abnahme der Stromstärke J_1 bedeutet. Der Faktor

(10) $$p_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{c}$$

heißt der „Induktionskoeffizient" der Kurve I auf die Kurve II. Er hängt außer von der Permeabilität des umgebenden Mediums nur von der Gestalt und gegenseitigen Lage der beiden Kurven ab.

Nach Gleichung (3) wird in der Kurve II ein Strom von der Stärke

$$J_2 = \frac{A}{w} = \frac{p_{1,2}}{w_2} J_1'$$

fließen, über den sich aber auch noch Ströme lagern können, die von anderen elektromotorischen Kräften innerhalb des Leiters II herrühren.

23. Die Kraftlinien $Q_{1,2}$ haben zu J_1 die Richtung der positiven Drehachse.

Es seien I und II zwei kongruente parallele Kurven, etwa zwei Normalschnitte eines Zylinders. Dann folgt, daß eine Abnahme von J_1 und damit von $Q_{1,2}$ einen Strom J_2 in positivem Drehsinn zu $Q_{1,2}$, also parallel mit J_1 erzeugt.

> Eine Abnahme des „Primärstromes" J_1 erzeugt einen mit J_1 gleichgerichteten „Sekundärstrom" J_2, eine Zunahme des Primärstromes einen entgegengesetzten Sekundärstrom.

24. In dem in Nr. 23 angenommenen Falle folgt aus Symmetriegründen, daß

$$p_{1,2} = p_{2,1}$$

ist. Daß diese Gleichung allgemein erfüllt ist, wollen wir hier ohne Beweis erwähnen. Dieser Tatsache zufolge führt $p_{1,2}$ auch den Namen „wechselseitiger Induktionskoeffizient". Lassen wir die beiden Kurven ineinander fallen, so erkennt man, daß ein veränderlicher Strom in einer Kurve in ihr selber eine induzierte elektromotorische Kraft erzeugt, die den primären Anteil des Stromes beeinflussen wird. Zu der primären elektromotorischen Kraft E_1 addiert sich eine induzierte elektromotorische Kraft E' von der Größe

$$E' = p_{1,1} J_1' = \frac{q_{1,1}}{c} J_1',$$

worin $q_{1,1}$ die Kraftlinienzahl bedeutet, die der Einheitsstrom in der Kurve I durch diese Kurve selber hindurch sendet. $p_{1,1}$ heißt der



„Selbstinduktionskoeffizient". Die gesamte elektromotorische Kraft im Leiter I ist also

$$E = E_1 + p_{11} J_1',$$

worin J_1' die Abnahme des von E erzeugten Stromes in der Zeiteinheit bedeutet. Dieser Strom ist nach dem Ohmschen Gesetze

$$(11) \qquad J_1 = \frac{E}{w} = \frac{E_1}{w} + \frac{p_{11} J_1'}{w}.$$

Die „Selbstinduktion" erzeugt beim Anwachsen des Stromes einen Gegenstrom, beim Abfall einen gleichgerichteten Strom.

25. Die Induktionskoeffizienten $p_{1,2}$ und $p_{1,1}$ haben nach (7) und (10) die Dimensionen einer Kraftlinienzahl dividiert durch das c-fache einer Stromstärke. Das gibt im Gaußschen Maßsystem die Einheit

$$(p) \qquad 1 \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}},$$

was auch aus der rein geometrischen Definition für den Faktor K in Nr. 19 und den in den Gleichungen (7) und (10) gegebenen Beziehungen von q und p zu K abgeleitet werden kann.

Der Induktionskoeffizient ist die einzige Größe, die wir kennen gelernt haben, zu deren physikalischer Definition wir elektrische und magnetische Größen gleichzeitig verwandt haben.

§ 43. Die absoluten Maßsysteme.

1. Zur Messung der elektrischen Größen haben wir bisher Einheiten verwendet, die alle aus der elektrischen Kraft abgeleitet waren, und die Einheit der elektrischen Kraft haben wir gleich der einer mechanischen Kraft gesetzt. Neben diesen Einheiten haben wir auch die technischen Einheiten erwähnt, die uns aber hier zunächst nicht beschäftigen sollen; wir befassen uns vorerst nur mit den „absoluten" Einheiten, denen das „Gramm-Zentimeter-Sekunden-System" zu grunde liegt.

Die Dielektrizitätskonstante ε haben wir willkürlich als dimensionslose Zahl angenommen, und ihren Zahlenwert so bestimmt, daß für Luft ($\varepsilon = \varepsilon_0$)

$$4\pi\,\varepsilon_0 = 1$$

wurde.

Der elektrischen Feldintensität haben wir dementsprechend die Einheit

$$(E) \qquad 1\ \text{gr}^{\frac{1}{2}}\ \text{cm}^{-\frac{1}{2}}\ \text{sec}^{-1}$$

gegeben. Daraus lassen sich die Einheiten aller übrigen elektrischen Größen leicht berechnen.

2. In analoger Weise haben wir für die magnetischen Größen Einheiten gewählt, die daraus hervorgingen, daß wir der magnetischen Kraft die Einheit der mechanischen Kraft gaben. Die Permeabilität μ haben wir wieder willkürlich als dimensionslose Zahl angesehen und ihren Zahlenwert entsprechend der Gleichung

$$4\pi \mu_0 = 1$$

($\mu = \mu_0$ in Luft) festgelegt. Dann erhält die magnetische Feldintensität dieselben Einheiten, wie die elektrische, nämlich

$$(H) \qquad 1 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{-\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-1},$$

und hieraus lassen sich wieder die Einheiten der übrigen magnetischen Größen berechnen.

3. Das System von Einheiten, das die in Nr. 1 und Nr. 2 besprochene Einheit für elektrische und magnetische Größen umfaßt, heißt das absolute „Gaußsche Maßsystem". Gauß hat dieses Maßsystem bei seinen erdmagnetischen Beobachtungen zuerst angewandt. Die Bezeichnung „absolut" sagt aus, daß alle Einheiten auf die der Masse, der Länge und der Zeit zurückgeführt sind. Das Gaußsche Maßsystem ist aber nicht das einzige der elektrischen und magnetischen Größen, das den Namen „absolut" verdient.

4. Jede Gleichung zwischen zwei verschiedenartigen physikalischen Größen kann dazu dienen, die Einheiten der einen auf die der anderen zurückzuführen. So hatten wir die Einheit der Kraft mittels der „Bewegungsgleichung" (5) in § 16 auf die der Masse und der Beschleunigung zurückgeführt, indem wir willkürlich den Faktor c dieser Gleichung als dimensionslose Zahl vom Zahlenwert 1 ansetzten. Wir hatten in ähnlicher Weise die Einheit der Wärmemenge entsprechend der Gleichung (1) in § 25 mit der der Energie identifiziert.

5. Die Beziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Größen (§ 39) können uns dementsprechend dazu dienen, die elektrischen Einheiten auf die magnetischen oder die magnetischen Einheiten auf die elektrischen zurückzuführen.

Wir haben zwei solche Beziehungen kennen gelernt, die wir in den Gleichungen (I) und (II) des § 39 ausgesprochen haben. Von welcher der beiden wir ausgehen, ist im Prinzip gleichgültig; das Resultat für die Einheiten wird sich nach beiden gleich ergeben. Zweckmäßig aber ist es, eine solche Gleichung zu wählen, die von den Größen, deren Einheiten wir auf andere zurückführen wollen, nur eine enthält. Wir können statt einer dieser Gleichungen auch eine aus ihnen abgeleitete wählen, um die magnetischen und elek-



trischen Einheiten ineinander überzuführen; auch dann werden wir zu dem gleichen Resultate kommen. Die historische Entwicklung der Maßsysteme ist in der Tat von einer solchen abgeleiteten Gleichung, der des Magnetfeldes elektrischer Ströme, ausgegangen, nämlich in folgender Weise:

6. Wenn in der Tangentenbussole vom Radius a ein elektrischer Strom J fließt, so herrscht in ihrem Mittelpunkte (§ 40, 3.) ein Magnetfeld

$$M = \frac{J}{2ca}, \tag{1}$$

Messen wir J und M im Gaußschen Maßsystem, so ergibt sich, wie wir gesehen haben, der Wert der Konstanten c zu

$$c = c_0 = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}.$$ [1]

Wir können aber auch für eine der beiden Größen M oder J das Gaußche Maßsystem fallen lassen, über die Konstante c willkürlich verfügen, indem wir etwa $c = 1$ und ohne Dimensionen annehmen, und dadurch über die Einheiten der anderen der beiden Größen J oder M verfügen.

Das absolute „elektrostatische Maßsystem“ verfügt in dieser Weise über c und hält an dem Gaußschen Maßsystem für die elektrischen Größen, also für J fest.

Das absolute „elektromagnetische Maßsystem“ verfügt über c in gleicher Weise, hält aber am Gaußschen Maßsystem für die magnetischen Größen fest.

Das elektrostatische Maßsystem setzt damit das Magnetfeld als Einheit an, das im Mittelpunkte einer Tangentenbussole vom Durch-

---

1) Die Tatsache, daß dieser Wert, wie bereits erwähnt, gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum ist, und die Tatsache, daß sich dieser Wert aus theoretischen Ableitungen auch als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Störungen im Vakuum ergibt, haben Maxwell zu der Hypothese geführt, die Lichtwellen als elektromagnetische Schwingungen sehr hoher Frequenz aufzufassen. In den glänzenden Experimentaluntersuchungen an elektromagnetischen Wellen, die Heinrich Hertz ausgeführt hat, findet diese Hypothese eine wesentliche Unterstützung.

Heinrich Hertz ist als Sohn des Senators Dr. Gustav Hertz am 22. Februar 1857 in Hamburg geboren und am 1. Januar 1894 in Bonn gestorben. Hertz studierte in Berlin und München, promovierte 1880 in Berlin und wurde darauf Assistent bei Helmholtz. 1883 habilitierte er sich in Kiel, wurde 1885 Professor der Physik an der technischen Hochschule in Karlsruhe und 1889 ordentlicher Professor der Physik an der Universität Bonn. Von da an datieren seine erwähnten Untersuchungen über die elektrischen Wellen, die den Namen des so jung verstorbenen unsterblich gemacht haben.

messer $2a = 1$ cm von einem Strome in der Tangentenbussole erzeugt wird, der im Gaußschen Maßsystem die Einheit besitzt.

Das elektromagnetische Maßsystem setzt den Strom als Einheit an, der im Mittelpunkte der gleichen Tangentenbussole das in Gaußschen Einheiten gemessene Einheitsfeld erzeugt.

Das elektrostatische Maßsystem.

7. Wir wollen alle Größen, wenn sie in elektrostatischen Einheiten gemessen sind, mit dem Index $^{(e)}$ versehen (z. B. $H^{(e)}$), während dieselben Größen in Gaußschen Einheiten gemessen diesen Index nicht führen sollen. Die elektrostatischen Einheiten selber bezeichnen wir mit Es, die Gaußschen mit Eg, so daß diese Zeichen allgemein alle Einheiten der betreffenden Systeme, also z. B. die der Feldintensität, des Potentials, der Kapazität u. s. w., umfassen. Welche von diesen Einheiten speziell gemeint sind, wird in den einzelnen Fällen nicht mißverstanden werden können.

Die Buchstaben $H^{(e)}$, H, $\varphi^{(e)}$, φ u. s. w. sollen je nach Bedarf die Zahlenwerte von Feldintensität, Potential u. s. w. oder aber auch diese Größen mit ihren Einheiten vorstellen. Auch darin wird eine Verwechslung nicht möglich sein.

8. Wir gehen von der Gleichung (I) des § 39, und speziell in der Form (I′) aus, in der wir E senkrecht zu v und $\varphi = \pi/2$ annehmen:

(I′) $$H = \frac{\varepsilon E v}{c}.$$

Die analoge Gleichung (II′), die wir auch verwerten werden, lautet:

(II′) $$E = \frac{\mu H v}{c}.$$

Hierin ist v eine Verschiebungsgeschwindigkeit, $n = \varepsilon E v$, $m = \mu H v$ sind die Kraftlinienzahlen, die eine zu E und v resp. H und v senkrechte Längeneinheit in der Zeiteinheit durchsetzen. ε, μ sind Dielektrizitätskonstante und Permeabilität, E und H elektrische und magnetische Feldintensität.

Nach den Prinzipien des elektrostatischen Maßsystems wird in diesen Gleichungen

$$c = 1, \quad \varepsilon^{(e)} = \varepsilon, \quad E^{(e)} = E$$

gesetzt, so daß aus (I′)

$$H^{(e)} = \varepsilon^{(e)} E^{(e)} v = \varepsilon E v$$

wird. Im Gaußschen Maßsystem wird

$$H = \frac{\varepsilon E v}{c_0}.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt also

(2) $$H^{(e)} = c_0 H.$$

Die Dimensionen von $H^{(e)}$ sind demnach

$$H^{(e)} = [c_0][H] = [\nu]^{\frac{1}{2}}[l]^{\frac{1}{2}}[t]^{-2},$$

wenn $[\nu]$ die Dimension einer Masse bedeutet; die Einheit von $H^{(e)}$ wird

(3) $H^{(e)}$: $$\text{Es} = 1 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{-2}.$$

Nach Gleichung (2) werden aus einer Gaußschen Einheit, also wenn $H = 1$ Eg wird,

$$h = c_0$$

elektrostatische Einheiten. Es ist

H: $$1 \text{ Es} = \frac{1}{c_0} \text{ Eg},$$

(4) $$\frac{\text{Eg}}{\text{Es}} = c_0.$$

Die Gaußsche Einheit für die magnetische Feldintensität steht zu der elektrischen Einheit in dem Verhältnis c_0, mit anderen Worten: Die Gaußsche Einheit der magnetischen Feldintensität ist das $3 \cdot 10^{10}$-fache der elektrostatischen.

9. Der Wert, den wir im elektrostatischen Systeme der Permeabilität $\mu^{(e)}$ zuzuschreiben haben, folgt aus Gleichung (II'), wenn wir wieder $c = 1$ setzen. Dann wird

$$E^{(e)} = \mu^{(e)} H^{(e)} v,$$

und damit

$$\frac{\mu H}{c_0} = \mu^{(e)} H^{(e)},$$

oder wegen (2)

(5) $$\mu^{(e)} = \frac{\mu}{c_0^{\,2}};$$

ihre Einheit wird die eines reziproken Geschwindigkeitsquadrates.

Für das Vakuum wird z. B.

$$4\pi\mu = 4\pi\mu_0 = 1,$$

also

(6) $$4\pi\mu_0^{(e)} = \frac{1}{c_0^{\,2}} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^2}.$$

10. Die elektrostatischen Einheiten der übrigen magnetischen und elektromagnetischen Größen folgen aus diesen Einheiten in der

gleichen Weise, wie wir sie aus den Gaußschen Einheiten früher abgeleitet haben. So folgt die Einheit der magnetischen Menge m z. B. aus der Definition der magnetischen Feldintensität (§ 38, 1., § 28, (1)) im Gaußschen System:

$$H = \frac{1}{4\pi\mu}\frac{m}{r^2}. \tag{7}$$

Halten wir an dieser Definition fest, so lautet sie in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt:

$$H^{(e)} = \frac{1}{4\pi\mu^{(e)}}\frac{m^{(e)}}{r^2}.$$

Mit Hilfe von (2) und (5) wird daraus

$$c_0 H = \frac{c_0{}^2}{4\pi\mu}\frac{m^{(e)}}{r^2}, \tag{8}$$

und aus (7) und (8) folgt nun

$$m^{(e)} = \frac{1}{c_0} m. \tag{9}$$

Daraus folgen nach § 38, 1. und nach § 27, 6. die Dimensionen für $m^{(e)}$

$$[m^{(e)}] = [\nu]^{\frac{1}{2}}[l]^{\frac{1}{2}}$$

und die Einheit:

(10) m: $$1 \text{ Es} = 1 \text{ gr}^{\frac{1}{2}} \text{ sec}^{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir in (9) $m = 1$, so folgt, daß eine Gaußsche Einheit gleich

$$h = \frac{1}{c_0}$$

elektrostatischen Einheiten wird, also ist

(11) m: $$1 \text{ Es} = c_0 \text{ Eg}.$$

11. Die Einheit des magnetischen Potentials findet man in ähnlicher Weise.

Die magnetische Energie behält ihre Einheit auch im elektrostatischen System. Denn sie wird (§ 38, 1. und § 36, 12.) in einem Raumelement τ

$$\tfrac{1}{2}\mu H^2\tau = \tfrac{1}{2}\mu^{(e)} H^{(e)2}\tau,$$

wie die Gleichungen (2), (5) lehren. Die Energie wird also nach wie vor in Erg gemessen.

Das elektromagnetische Maßsystem.

12. Wir setzen wieder $c = 1$, und behalten für die H und μ die Einheiten des Gaußschen Systems bei. Dann folgt aus Gleichung (II')



$$E^{(m)} = \mu H v,$$
$$E^{(m)} = c_0 E,$$

also die analoge Gleichung, wie wir sie für $H^{(e)}$ gefunden haben. Der Index ${}^{(m)}$ soll die in elektromagnetischen Einheiten (Em) gemessenen Größen bezeichnen. Es wird dementsprechend

$E^{(m)}$: $\quad$ Em $= 1\ \mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{sec}^{-2}$.

Der Wert der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon^{(m)}$ im elektromagnetischen Maßsystem ergibt sich aus Gleichung (I′) ebenfalls analog $\mu^{(e)}$, so daß im Vakuum

$$4\pi\,\varepsilon_0{}^{(m)} = \frac{1}{c_0{}^2}\,\frac{\mathrm{sec}^2}{\mathrm{cm}^2}$$

wird.

Die magnetischen Größen behalten die Gaußschen Einheiten.

Die elektrische Energie behält die Einheit 1 Erg.

13. Die Tabelle Seite 308 enthält eine Zusammenstellung der elektrischen, magnetischen und elektromagnetischen Einheiten in den drei Maßsystemen, ferner eine Kolumne zur Umrechnung der Zahlenwerte einer in einem Maßsystem gemessenen Größe auf den Zahlenwert derselben in einem anderen Maßsysteme gemessenen Größe, dann eine Kolumne mit den Verhältniszahlen zwischen den Einheiten des Gaußschen und denen der zwei anderen Maßsysteme, und schließlich eine Kolumne enthaltend die gebräuchlichen technischen Einheiten. In der Tabelle ist unser c_0 der Einfachheit halber durch c ersetzt.

Es bedeutet hierin Eg eine Einheit im Gaußschen, Es eine Einheit im elektrostatischen, Em eine Einheit im elektromagnetischen Maßsystem. Die Zahlen der dreimal drei ersten Kolumnen sind die Exponenten der darüber stehenden Einheiten des Gramm-Zentimeter-Sekunden-Systems, so daß z. B. die Gaußsche Einheit der Elektrischen Feldintensität die Benennung

$$1\ \mathrm{Eg} = 1\ \mathrm{gr}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{sec}^{-1}$$

bekommt.

14. Die technischen Einheiten verdanken ihre Einführung Zweckmäßigkeitsgründen. Die in der Praxis vorkommenden elektrischen und magnetischen Größen, Stromstärke, Potential, Widerstand u. s. w., sind von solchen Größenordnungen, daß sie in den absoluten Maßsystemen durch unbeholfen große oder kleine Zahlen ausgedrückt werden müßten. Aus demselben Grunde verwendet man bei Landvermessung auch nicht das Zentimeter, sondern das Kilometer.

Das absolute elektromagnetische Maßsystem hat W. Weber ursprünglich nicht auf Zentimeter, Gramm und Sekunde, sondern auf Millimeter, Milligramm und Sekunde aufgebaut.

	Eg			Es			Em				$\frac{Eg}{Es}$	$\frac{Eg}{Em}$	
	gr	cm	sec	gr	cm	sec	gr	cm	sec				
Elektr. Feldintensität . .	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	$E = E^{(e)} = \frac{1}{c} E^{(m)}$	1	c	
Magnet. Feldintensität .	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$H = \frac{1}{c} H^{(e)} = H^{(m)}$	c	1	1 Gauß = 1 Eg
Dielektrizitätskonstante	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	$\varepsilon = \varepsilon^{(e)} = c^2 \varepsilon^{(m)}$	1	$\frac{1}{c^2}$	
Permeabilität	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	$\mu = c^2 \mu^{(e)} = \mu^{(m)}$	$\frac{1}{c^2}$	1	
Elektrische Ladung . . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$e = e^{(e)} = c e^{(m)}$	1	$\frac{1}{c}$	1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ Es = 10^{-1} Em
Magnetische Ladung . .	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	$m = c m^{(e)} = m^{(m)}$	$\frac{1}{c}$	1	(Kraftlinienfluß: 1 Maxwell = 1 Em)
Elektrisches Potential / Elektromotorische Kraft	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	$\varphi = \varphi^{(e)} = \frac{1}{c} \varphi^{(m)}$	1	c	1 Volt = 1/300 Es = 10^8 Em
Magnetisches Potential .	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\psi = \frac{1}{c} \psi^{(e)} = \psi^{(m)}$	c	1	
Elektr., magn. Energie .	1	2	-2	1	2	-2	1	2	-2	$W = W^{(e)} = W^{(m)}$	1	1	
Kapazität	0	1	0	0	1	0	0	-1	2	$C = C^{(e)} = c^2 C^{(m)}$	1	$\frac{1}{c^2}$	1 Farad = $9 \cdot 10^{11}$ Es = 10^{-9} Em
Magnetisches Moment .	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	-1	$M = c M^{(e)} = M^{(m)}$	$\frac{1}{c}$	1	
Leitfähigkeit	0	0	-1	0	0	-1	0	-2	1	$\lambda = \lambda^{(e)} = c^2 \lambda^{(m)}$	1	$\frac{1}{c^2}$	
Widerstand	0	-1	1	0	-1	1	0	1	-1	$w = w^{(e)} = \frac{1}{c^2} w^{(m)}$	1	c^2	1 Ohm = $\frac{1}{9} 10^{-11}$ Es = 10^9 Em
Stromstärke	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$J = J^{(e)} = c J^{(m)}$	1	$\frac{1}{c}$	1 Ampère = $3 \cdot 10^9$ Es = 10^{-1} Em
Stromdichte	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$i = i^{(e)} = c i^{(m)}$	1	$\frac{1}{c}$	
Induktionskoeffizient . .	0	-1	2	0	-1	2	0	1	0	$p = p^{(e)} = \frac{1}{c^2} p^{(m)}$	1	c^2	1 Henry = $\frac{1}{9} 10^{-1}$ Es = 10^9 Em
Stromleistung	1	2	-3	1	2	-3	1	2	-3	$W = W^{(e)} = W^{(m)}$	1	1	1 Watt = 10^7 Es = 10^7 Em
c		$= 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$			$= 1$			$= 1$					
$4\pi\varepsilon_0$		$= 1$			$= 1$			$= \frac{1}{9} 10^{-20} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^2}$					
$4\pi\mu_0$		$= 1$			$= \frac{1}{9} 10^{-20} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^2}$			$= 1$					

In England waren dann in der Technik schon seit längerer Zeit als Einheit der Stromstärke das 10-fache, als Einheit des Widerstandes das 10^{10}-fache der entsprechenden Weberschen Einheiten gebräuchlich geworden.

Der Pariser Elektrikerkongreß im Jahre 1881 gab der von England eingeführten Einheit der Stromstärke den Namen „1 Ampère".

Auf Vorschlag der „British Association" erhielt ebenso das 10^{10}-fache der Weberschen Einheit des Widerstandes den Namen „1 theoretisches Ohm".

Es war wünschenswert, die Widerstandseinheit durch den Widerstand eines leicht reproduzierbaren Körpers zu definieren. Deshalb hatte schon Siemens als Einheit den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt und 100 cm Länge bei einer Temperatur von 0^0 als Einheit gebraucht; und diese Einheit führt jetzt noch den Namen „1 Siemenseinheit". Da ein „theoretisches Ohm" nahezu 1,06 Siemenseinheiten beträgt, so wurde von dem Pariser Kongreß eine Einheit „1 legales Ohm" als der Widerstand einer Quecksilbersäule von 106 cm Länge und 1 qmm Querschnitt festgelegt.

Der Elektrikerkongreß in Chicago hat dann im Jahre 1893 auf Vorschlag der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Berlin eine Widerstandseinheit definiert, die dem theoretischen Ohm noch näher kommt, das „internationale Ohm", das den Widerstand einer Quecksilbersäule von 106,3 cm Länge und 1 qmm Querschnitt bildet.

Die übrigen technischen Einheiten lassen sich aus diesen beiden leicht ableiten. So ist z. B. die Elektrizitätseinheit 1 Coulomb die vom Strome 1 Ampère in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Stromleiters beförderte Elektrizitätsmenge. Die Potentialdifferenz 1 Volt ist diejenige Potentialdifferenz, die an den Enden eines Leiters von 1 Ohm Widerstand erforderlich ist, um den Strom 1 Ampère in dem Leiter zu erzeugen.

Nach diesen Ableitungen folgt, was man aus der Tabelle auch bestätigt findet, daß die technischen Einheiten ein 10^n-faches der elektromagnetischen sein müssen, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

DRITTES BUCH.

MAXIMA UND MINIMA.

Sechster Abschnitt.

Geometrische Maxima und Minima.

§ 44. Maxima und Minima.

1. Wenn von zwei ebenen Flächenstücken das eine ein Teil des anderen oder mit einem Teil des anderen kongruent ist, so hat das erste einen kleineren Flächeninhalt als das zweite, und es ist eine Aufgabe der Geometrie, unter einer gegebenen Menge von Figuren die zu suchen, die den größten oder kleinsten Flächeninhalt hat. Kann man die Flächeninhalte durch Maßzahlen ausdrücken, so kommt die Aufgabe auch darauf hinaus, unter einer genau definierten Zahlenmenge die größte oder kleinste zu ermitteln. Und ähnlich verhält es sich, wenn es sich nicht um Flächen, sondern um Linienlängen, z. B. den Umfang von Figuren handelt.

Eine Größe, die unter einer gegebenen Menge ein Größtes oder ein Kleinstes ist, nennt man auch ein Extremum (extremen Wert). Zur Bestimmung solcher Extreme bieten sich nach dem eben Gesagten zwei Wege, der geometrische oder synthetische und der arithmetische oder analytische.

Es ist besonders Steiner[1]), der die Methoden zur Bestimmung von Extremen in der Geometrie durch rein geometrische Hilfsmittel, wobei nur die einfachsten Sätze der Euklidischen Geometrie zur Anwendung kommen, ausgebildet hat. Wir wollen hier einige charakteristische und besonders einfache Beispiele von Aufgaben dieser Art betrachten.

---

1) Jacob Steiner, geboren 1796 in Utzenstorf im Kanton Bern, gestorben 1863 in Berlin als Mitglied der Akademie der Wissenschaften. Die beiden Abhandlungen „Über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt“ wurden zuerst in französischer Übersetzung publiziert und sind im ursprünglichen deutschen Texte in Steiners gesammelten Werken Bd. II (Berlin, Reimer 1882) abgedruckt.

Vgl. E. Sturm, Bemerkungen und Zusätze zu Steiners Aufsätzen über Maximum und Minimum, Crelles Journal Bd. 96 (1884).



2. Unter allen Dreiecken mit gleicher Basis und gleichem Umfange hat das gleichschenklige den größten Flächeninhalt.

Es sei in der Figur 170 $AC = CB$ und $AD + BD = AC + BC$.

Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt von ABC größer ist als der von ABD.

Zunächst muß der Punkt D außerhalb des Dreiecks ABC fallen, denn für jeden inneren Punkt D wäre $AD + DB$ kleiner als $AC + CB$,[1]) und aus demselben Grunde muß C außerhalb ABD liegen. Es haben also die beiden Dreiecke das Stück ABE gemeinschaftlich. Da nun $\sphericalangle CAB = CBA$, also $\sphericalangle EAB < EBA$ ist, so ist $AE > EB$, und wenn wir also $EF = EB$ machen, so fällt F zwischen A und E.

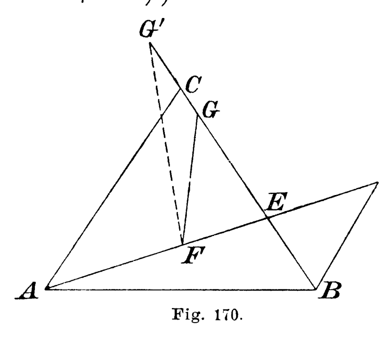


Fig. 170.

Nun machen wir $EG = ED$, und haben zu beweisen, daß G zwischen E und C fällt.

Nach der Konstruktion ist das Dreieck FEG kongruent mit BED und folglich ist

$$FG = DB.$$

Wenn wir nun von der Gleichung

$$AC + BC = AD + BD$$

die aus der Konstruktion folgende

$$BG = FD$$

subtrahieren, so folgt:

$$\begin{aligned} AC + BC - BG &= AD + BD - FD \\ &= AF + BD \\ &= AF + FG. \end{aligned}$$

1) Da in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte Seite, so ist, wenn D ein innerer Punkt ist,

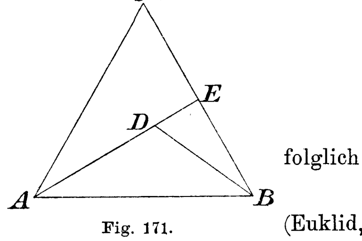


Fig. 171.

$$AC + CE > AE,$$
$$AC + CB > AE + EB,$$
$$DE + EB > BD,$$
$$AE + EB > AD + DB,$$

folglich

$$AC + CB > AD + DB.$$

(Euklid, Elemente Buch I, Nr. 21.)

Wenn nun G außerhalb BC, etwa nach G', fällt, so ist $BG - BC = GC$, und es folgt

$$AC = AF + FG + GC,$$

was dem Satze widerspricht, daß die gerade Linie AC die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A, C ist. Es kann also G nicht außerhalb BC fallen (nicht einmal in den Punkt C hinein). Wenn aber G innerhalb BC liegt, so ist $BC - BG = GC$ und die Gleichung $AC + CG = AF + FG$ hat nichts widersprechendes.

Es ist hiernach das Dreieck EFG, was mit EBC kongruent ist, ein Teil von EAC und also kleiner an Fläche als dieses. Daher ist auch, wenn man beiderseits AEB hinzufügt,

$$\text{Fläche } ACB > ADB,$$

was bewiesen werden sollte.

3. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleicher Fläche hat das gleichschenklige den kleinsten Umfang.

Dieser Satz läßt sich durch ein indirektes Schlußverfahren aus dem vorigen ableiten.

Hat ACB denselben Inhalt wie ADB, so kann $AD + DB$ nicht gleich $AC + BC$ sein, weil sonst ein Widerspruch gegen den vorigen Satz entstehen würde.

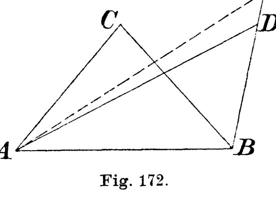


Fig. 172.

Es kann aber auch nicht

$$AD + DB < AC + BC$$

sein. Denn sonst könnte man einen Punkt D' außerhalb BD so annehmen, daß

$$AD' + BD' = AC + BC$$

wäre[1]); dann aber wäre der Flächeninhalt von $AD'B$ größer als der von ADB, also auch größer als der von ACB, was wieder dem vorigen Satz widerspricht.

4. Es ist eine gerade Linie G gegeben und zwei Punkte a, b, die auf derselben Seite dieser Geraden liegen. Es soll auf der Geraden ein Punkt x so bestimmt werden, daß die Summe der Entfernungen $\overline{ax} + \overline{bx}$ so klein als möglich werde.

Denkt man sich die Halbebene, in der a und b liegen, an der

1) Hierzu ist die einfache geometrische Aufgabe zu lösen, ein Dreieck zu konstruieren, von dem gegeben sind: die Grundlinie, ein Winkel an der Grundlinie und die Summe der beiden anderen Seiten.

Geraden G gespiegelt, so gehen a und b in die beiden symmetrisch gelegenen Punkte a' und b' über. Es ist dann für irgend einen Punkt y der Geraden $ay + by = ay + b'y$. Es ist aber ayb' eine gebrochene Linie, die die beiden Punkte a, b' verbindet, und diese Verbindung wird daher so kurz als möglich sein, wenn y in den Punkt x rückt, der mit ab' auf einer Geraden liegt. Dann ist aber der Winkel α, unter dem der Strahl ax gegen G geneigt ist, gleich dem Scheitelwinkel α', und dieser wegen der Symmetrie, gleich β, folglich auch $\alpha = \beta$.

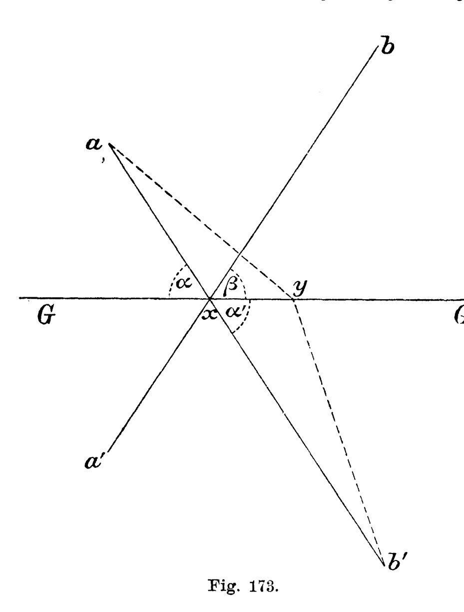


Fig. 173.

Der Punkt x liegt demnach so auf G, daß die beiden Strahlen ax und bx unter gleichen Winkeln gegen die Linie G geneigt sind, und es gibt nur einen solchen Punkt x. Denn rückt x nach links, so wächst α, während β abnimmt, und umgekehrt, wenn x nach rechts rückt. Um x zu konstruieren, verbinde man das Spiegelbild a' von a mit b.

Es ist dies das Gesetz, nach dem ein von a ausgehender Lichtstrahl an G nach b reflektiert wird.

Der Punkt x ist z. B. auch der, an den eine von a abgestoßene Billardkugel den Rand des Billards treffen muß, um nach b zu gelangen (wenn die Billardkugel vollkommen elastisch ist und von der Reibung abgesehen wird).

5. Unter allen Dreiecken, die einem gegebenen spitzwinkligen Dreieck eingeschrieben sind, hat das Dreieck, dessen Ecken die Höhenfußpunkte des gegebenen Dreiecks sind, den kleinsten Umfang.

Das Dreieck der Höhenfußpunkte hat die Eigenschaft, daß je zwei seiner Seiten mit der Seite des gegebenen Dreiecks, in der sie sich treffen, gleiche Winkel bilden, und es ist das einzige dem gegebenen Dreieck eingeschriebene, das diese Eigenschaft hat. Denn die beiden rechtwinkligen Dreiecke $A\alpha C$ und $B\beta C$ (Fig. 174) sind, weil sie außer dem rechten noch den Winkel bei C gemeinschaftlich

haben, einander **ähnlich**. Folglich ist $\alpha C:\beta C = AC:BC$ und mithin sind auch die Dreiecke ABC und $\alpha\beta C$ einander ähnlich. Folglich ist der Winkel $C\beta\alpha$ bei β gleich dem Winkel B. Ebenso aber folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $A\beta\gamma$ und ACB, daß der Winkel $A\beta\gamma$ dem Winkel B gleich ist.

Nehmen wir aber andererseits an, es sei in einem Dreieck $\alpha\beta\gamma$,

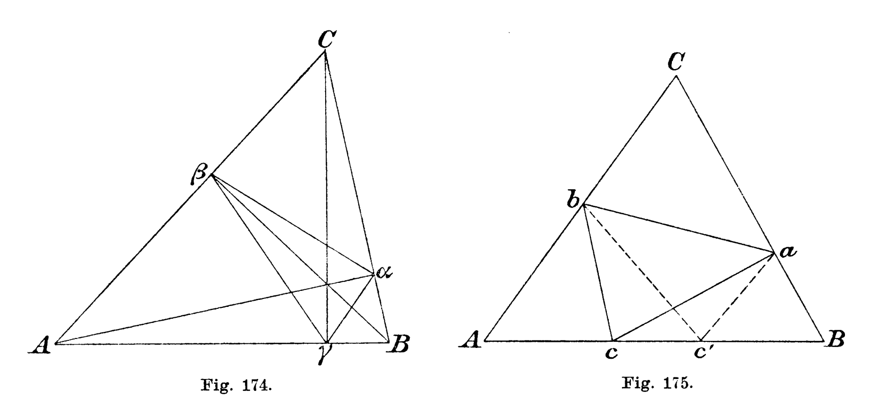


Fig. 174. Fig. 175.

von dem wir noch nicht voraussetzen wollen, daß es das Dreieck der Höhenschnittpunkte sei,

$$\sphericalangle\, \gamma\alpha B = \beta\alpha C = \alpha,$$
$$\sphericalangle\, \alpha\beta C = \gamma\beta A = \beta,$$
$$\sphericalangle\, \beta\gamma A = \alpha\gamma B = \gamma,$$

so folgt, da die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte $(=\pi)$ ist:

$$A + \beta + \gamma = \pi, \quad B + \gamma + \alpha = \pi, \quad C + \alpha + \beta = \pi,$$
$$A + B + C = \pi,$$

woraus:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

also:

$$\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = C.$$

Daraus folgt, daß die drei Seiten $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ den Seiten des Dreiecks der Höhenfußpunkte parallel sind, und da beide Dreiecke dem gegebenen Dreieck eingeschrieben sind, so müssen sie zusammenfallen.

Jetzt läßt sich also der Satz 5. so beweisen (Fig. 175):

Nehmen wir an, das dem Dreieck ABC eingeschriebene Dreieck vom kleinsten Umfange sei nicht das Dreieck der Höhenfußpunkte $\alpha\beta\gamma$, sondern ein anderes abc. Dann werden wenigstens an einer der drei Ecken, etwa an c, die beiden Winkel bcA und acB verschieden sein.

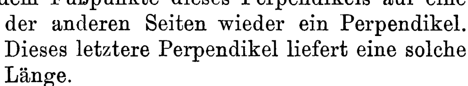
Dann läßt sich aber ein von c verschiedener Punkt c' auf AB finden, so daß $\sphericalangle bc'A = ac'B$ wird, und nach 4. ist dann $bc' + ac' < bc + ac$ und folglich auch der Umfang von abc' kleiner als der von abc. Unsere Annahme, daß abc das eingeschriebene Dreieck kleinsten Umfanges sei, war also unmöglich, und es kann nur das Dreieck der Höhenfußpunkte das Minimum des Umfanges ergeben.

6. Zu diesem Beweise ist aber eine wichtige Bemerkung zu machen.

Wir haben bewiesen, daß jedes eingeschriebene Dreieck, das nicht das Dreieck der Höhenfußpunkte ist, an Umfang verkleinert werden kann. Der Beweis unseres Satzes ist also nur dann vollständig, wenn feststeht, daß es ein Minimum des Umfanges gibt. Man kann leicht eine Länge angeben, unter die der Umfang eines eingeschriebenen Dreiecks nicht heruntersinken kann[1]), und die naive Anschauung ist geneigt, daraus auf die Existenz eines Minimums zu schließen. Es folgt aber daraus (wie wir in Bd. I § 23 der 1ten, § 25 der 2ten Auflage gesehen haben) in aller Strenge nur die Existenz einer unteren Grenze und wir haben in der Tat auch in unserem Falle noch nicht bewiesen, daß nicht noch ein Dreieck von kleinerem Umfange als das Dreieck der Höhenfußpunkte dem gegebenen Dreieck eingeschrieben werden kann.

Bis vor kurzem hat man an diesem Beweisverfahren keinen Anstoß genommen, und ähnliche Schlüsse finden sich bei Gauß, Cauchy und vor allem in dem berühmten „Dirichletschen Prinzip" von Riemann. Auch Steiner stützt sich darauf, obwohl ihm, nach mündlicher Überlieferung (Geiser, Zur Erinnerung an Jacob Steiner. Zürich 1874) Dirichlet Einwendungen dagegen gemacht hat, und obwohl er solchen Beweisen, in denen direkt geometrisch die Existenz des Extremums nachgewiesen ist, den Vorzug gibt.

---

1) Man fälle z. B. an einer Ecke des spitzwinkligen Dreiecks ein Perpendikel auf die Gegenseite und von dem Fußpunkte dieses Perpendikels auf eine  der anderen Seiten wieder ein Perpendikel. Dieses letztere Perpendikel liefert eine solche Länge.

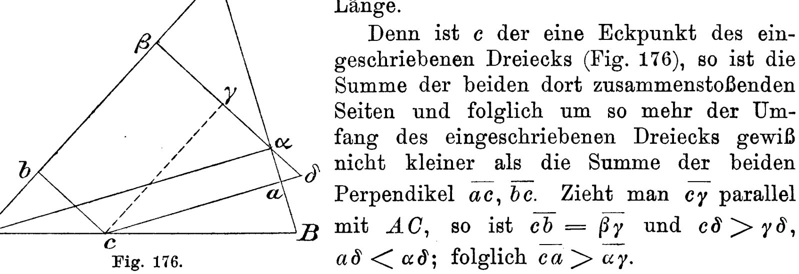


Fig. 176.

Denn ist c der eine Eckpunkt des eingeschriebenen Dreiecks (Fig. 176), so ist die Summe der beiden dort zusammenstoßenden Seiten und folglich um so mehr der Umfang des eingeschriebenen Dreiecks gewiß nicht kleiner als die Summe der beiden Perpendikel $\overline{ac}, \overline{bc}$. Zieht man $\overline{c\gamma}$ parallel mit AC, so ist $\overline{cb} = \overline{\beta\gamma}$ und $c\delta > \gamma\delta$, $a\delta < \alpha\delta$; folglich $\overline{ca} > \overline{\alpha\gamma}$.

Von dieser Art und daher vollständig einwandfrei sind die Beweise der Sätze, die wir in Nr. 3, 4, 5 gegeben haben. In anderen Fällen lassen sich solche strenge geometrische Beweise finden, freilich oft nicht ohne die schöne Einfachheit und Übersichtlichkeit preiszugeben.

7. Von dem Satze über das Dreieck der Höhenfußpunkte, den wir in Nr. 5 nur unvollständig bewiesen haben, hat Schwarz[1]) einen schönen Beweis gegeben. Will man vollkommen einwandfreie Beweise für die komplizierteren Fälle geben, so kommt man auf große Schwierigkeiten. Wir werden nun im folgenden einen anderen Weg einschlagen, bei dem wir uns einer gemischten, teils geometrischen, teils analytischen Methode bedienen wollen.

§ 45. Maxima und Minima. Analytische Behandlung.

1. Wenn y eine quadratische Funktion von x ist:

$$y = ax^2 + 2bx + c, \tag{1}$$

worin a, b, c gegebene reelle Zahlen sind, a von Null verschieden, während x und folglich auch das davon abhängige y eine Veränderliche ist, so läßt sich die Frage nach dem größten oder kleinsten Werte von y sehr einfach erledigen. Es folgt nämlich aus (1)

$$ay = (ax + b)^2 + ac - b^2, \tag{2}$$

und hieraus schließt man, da $(ax + b)^2$ niemals negativ sein kann, daß der kleinste Wert von ay gleich $ac - b^2$ ist, und daß dieser kleinste Wert erreicht wird, wenn $x = -b:a$ ist.

Einen größten Wert hat ay nicht, da $(ax + b)^2$ größer als jede noch so große Zahl wird, wenn x hinlänglich groß (positiv oder negativ) genommen wird.

Ist nun das gegebene a positiv, so hat ay dann seinen kleinsten Wert, wenn y seinen kleinsten Wert hat. Ist aber a negativ, so erhält ay seinen kleinsten Wert, wenn y seinen größten Wert hat. Daraus folgt:

Ist a positiv, so hat das durch (1) bestimmte y ein

1) In den Anmerkungen zu Steiners gesammelten Werken (Bd. II, S. 728) ist dieser Beweis irrtümlich Steiner zugeschrieben. Vgl. Schwarz gesammelte Werke Bd. II, S. 349.

Minimum, ist a negativ, so hat y ein Maximum. Das Extremum hat den Wert

$$y_0 = \frac{ac - b^2}{a}$$

und wird erreicht, wenn x den Wert

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

erhält.

2. Man kann diesem Resultat eine etwas andere Fassung geben: Wenn man (1) als eine quadratische Gleichung für x betrachtet, so gibt die Auflösung zwei Wurzeln:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{ay + b^2 - ac}}{a}. \tag{3}$$

Diese Wurzeln können nun, je nach dem Werte von y, reell oder imaginär sein. Wenn wir also fragen, für welchen Wert von x ein gegebener Wert von y stattfindet, so erhalten wir aus (3) die Antwort, daß es zwei solcher Werte gibt, wenn

$$ay > ac - b^2,$$

und keinen, wenn

$$ay < ac - b^2$$

ist. Wenn aber

$$y = \frac{ac - b^2}{a} = y_0$$

ist, so ergibt uns (3) nur den einen Wert $x = x_0$. Es ist also y_0, je nach dem Vorzeichen von a, der größte oder kleinste Wert, den y für ein reelles x annehmen kann.

Betrachtet man x und y als rechtwinklige Koordinaten, so stellt die Gleichung (1) eine Parabel dar (Bd. II, § 69) und die analytische Geometrie gibt uns eine einfache Anschauung dieser Verhältnisse (vgl. Bd. I, § 92 der 1ten, § 102 der 2ten Auflage).

3. Wir geben einige Beispiele für die Bestimmung eines Extremums nach diesen Grundsätzen.

Es sei ein spitzwinkliges Dreieck gegeben mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei A, B, C (Fig. 177). In dieses Dreieck sei ein Rechteck $mnpq$ derart eingeschrieben, daß zwei seiner Ecken m, n auf der Grundlinie c, die beiden anderen p, q auf den Seiten b, a liegen. Dieses Rechteck ist vollständig bestimmt, sobald einer seiner Eckpunkte, z. B. m oder p, gegeben ist.

Lassen wir den Punkt p nach A fallen, so wird das Rechteck unendlich niedrig und artet in die Grundlinie selbst aus. Es hat

dann den Flächeninhalt Null. Lassen wir dagegen den Punkt p nach C fallen, so wird das Rechteck unendlich schmal und hat also wieder den Flächeninhalt Null. Dazwischen gibt es eine Lage, wo das Rechteck ein Maximum von Fläche hat. Diese Lage soll gefunden werden.

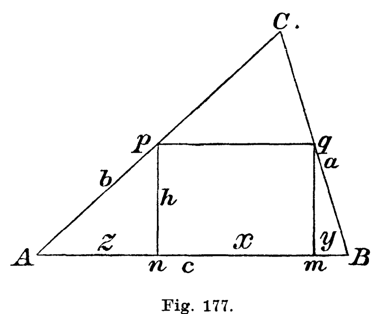


Fig. 177.

Wir bezeichnen die drei Abschnitte der Grundlinie Bm, mn, nA mit y, x, z und mit h die Höhe des Rechtecks. Es ist dann

(4) $$x + y + z = c$$

und der Flächeninhalt v des Rechtecks:

$$v = hx.$$

Außerdem ergibt sich aus den rechtwinkligen Dreiecken (pnA), (qmB):

$$y = h \operatorname{cotg} \beta, \quad z = h \operatorname{cotg} \alpha,$$

und folglich aus (4)

$$h(\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta) = c - x.$$

Es ist aber (Bd. II, § 28)

$$\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta},$$

oder, weil $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, also $\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma$ ist,

$$h = (c - x) \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Demnach ist die Fläche des Rechtecks

(5) $$v = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} x(c - x).$$

Wird nach dem Werte von x gefragt, der einen gegebenen Wert von v hervorbringt, so hat man die quadratische Gleichung (5) oder

$$x^2 - cx + \frac{v \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = 0$$

zu lösen, deren beide Wurzeln

(6) $$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{v \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}}$$

sind, und man schließt daraus, daß

$$v_0 = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{4 \sin \gamma}$$

der Maximalwert von v ist. Bedenkt man noch, daß

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises ist (Bd. II, § 28, 3.), so erhält man auch

$$v_0 = \frac{abc}{8r},$$

und da dieser Ausdruck sich nicht ändert, wenn a, b, c beliebig permutiert werden, so ist der Wert des Maximums derselbe, welche der drei Seiten des Dreiecks man auch als Basis nehmen mag.

Der dem Maximum entsprechende Wert von x ergibt sich aus (6) gleich $c/2$, und da hiernach $\overline{pq}$ auch gleich $c/2$ ist, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (ABC) und (pqC), daß die Punkte p, q in den Mitten der Seiten b, c liegen.

4. Ähnlich ist das folgende Beispiel.

Es sind in den Endpunkten A, B einer gegebenen Strecke (Fig. 178) zwei Senkrechte errichtet und zwischen ihnen ein Punkt C gegeben.

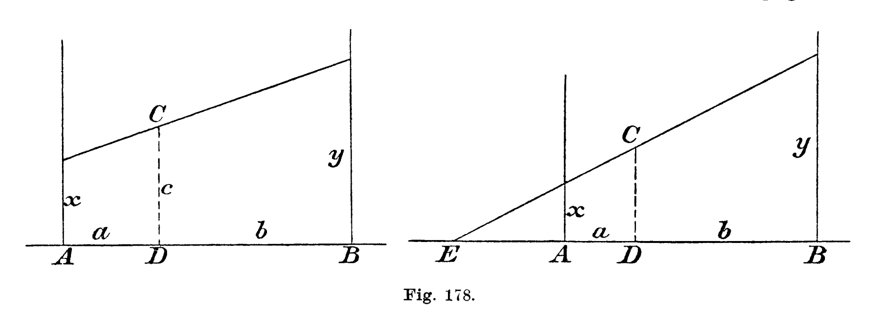


Fig. 178.

Man soll durch C eine gerade Linie so legen, daß das Rechteck aus den beiden Abschnitten x, y, die durch diese Linie auf den beiden Senkrechten abgeschnitten werden, einen gegebenen Flächeninhalt m habe. Es ist also

(7) $$xy = m.$$

Fällt man das Perpendikel $\overline{CD} = c$ auf AB und bezeichnet die Abschnitte auf $\overline{AB}$ mit a und b, so folgt aus den Ähnlichkeitssätzen:

$$a : b = c - x : y - c,$$

woraus

(8) $$ay + bx = c(a + b).$$

Aus den beiden Gleichungen (7), (8) ergibt sich

(9) $$(ay - bx)^2 = \sqrt{c^2(a+b)^2 - 4abm},$$

und wir erhalten also nur dann reelle Werte von x, y, wenn

$$4\,ab\,m \leqq c^2(a+b)^2$$

ist. Der größte Wert, den m hiernach haben kann, ist

$$m = \frac{c^2(a+b)^2}{4\,a\,b},$$

für den sich aus (9)

(10) $$x : y = a : b$$

ergibt.

Um die dem Maximum entsprechende Linie zu konstruieren, denke man sie sich bis zum Schnitt E mit $\overline{AB}$ verlängert. Kennt man den Punkt E, so kann man EC ziehen. Est ist aber

$$x : y = \overline{EA} : \overline{EB},$$

andererseits nach (10)

$$x : y = a : b = \overline{AD} : \overline{BD}.$$

Folglich teilen die Punkte E und D die Strecke $\overline{AB}$ innerlich und äußerlich in dem Verhältnis $a : b$, und E ist also der vierte harmonische Punkt zu AB und D.

§ 46. Maximum des Flächeninhaltes von Dreiecken und Vierecken.

1. Wir behandeln noch einige Beispiele, die uns in der Folge als Grundlage für allgemeinere Betrachtungen über Polygone dienen werden.

Zunächst nehmen wir das Beispiel, das wir schon früher (§ 44, 2.) nach der synthetischen Methode behandelt haben. Es sei von einem Dreieck der Umfang $2s$ und eine Seite a gegeben. Welches ist der größte Wert, den der Flächeninhalt annehmen kann? Sind b und c die beiden übrigen Seiten, so muß $b + c > a$, also $s - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ positiv sein, und wenn Δ der Flächeninhalt ist, so ist (Bd. II, § 31)

(1) $$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Im gleichschenkligen Dreieck mit demselben Umfang und derselben Basis a haben die beiden gleichen Seiten die Länge $\frac{1}{2}(b+c)$, und es ist also für dieses das Quadrat des Flächeninhaltes

$$\Delta_0{}^2 = s(s-a)\left(s - \frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2 s(s-a).$$

Hieraus ergibt sich

(2) $$\Delta_0{}^2 - \Delta^2 = (\Delta_0 - \Delta)(\Delta_0 + \Delta) = \tfrac{1}{4}s(s-a)(b-c)^2.$$

Diese Differenz ist aber stets positiv, folglich $\Delta_0 > \Delta$.

2. Die Formel (2) zeigt aber noch folgendes:

Ist in einem Dreieck die Differenz zweier Seiten $b-c$ dem absoluten Werte nach größer als eine positive Größe ε, so läßt sich der Flächeninhalt unter Beibehaltung von a und $b+c$ um mehr als eine von ε abhängige positive Größe ω vergrößern. Diese Größe ω hängt aber außer von ε auch noch von $s-a$ ab und nähert sich mit $s-a$ zugleich der Grenze Null.

Wir können z. B., da $\varDelta_0 + \varDelta < 2\varDelta_0 = \frac{1}{2} a\sqrt{s(s-a)}$ ist, nach (2)

$$\omega = \frac{\sqrt{s(s-a)}}{2a}\varepsilon^2$$

setzen.

3. Ein verwandter Satz ist der folgende:

Unter allen Dreiecken mit derselben Basis a und demselben Winkel α an der Spitze hat das gleichschenklige den größten Umfang.

Sind a, b, c die Seiten, α, β, γ die Winkel des Dreiecks, so ist nach dem Sinussatze

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$b + c = \frac{a(\sin\beta + \sin\gamma)}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\sin\alpha}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

und da $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$ ist,

$$b + c = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}. \tag{3}$$

Ist das Dreieck gleichschenklig, also $\beta = \gamma$ und $b = c = b_0 = c_0$, so ist

$$b_0 + c_0 = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

und wenn also $2s$ und $2s_0$ die Umfänge sind, so ist

$$s_0 - s = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1 - \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin^2\left(\frac{\beta-\gamma}{4}\right),$$

woraus zu schließen ist, daß $s_0 - s$ immer positiv ist. Man kann auch die Differenz $b - c$ der Seiten einführen. Es ist nämlich

$$b - c = \frac{2a}{\sin\alpha}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$= \frac{2a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4},$$

also, da $\cos\frac{\beta-\gamma}{4} < 1$ ist,

$$\left(\sin\frac{\beta-\gamma}{4}\right)^2 > \frac{(b-c)^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4a^2},$$

$$s_0 - s > \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{(b-c)^2}{4a},$$

und es gilt also auch hier der dem Satz 2. entsprechende Satz:

> Ist $b - c > \varepsilon$, so kann s unter Beibehaltung von a und α um mehr als eine positive Größe ω vergrößert werden.

4. Vergrößert man in dem Dreieck abc mit Beibehaltung der Grundlinie a und des Winkels β den Umfang von $2s$ auf $2s_0$, so vergrößert man gleichzeitig den Inhalt, etwa von $\varDelta$ auf $\varDelta'$. Nach dem Satze 1 ist aber dann $\varDelta'$ immer noch kleiner als der Flächeninhalt $\varDelta_0$ des gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundlinie a und dem Winkel α, und es ist also $\varDelta_0$ zugleich das Maximum unter den Flächeninhalten $\varDelta$.

Man kann dies aber auch aus der leicht abzuleitenden Formel:

$$\varDelta_0 - \varDelta = \frac{a^2}{2\sin\alpha}\sin^2\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$

schließen.

5. Aus vier gegebenen Strecken kann immer dann ein Viereck konstruiert werden, wenn die Summe je dreier Seiten größer ist als die dritte. Durch die vier Seiten ist aber das Viereck noch nicht eindeutig bestimmt, sondern es muß noch eine weitere Angabe dazu kommen; es kann etwa noch ein Winkel oder eine der Diagonalen gegeben sein. Wenn aber noch gefordert wird, daß das Viereck ein Kreisviereck sein soll, so ist, wie wir gesehen haben, (Bd. II, § 32) durch die Seiten das Viereck eindeutig bestimmt. Dabei ist zunächst vorausgesetzt, daß nicht nur die Seiten an sich, sondern auch ihre Reihenfolge gegeben sind.

Für den Flächeninhalt Θ eines Vierecks mit den Seiten a, b, c, d und der Summe ϑ zweier gegenüberliegender Winkel haben wir früher die Formel gefunden (Bd. II, § 32, (4))

$$(4) \qquad \Theta^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\vartheta}{2},$$

worin $2s = a+b+c+d$ der Umfang des Vierecks ist. Ist das Viereck ein Kreisviereck, so ist $\vartheta = \pi$, $\cos\frac{\vartheta}{2} = 0$, und folglich das Quadrat des Inhaltes

$$\Theta_0^{\,2} = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

woraus sich ergibt:

$$(5) \qquad \Theta_0^{\,2} - \Theta^2 = abcd\cos^2\frac{\vartheta}{2},$$

diese Differenz ist also niemals negativ, und nur dann gleich Null, wenn das Viereck Θ ein Kreisviereck ist. Es ist hierdurch der Satz bewiesen:

Unter allen Vierecken von gegebenen Seiten hat das Kreisviereck den größten Flächeninhalt. Weicht die Summe der gegenüberliegenden Winkel um mehr als eine gegebene Größe ε von zwei Rechten ab, so läßt sich der Flächeninhalt um mehr als eine von ε abhängige positive Größe ω vergrößern.

§ 47. Kreispolygone.

1. Unter einem Polygon (Vieleck, n-Eck) verstehen wir eine von geradlinigen Strecken begrenzte Figur, deren ganze Begrenzung man durchlaufen kann, wenn man sich von einem beliebigen Ausgangspunkte immer in demselben Sinne fortbewegt. Die begrenzenden

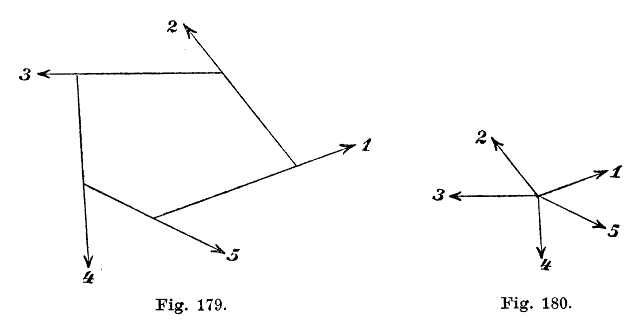


Fig. 179. Fig. 180.

Strecken heißen die Seiten des Polygons. Zwei Seiten stoßen in einer Ecke des Polygons zusammen.

Beim Umlaufen der Begrenzung ändert sich die Fortschrittsrichtung nur beim Übergange von einer Seite zur nächsten und zwar um einen Winkel, der kleiner als π ist. Man veranschaulicht sich diese Richtungsänderungen am besten, wenn man durch einen festen Punkt Parallelen zu der jeweiligen Fortschrittsrichtung legt (Fig. 179, 180).

Wenn die Richtungsänderung beim Umkreisen des Polygons immer in demselben Sinne geschieht, so heißt das Polygon konvex. Die Richtungsänderungen in jedem einzelnen Eckpunkte sind die Außenwinkel des Polygons. Die Polygonwinkel selbst sind die Supplemente dazu, und diese sind alle kleiner als π.

2. Ist man nach einem vollen Umlaufe der Begrenzung in die Ausgangsrichtung zurückgekehrt, so beträgt die Gesamtdrehung ein Vielfaches von 2π. Wenn diese Drehung gerade 2π beträgt, so heißt das Polygon einfach. Beträgt sie aber ein höheres Vielfaches $2m\pi$, so heißt das Polygon sternförmig oder überschlagen (Fig. 181). Das einfache konvexe Polygon ist auch durch die Eigenschaft definiert:

> Wenn man jede der Polygonseiten unbegrenzt verlängert, so daß durch sie die Ebene in eine positive und eine negative Hälfte zerfällt, so liegt das Polygon entweder ganz auf der positiven oder ganz auf der negativen Seite dieser Linie.

Sind bei dem überschlagenen n-Eck alle Außenwinkel einander gleich, so ist jeder von ihnen gleich $2m\pi/n$. Sind sie nicht alle gleich, so muß wenigstens einer darunter sein, der größer ist als dieser Mittelwert. Da aber dieser noch kleiner als π sein muß, so ist $2m\pi/n < \pi$ und folglich $m < \frac{1}{2}n$. Man kann also bei einem n-Eck nicht eine beliebige Anzahl von Umgängen machen. Es gibt z. B. kein überschlagenes Dreieck oder Viereck. Beim Fünfeck und Sechseck sind zwei Umgänge möglich, beim Siebeneck und Achteck bis zu drei u. s. f.

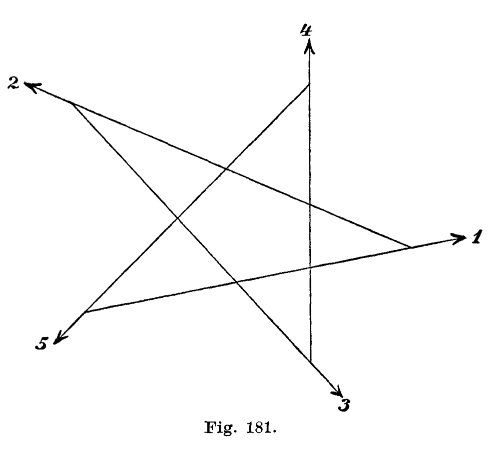


Fig. 181.

3. In jedem Polygon ist die längste Seite kürzer als die Summe aller übrigen.

Dies folgt daraus, daß die gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist.

4. Ein Polygon heißt einem Kreise eingeschrieben oder Kreispolygon, wenn alle seine Ecken auf der Kreisperipherie liegen. Ein solches Polygon läßt sich ohne Gestaltsänderung auf dem Kreise herumschieben, d. h. man kann eine Ecke in einen beliebigen Punkt der Peripherie legen und von da aus die Seiten der Reihe nach als Sehnen abtragen. Dabei kann man noch in einem oder dem entgegengesetzten Sinne herumgehen. Alle diese Polygone sind entweder kongruent oder spiegelbildlich gleich.

Wenn man die Seiten eines Kreispolygons beliebig untereineinander vertauscht, so erhält man neue Polygone, die demselben Kreise eingeschrieben werden können.

Denn denkt man sich die Segmente, die von den Polygonseiten und den zugehörigen Kreisbogen begrenzt sind, herausgeschnitten und beweglich (etwa von Papier), so kann man diese Segmente in beliebiger Reihenfolge wieder in die ursprüngliche Kreisperipherie einpassen; die Kreisbogen müssen immer die ganze Kreisperipherie ausfüllen, und die Sehnen ergeben dann ein eingeschriebenes Polygon.

5. Sind n Strecken gegeben, die der Bedingung genügen, daß jede von ihnen kleiner ist als die Summe der übrigen, so kann man, wenn n größer als 3 ist, immer unendlich viele Polygone finden, die diese Strecken zu Seiten haben.

Man überzeugt sich hiervon durch die vollständige Induktion. Sind nämlich $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ die gegebenen Strecken und a die größte unter ihnen, so ist

$$a < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

Man nehme nun eine Strecke b so an, daß

$$a - a_3 - \cdots - a_{n-1} < b < a_1 + a_2,$$

was immer möglich ist.

Ist dann n größer als 3, so kann man, wenn wir den zu beweisenden Satz für $n-1$ als erwiesen ansehen, aus den Seiten $a, b, a_3, \ldots, a_{n-1}$ ein $n-1$-Eck konstruieren, und wenn wir dann an b ein Dreieck mit den Seiten b, a_1, a_2 anlegen, so erhalten wir ein n-Eck mit den gegebenen Seiten.

Man stelle sich etwa vor, die gegebenen n Strecken seien aus starren Stäben gebildet, die so durch Gelenke miteinander verbunden sind, daß sie einen geschlossenen Ring bilden. Man kann dann diesem Ringe noch unendlich viele Gestalten geben. Es gilt aber nun der folgende Satz:



6. Ein einfaches konvexes Polygon mit gegebenen Seiten läßt sich immer einem aber auch nur einem Kreise einbeschreiben.

7. Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir die Bedingung dafür formulieren, daß ein Polygon einem Kreise eingeschrieben sei. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Mittelpunkt des Kreises in dem Polygon liegt oder außerhalb (Fig. 182, 183).

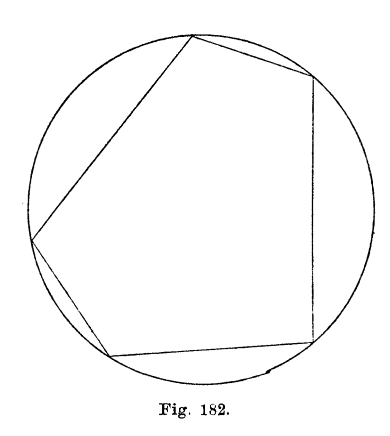


Fig. 182.

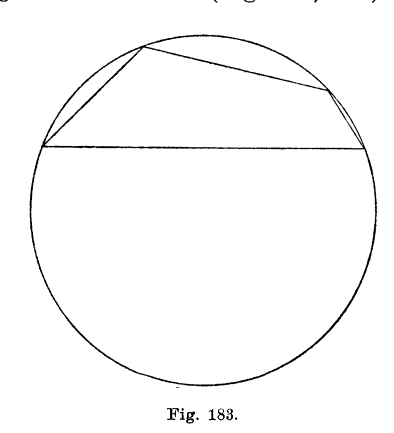


Fig. 183.

Im ersten Falle muß die Summe der Bogen, die über den einzelnen Seiten stehen, gleich der ganzen Kreisperipherie sein. Im zweiten Falle ist der Bogen über der größten Seite gleich der Summe der Bogen über den übrigen Seiten, wobei immer der Bogen zu nehmen ist, der kleiner ist als der Halbkreis.

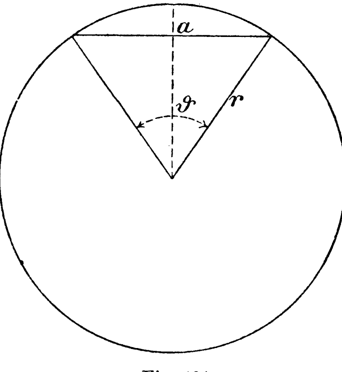


Fig. 184.

Wenn a eine Sehne des Kreises vom Radius r ist (Fig. 184), und ϑ der zugehörige Winkel (in Bogenmaß gemessen), so ist $a = 2r \sin \frac{\vartheta}{2}$ und daher

$$(1) \qquad \vartheta = 2 \arcsin \frac{a}{2r},$$

worin arc sin einen Winkel zwischen Null und $\pi/2$ bedeutet. Wenn also $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ die Seiten des Polygons sind und a die größte unter ihnen, so ist für den ersten Fall

$$(2) \qquad \arcsin \frac{a}{2r} + \arcsin \frac{a_1}{2r} + \cdots + \arcsin \frac{a_{n-1}}{2r} = \pi,$$

für den zweiten Fall

(3) $$\arcsin\frac{a}{2r} = \arcsin\frac{a_1}{2r} + \arcsin\frac{a_2}{2r} + \cdots + \arcsin\frac{a_{n-1}}{2r}.$$

Diese beiden Formeln schreiben wir abgekürzt, indem wir den Index i von 1 bis $n-1$ gehen lassen.

(4) $$\sum \arcsin\frac{a_i}{2r} = \pi - \arcsin\frac{a}{2r},$$

(5) $$\sum \arcsin\frac{a_i}{2r} = \arcsin\frac{a}{2r}.$$ [1]

8. Der Durchmesser $2r$ kann nicht kleiner sein als die Sehne a. Lassen wir also $2r$ von a bis Unendlich gehen, so geht $\sum \arcsin\frac{a_i}{2r}$ stets abnehmend von $\sigma = \sum \arcsin\frac{a_i}{a}$ bis Null und $\pi - \arcsin\frac{a}{2r}$ stets wachsend von $\frac{\pi}{2}$ bis π (weil $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ist).

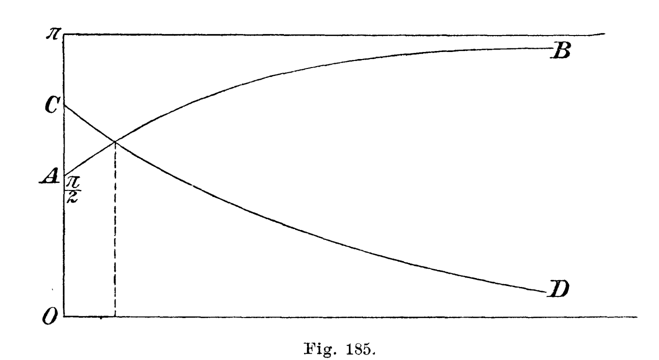


Fig. 185.

In der beistehenden Figur 185 ist r die Abszisse, und die absteigende Kurve CD hat die Ordinate

$$\sum \arcsin\frac{a_i}{2r},$$

---

1) Da arc sin eine transzendente Funktion ist, so stellen sich diese Gleichungen in transzendenter Form dar. Da man aber die Summe von zweien und folglich auch von mehreren arc sin auf einen arc sin eines algebraischen Ausdruckes zurückführen kann, so lassen sich diese Gleichungen auch in algebraische Formen bringen. Diese algebraische Form ist aber weit weniger einfach als die transzendente.

Für $n = 3$ erhält man auf diesem Wege für den Radius des umgeschriebenen Kreises:

$$r^2 = \frac{a^2 a_1^2 a_2^2}{2a^2a_1^2 + 2a^2a_2^2 + 2a_1^2a_2^2 - a^4 - a_1^4 - a_2^4}.$$

die ansteigende Kurve AB die Ordinate

$$\pi - \arc \sin \frac{a}{2r} \cdot$$

Die beiden Kurven schneiden sich also nur dann, und zwar nur in einem Punkte, wenn

$$\sigma = \sum \arc \sin \frac{a_i}{a} > \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

ist, und unter dieser Voraussetzung hat die Gleichung (4) eine und nur eine Lösung. Es gibt also unter der Voraussetzung (6) immer einen und nur einen Kreis, dem ein Polygon von den gegebenen Seiten $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ so eingeschrieben werden kann, daß der Kreismittelpunkt innerhalb des Polygons liegt.

9. Um die Gleichung (5) zu diskutieren, nehmen wir sie in der Form an:

$$F(r) = 2r \sum \arc \sin \frac{a_i}{2r} - 2r \arc \sin \frac{a}{2r} = 0. \tag{7}$$

Für $2r = a$ wird die linke Seite $F(r)$ dieser Gleichung gleich

$$a \sum \arc \sin \frac{a_i}{a} - \frac{a\pi}{2}$$

und für $r = \infty$ (wegen $\text{Lim } 2r \arc \sin \frac{a}{2r} = a$, vgl. Bd. I, § 114 der 1ten, § 127 der 2ten Auflage) gleich

$$\sum a_i - a.$$

Der letztere Ausdruck ist aber nach der Voraussetzung positiv, und wenn also der erste negativ ist, so muß $F(r)$ zwischen $2r = a$ und $2r = \infty$ wenigstens einmal durch Null gehen und die Gleichung $F(r) = 0$ hat also eine Wurzel. Dies findet unter der Voraussetzung statt, daß

$$\sigma = \sum \arc \sin \frac{a_i}{a} < \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

ist. Wenn also die a_i gegebene der Bedingung $\sum a_i > a$ genügende Strecken sind, so gibt es immer einen Kreis, dem ein Polygon mit den Seiten a eingeschrieben werden kann. Ist $\sigma > \frac{\pi}{2}$, so liegt der Mittelpunkt im Innern, und ist $\sigma < \frac{\pi}{2}$, so liegt er außerhalb des Polygons. Ist $\sigma = \frac{\pi}{2}$, so liegt der Mittelpunkt in der Mitte der größten Seite a.[1])

1) Bei der Gleichung (5) könnte es noch fraglich erscheinen, ob sie nicht mehr als eine Wurzel haben könnte, was bei der Gleichung (4) ausgeschlossen

§ 48. Polygone mit gegebenen Seiten.

1. Unter allen einfachen konvexen Polygonen mit gegebenen Seiten in gegebener Reihenfolge hat das Kreispolygon den größten Flächeninhalt.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf folgende Schlüsse:

2. Denken wir uns ein veränderliches einfaches konvexes Polygon mit unveränderlichen Seiten, so kann sich bei dieser Veränderung ein Winkel des Polygons der Grenze π nähern, wodurch das n-Eck einem $(n-1)$-Eck angenähert wird.

Es kann sich unter besonderen Voraussetzungen auch ein Winkel der Grenze Null nähern.

Verlängert man zwei Seiten eines einfachen konvexen Polygons, die in einer Ecke zusammenstoßen, über die nächsten Ecken hinaus, so entsteht ein Winkelraum von weniger als 180 Grad, und das ganze Polygon ist in diesem Winkelraum enthalten, und daraus folgt, daß sich ein Polygonwinkel nur dann der Grenze Null nähern kann, wenn sich gleichzeitig die Fläche des Polygons der Null nähert. Man sieht ferner, daß sich bei einem konvexen Polygon nur dann eine Diagonale der Grenze Null nähern könnte, wenn die sämtlichen Winkel bis auf zwei gleich π, die beiden letzten dann gleich Null würden; dann aber würde auch der Flächeninhalt verschwindend klein.

---

ist. Auch ist noch nicht entschieden, ob nicht vielleicht auch in dem Falle $\sigma > \frac{\pi}{2}$ die Gleichung (6) Wurzeln hat. Diese Frage kann nur mit Hilfe der Differentialrechnung, damit aber sehr leicht in negativem Sinne erledigt werden. Man setzt zu diesem Zwecke nach (1)

$$\frac{a}{2r} = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

und erhält aus (5) die Gleichung

$$\Phi(\vartheta) = \sum \operatorname{arc}\sin\left(\frac{a_i}{a}\sin\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\vartheta}{2} = 0.$$

Geht ϑ von 0 bis π, so geht $\Phi(\vartheta)$ von 0 bis $\sigma - \frac{\pi}{2}$, aber für kleine Werte von ϑ ist $\Phi(\vartheta)$ positiv. Es geht also $\Phi(\vartheta)$ durch Null, wenn $\sigma < \frac{\pi}{2}$ ist. Daß $\Phi(\vartheta)$ nicht mehr als einmal durch Null geht, und daß es nicht durch Null geht, wenn $\sigma > \frac{\pi}{2}$ ist, folgt dann daraus, daß der zweite Differentialquotient von $\Phi(\vartheta)$ in Bezug auf ϑ immer negativ ist. Damit ist der zweite Teil des Satzes 6. erst vollständig bewiesen.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Frage behandeln, ob ein überschlagenes Polygon mit gegebenen Seiten einem Kreise einbeschrieben werden kann.

3. Wir wollen die Gesamtheit der konvexen Polygone mit den unveränderlichen Seiten $a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen, und wir wollen darunter auch die $(n-1)$-Ecke einschließen, die dadurch entstehen können, daß einer der Winkel gleich π wird. Alle diese Polygone $\mathfrak{P}$ haben einen endlichen Flächeninhalt, denn sie können z. B. alle in das Innere eines Kreises gelegt werden, dessen Durchmesser kleiner als der Umfang der Polygone ist. Daraus ergibt sich, daß die Flächeninhalte der Polygone $\mathfrak{P}$ eine obere Grenze haben müssen, die wir mit G bezeichnen, d. h.:

Alle Flächeninhalte von $\mathfrak{P}$ sind kleiner als G oder höchstens gleich G; ist aber ω eine beliebig kleine Fläche, so gibt es Polygone in $\mathfrak{P}$, deren Fläche zwischen G und $G - \omega$ liegt. (Bd. I, § 23 der 1ten, § 25 der 2ten Auflage.)

4. Der Flächeninhalt eines Polygons ist eine stetige Funktion der Seiten und Winkel.

Das will sagen: Wenn F der Flächeninhalt des Polygons und ε eine beliebig gegebene Größe ist, so bleibt der Flächeninhalt zwischen $F - \varepsilon$ und $F + \varepsilon$, wenn die Änderungen der Seiten und Winkel gewisse von ε abhängige Grenzen nicht übersteigen.

Zum Beweise dieser Behauptung kann man sich entweder auf die geometrische Anschauung berufen, oder auch auf die Formeln, vermöge deren der Flächeninhalt durch stetige Funktionen der Seiten und Winkel ausgedrückt wird, und es ist dazu nicht erforderlich, den Bau dieser Formeln genauer zu kennen.

5. Der Beweis des an die Spitze gestellten Satzes 1 verlangt nun, daß wir zeigen:

Der Flächeninhalt des in $\mathfrak{P}$ enthaltenen Kreispolygons ist gleich der oberen Grenze G der Flächeninhalte von $\mathfrak{P}$.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen also an, der Flächeninhalt F des Kreispolygons sei kleiner als G. Ist dann η eine beliebige Größe, die der Bedingung

$$G > F + \eta > F$$

genügt, so gibt es noch unendlich viele Polygone in $\mathfrak{P}$, deren Flächeninhalt P der Bedingung

$$G > P > F + \eta$$

genügt. Wir bezeichnen mit P zugleich das Polygon selbst.

Da P kein Kreispolygon ist, so muß es unter seinen Ecken vier aufeinanderfolgende 1, 2, 3, 4 geben, die nicht auf einem Kreise



liegen, und in dem Viereck (1 2 3 4) haben daher zwei gegenüberliegende Winkel eine von π verschiedene Summe. Der Unterschied zwischen π und dieser Winkelsumme muß sogar größer als eine gewisse positive von η abhängige Größe ε sein (wegen 4.).

Hiernach läßt sich nach § 46, 5. der Flächeninhalt des Vierecks (1 2 3 4) mit Beibehaltung seiner Seiten um mehr als eine von η abhängige positive Größe ω vergrößern. Dadurch wird dann auch der Flächeninhalt P um mehr als ω vergrößert. Da man aber wegen des Begriffs der oberen Grenze P zwischen G und $G-\omega$ annehmen kann, so würde man durch diese Änderung über G hinaus kommen, was dem Begriffe der oberen Grenze widerspricht.

Die Annahme, daß F kleiner als G sei, ist daher unstatthaft.

§ 49. Gleichseitiges Dreieck.

1. Auf ähnlichem Wege beweisen wir den folgenden Satz:

Unter allen Dreiecken von gegebenem Umfange hat das gleichseitige den größten Flächeninhalt.

Zunächst ist zu bemerken, daß der Flächeninhalt aller Dreiecke von gegebenem Umfange $2s$ eine obere Grenze hat, die wir mit G bezeichnen. Der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks von dem Umfange $2s$ hat die Seiten $a=b=c=\frac{2}{3}s$ und folglich den Inhalt

$$F=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}.$$

Es ist zu beweisen, daß $F=G$ ist.

2. Angenommen, es sei $F<G$, so gibt es unendlich viele Dreiecke $\varDelta$ mit dem Umfange $2s$, deren (gleichfalls mit $\varDelta$ zu bezeichnende) Flächeninhalte zwischen F und G liegen.

Wenn sich bei gleichbleibendem Umfange $2s$ eine Seite eines Dreiecks der Größe s nähert, so nähert sich das Dreieck selbst einer geraden Linie und sein Flächeninhalt der Größe Null. Sind also a, b, c die Seiten eines Dreiecks, dessen Flächeninhalt größer als F ist, so liegen die Differenzen $s-a$, $s-b$, $s-c$ alle über einer gewissen positiven Zahl und können sich nicht der Grenze Null nähern.

3. Ist nun η wieder eine beliebige Größe, die der Bedingung

$$G>F+\eta>F$$

genügt, so gibt es unendlich viele Dreiecke mit dem Umfange $2s$, deren Flächeninhalt $\varDelta$ der Bedingung



$$G > \varDelta > F + \eta$$

genügt, und da die Dreiecksfläche eine stetige Funktion der Seitenlänge ist, so müssen alle diese Dreiecke $\varDelta$ die Eigenschaft haben, daß wenigstens eine der Seitendifferenzen, etwa $b - c$, größer ist als eine von η abhängige positive Größe ε, und nach § 46, 3. können wir also jeden der Flächeninhalte $\varDelta$ mit Beibehaltung des Umfanges um mehr als eine gewisse von ε abhängige positive Größe ω vergrößern.

Da es aber nach dem Begriffe der oberen Grenze Dreiecke $\varDelta$ gibt, deren Flächeninhalt zwischen G und $G - \omega$ liegt, so kommen wir auf den Widerspruch, daß es auch Dreiecke $\varDelta$ geben muß, deren Flächeninhalt über G liegt.

§ 50. **Polygone von gegebenem Umfange.**

1. Der Satz vom gleichseitigen Dreieck ist ein spezieller Fall des nun zu beweisenden allgemeineren Satzes:

> Unter allen einfachen konvexen n-Ecken mit gegebenem Umfange S hat das reguläre n-Eck den größten Flächeninhalt.

Den entsprechenden Satz für das $(n-1)$-Eck nehmen wir als bereits bewiesen an, und machen von der vollständigen Induktion Gebrauch.

2. Wir betrachten die Gesamtheit $\mathfrak{S}$ der einfachen konvexen n-Ecke bei konstantem n, deren Umfang eine gegebene Länge S hat. Darunter sind als Grenzfälle auch die Polygone vom Umfange S und einer geringeren Zahl von Ecken enthalten, die sich dadurch ergeben, daß einer oder einige der Winkel gleich π, oder eine oder mehrere der Seiten gleich Null geworden sind.

Die Flächeninhalte aller dieser Polygone haben eine obere Grenze, die wir wieder mit G bezeichnen.

3. Das ganze System $\mathfrak{S}$ läßt sich in unendlich viele Scharen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}'', \ldots$ zerlegen, in der Weise, daß man in einer dieser Teilscharen alle Polygone aus $\mathfrak{S}$ vereinigt, in denen die einzelnen Seiten dieselbe Länge haben. Darunter befindet sich auch die Schar $\mathfrak{R}$, in der alle Polygone gleich lange Seiten (von der Länge $S : n$) haben.

In jeder Schar ist ein Kreispolygon $P, P', P'', \ldots$ enthalten, *und jedes von diesen hat in seiner Schar den größten Flächeninhalt* (nach § 48). Wir bezeichnen das System dieser Kreispolygone mit $\mathfrak{K}$. Die Schar $\mathfrak{K}$ hat dieselbe obere Grenze G wie die Schar $\mathfrak{S}$. In $\mathfrak{K}$



ist auch das reguläre Polygon R enthalten, und es ist zu beweisen, daß dessen Flächeninhalt R gleich G ist.

4. Wir verfahren wieder indirekt und nehmen an, es sei $R < G$. Dann gibt es unendlich viele Polygone aus $\mathfrak{K}$, deren mit Q zu bezeichnender Flächeninhalt zwischen R und G liegt.

Nach unserer Annahme ist bereits bewiesen, daß alle $(n-1)$-Ecke von dem Umfange S kleinere Flächen haben als das reguläre $(n-1)$-Eck und dieses hat nach Bd. II, § 35, 5. kleinere Fläche als R. Daraus ergibt sich, daß unter den Q keine $(n-1)$-Ecke vorkommen, genauer gesagt, daß alle n Seiten aller Polygone Q über einer bestimmten (nur von n und von S abhängigen) Grenze bleiben.

5. Wir können jetzt ganz so wie beim Dreieck weiter schließen. Es sei η eine beliebige der Bedingung

$$G > R + \eta > R$$

genügende Größe. Wenn dann

$$G > Q > R + \eta$$

ist, dann hat das n-Eck, dessen Fläche Q ist, mindestens zwei aneinanderstoßende Seiten, deren Differenz größer ist als eine von η abhängige positive Größe ε. Wir können dann diese beiden Seiten unter Beibehaltung ihrer Summe so abändern, daß der Flächeninhalt von Q um mehr als eine von ε abhängige positive Größe ω vergrößert wird. Dieses vergrößerte Polygon Q' wird zwar im allgemeinen nicht Kreispolygon geblieben sein; aber das Kreispolygon, das mit Q' gleichen Umfang hat, ist ja noch größer als Q', also gleichfalls um mehr als ω vergrößert.

Da es nun aber Polygonflächen Q gibt, die zwischen G und $G - \omega$ liegen, so müßte Q' größer als G sein, und dies widerspricht dem Begriffe der oberen Grenze.

Die Annahme $G > R$ ist also unmöglich, und da R auch nicht größer als G sein kann, so muß $R = G$ sein.

> Da man jedes nicht reguläre einfache konvexe n-Eck unter Beibehaltung seines Umfanges noch vergrößern kann, so gibt es außer dem regulären n-Eck kein anderes, dessen Flächeninhalt gleich G ist.

6. Von der Beschränkung auf konvexe Polygone können wir diesen Satz noch befreien, und es bleibt dann nur die Annahme der Einfachheit übrig, d. h. der Eigenschaft, daß man die ganze Begrenzung des Polygons in einem Zuge ohne nochmalige Berührung

eines schon überschrittenen Punktes einfach und vollständig durchlaufen kann.

An dieser letzteren Voraussetzung müssen wir schon aus dem Grunde festhalten, weil sonst der Begriff des Flächeninhaltes nicht eindeutig festgestellt ist.

Wir lassen also jetzt auch Polygonwinkel zu, die größer als π (aber kleiner als 2π) sind, und sprechen die folgenden Sätze aus:

a) Unter allen einfachen n-Ecken mit gegebenem Umfange umschließt das reguläre n-Eck den größten Flächeninhalt.

b) Der Flächeninhalt des regulären n-Ecks ist bei gleichem Umfange um so größer, je größer die Seitenzahl n ist.

c) Die Kreisfläche ist die obere Grenze aller Polygonflächen von gleichem Umfange.

Wenn wir den Satz a) bewiesen haben, so folgen b) und c) nach Bd. II, § 35.

7. Um a) zu beweisen, nehmen wir den Satz für ein Polygon von weniger als n Seiten als bewiesen an, wozu wir berechtigt sind, da er für das Dreieck richtig ist.

Bei jedem nicht konvexen Polygon P von n Seiten können wir (unter Umständen auf mehrfache Art) zwei nicht benachbarte Ecken durch eine Strecke verbinden, die ganz außerhalb der Polygonfläche liegt, z. B. in dem Achteck (12345678) in der Figur 186 die Ecken 1 und 4 (oder auch 2 und 4 oder 8 und 4).

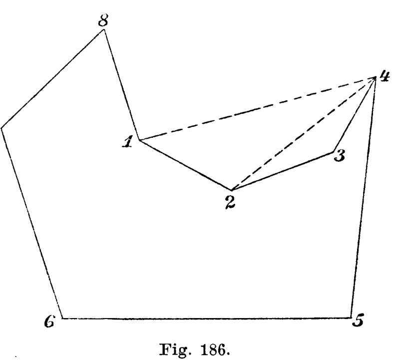


Fig. 186.

Es entsteht auf diese Weise ein Polygon P' von weniger, etwa n' Ecken (in der Figur das Sechseck (145678)), dessen Umfang S' kleiner ist als der Umfang S des gegebenen Polygons (weil die gerade Strecke $\overline{14}$ kürzer ist als die gebrochene $\overline{1234}$). Zugleich ist der Flächeninhalt F' von P' größer als der Flächeninhalt F von P, weil bei P' die Vierecksfläche 1234 hinzukommt.

Es seien nun R und R' die Flächen der regulären Polygone, die mit P und P' gleiche Seitenzahlen und gleichen Umfang haben.

Dann ist nach unserer Annahme

(1) $$R' > F' > F.$$

Nun vergrößern wir das n'-Eck R' im Verhältnis $S:S'$ und erhalten ein reguläres n'-Eck, dessen Fläche R'' größer als R', und dessen Umfang gleich S ist.

Es ist daher nach (1) auch

(2) $$R'' > F.$$

Da aber nach Bd. II, § 35 die Fläche des regulären n-Ecks bei gleichem Umfange um so größer ist, je größer n ist, so ist $R > R''$ und folglich

(3) $$R > F,$$

und hiermit sind die Sätze a), b), c) bewiesen.

8. Den Sätzen a), b), c) können wir durch ein sehr einfaches indirektes Beweisverfahren die folgenden an die Seite stellen:

a') Unter allen n-Ecken mit gegebenem Flächeninhalte hat das reguläre den kleinsten Umfang.

b') Der Umfang des regulären n-Ecks, das eine gegebene Fläche umschließt, wird um so kleiner, je größer n ist.

c') Die Kreislinie ist die untere Grenze aller Polygonumfänge von gegebenem Inhalte.

Der Umfang S eines nicht regulären n-Ecks P, das den gegebenen Flächeninhalt F umschließt, kann jedenfalls (nach a) nicht gleich dem Umfange ϱ des regulären n-Ecks R mit der Fläche F sein. Nehmen wir aber $S < \varrho$ an, so vergrößern wir das n-Eck P im Verhältnis $\varrho : S$. Wir erhalten dadurch ein nicht reguläres Polygon P', das denselben Umfang, aber größeren Inhalt hat wie R, was dem Satze a) widerspricht. Damit ist a') bewiesen.

Ebenso können b') und c') bewiesen werden, die sich übrigens auch leicht aus den Formeln Bd. II, § 35 ergeben.

9. Daß der Kreis unter allen geschlossenen Linien gleichen Umfangs den größten Flächeninhalt einschließt, können wir unter der Voraussetzung der Existenz dieses Extremums auf die einfachste Art dartun, d. h. wir können zeigen, daß jede begrenzte Figur, die nicht eine Kreisfläche ist, unter Beibehaltung ihres Umfanges vergrößert werden kann. Ist nämlich s eine geschlossene konvexe Linie, die kein Kreis ist und die die Fläche F einschließt, so kann man



vier Punkte a, b, c, d auf s wählen, die nicht die Ecken eines Kreisvierecks sind. Verschiebt man dann diese Punkte, indem man die Segmente (anb), (bpc), (cqd), (dma) ungeändert läßt, bis sie auf

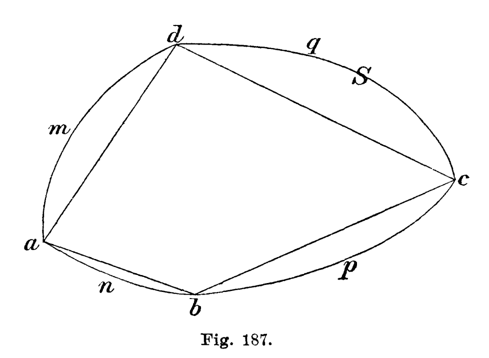


Fig. 187.

einem Kreise liegen, so hat man nach § 46, 5. die Fläche des Vierecks $abcd$ vergrößert; die übrigen Teile der Fläche F und der Umfang von s sind dadurch nicht geändert.

Eine vorzügliche Anwendung findet die Lehre vom Größten und Kleinsten in der Lehre vom Gleichgewicht mechanischer Systeme, wie wir im nächsten Abschnitte an dem Beispiele der Kapillarität sehen werden.

Siebenter Abschnitt.

Anwendung der Lehre vom Größten und Kleinsten auf die Lehre vom Gleichgewicht und besonders der Kapillarität.

§ 51. Stabiles Gleichgewicht.

1. In der Statik sind der Begriff und die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems materieller Körper unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte entwickelt. Es war aber dort kein Anlaß, auf eine für die Anwendung äußerst wichtige Unterscheidung einzugehen, nämlich zwischen dem stabilen und dem labilen Gleichgewicht. Um eine vorläufige Anschauung von diesem Unterschiede zu bekommen, denke man sich etwa eine halbkugelförmige Schale, in der eine kleine schwere Kugel rollen kann. Liegt diese Kugel an der tiefsten Stelle der Schale, so befindet sie sich da im Gleichgewicht, und wenn sie in dieser Lage kleine Stöße bekommt oder um ein weniges aus der Lage entfernt wird, so wird sie nur kleine Oszillationen ausführen, die man beliebig klein machen kann, wenn man die anfänglichen Störungen hinlänglich klein annimmt. Dies ist ein stabiles Gleichgewicht.

2. Unsere kleine schwere Kugel wird aber auch auf der höchsten Stelle einer festen Kugel bei großer Vorsicht eine Weile balanciert werden können. In diesem Falle wird aber eine kleine Erschütterung oder Lagenveränderung genügen, um die bewegliche Kugel sofort von der festen herunterzuwerfen. Hier haben wir ein labiles oder instabiles Gleichgewicht.

3. Wir definieren also das stabile Gleichgewicht folgendermaßen:

Ein Gleichgewicht irgend eines mechanischen Systems ist stabil, wenn bei allen Störungen durch Ortsveränderung oder Geschwindigkeiten (Stößen) alle

weiteren Bewegungen nach Verschiebung und Geschwindigkeit in beliebig engen Grenzen bleiben, vorausgesetzt, daß diese Störungen hinlänglich klein sind.

4. Es gibt noch eine dritte Art des Gleichgewichts, die man das indifferente nennt. Dieses findet statt, wenn das System durch eine unendlich kleine Verschiebung in eine neue Gleichgewichtslage übergeht. Unser Beispiel gibt uns einen derartigen Fall, wenn die bewegliche Kugel auf einer ebenen horizontalen Unterlage ruht.

Das indifferente Gleichgewicht kann auch mit stabilem oder instabilem verbunden vorkommen. Ersteres findet z. B. statt, wenn unsere schwere Kugel auf dem Boden einer horizontalen Rinne ruht.

§ 52. Kennzeichen des stabilen Gleichgewichtes.

1. Ein Kriterium für das stabile Gleichgewicht ergibt sich aus dem Satze von der Erhaltung der Energie. Im § 22 ist die potentielle Energie eines Systems erklärt. Es war dies, wenigstens in gewissen sehr allgemeinen Fällen, eine Funktion, die nur von der Lage und der Konfiguration des Systems abhängt und mit dieser stetig veränderlich ist. Durch die Zunahme der potentiellen Energie bei irgend einer Verschiebung des Systems wird die gegen die Kräfte des Systems geleistete Arbeit gemessen. Das Maß für die potentielle Energie hat einen willkürlichen Anfangspunkt, d. h. die potentielle Energie ist nur bis auf eine additive Konstante, die willkürlich bleibt, bestimmt.

In unserem Beispiele einer schweren Kugel ist die potentielle Energie der Erhebung des Mittelpunktes (Schwerpunktes) der Kugel über eine beliebige aber feste Horizontalebene proportional.

2. Unter der kinetischen Energie eines bewegten Systems haben wir die Hälfte der Summe aus den Produkten aller Massen des Systems mit den Quadraten ihrer Geschwindigkeit verstanden. Die kinetische Energie ist also eine wesentlich positive Größe, die nur bei einem ruhenden System gleich Null ist.

3. Das Energieprinzip sagt nun aus, daß bei jeder Bewegung des Systems potentielle Energie in kinetische oder kinetische Energie in potentielle umgewandelt wird, daß aber die Gesamtenergie unverändert bleibt. Ist also P die potentielle, T die kinetische Energie, h eine von der Zeit unabhängige Größe, so ist während der Bewegung

$$P + T = h. \tag{1}$$



4. Es gilt dann der Satz:

Ein System befindet sich im stabilen Gleichgewicht in einer Lage, in der die potentielle Energie ein Minimum ist, wenn zugleich die kinetische Energie verschwindet.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich ganz ohne Formeln und Rechnung aus dem Satze von der Erhaltung der Energie und aus dem Begriffe des Minimums. Um den einfachen Grundgedanken klar hervortreten zu lassen, wollen wir zunächst einen einzigen materiellen Punkt m betrachten, der sich in einer Ebene frei bewegen kann, für den also die potentielle Energie eine Funktion des Ortes in der Ebene ist. Man kann z. B. annehmen, der Punkt m werde von einem unter oder über der Ebene liegenden festen Punkte M nach dem Newtonschen Gesetze angezogen. Die potentielle Energie ist in diesem Falle mit dem negativen reziproken Werte der Entfernung $(\overline{mM})$ proportional und ist also ein Minimum, wenn der Punkt m ein Fußpunkt des von M auf die Ebene des Punktes m gefällten Perpendikels ist.

Es sei also O ein Punkt der Ebene, in dem die potentielle Energie P ein Minimum ist, und wegen der willkürlichen in P enthaltenen Konstanten können wir annehmen, dieser Minimumwert sei gleich Null. Bei allen Verschiebungen des Punktes m von O aus wird dann P zunächst positiv und wenn wir O mit einer Kurve S als Hülle umgeben, die dem Punkte O beliebig nahe kommt, so läßt sich eine positive Größe g angeben, unter die P auf der ganzen Hülle nicht heruntersinkt.

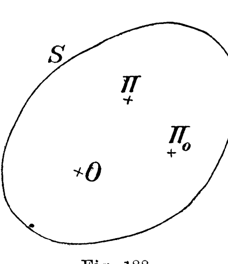


Fig. 188.

Man verschiebe nun den Punkt m nach irgend einem Punkte Π_0 im Innern der Hülle, in dem P den positiven Wert $P_0 < g$ hat und erteile ihm eine so kleine kinetische Energie T_0, daß $P_0 + T_0 < g$ bleibt. Bei der hiernach eintretenden Bewegung von Π_0 nach Π bleibt nach (1) die Gleichung bestehen

$$P + T = P_0 + T_0,$$

also $P + T$ und um so mehr P und T selbst kleiner als g.

Demnach kann der Punkt m bei dieser Bewegung die Hülle S nicht erreichen und auch T bleibt immer unter dem Werte g. Dies ist das Wesen des stabilen Gleichgewichts.

5. Wenn der Punkt m statt in der Ebene im Raume frei beweglich ist, so tritt an Stelle der Kurve S eine Fläche, die den

Punkt O einschließt, und die Schlußweise bleibt ganz dieselbe. Ebenso verhält es sich auch bei einem irgendwie beweglichen materiellen Systeme σ. Haben wir eine Lage O des Systems σ, in der die potentielle Energie P dieses Systems den Minimumwert Null hat, so denke man sich alle möglichen Bewegungen, die von O ausgehen, bei denen P positive Werte erhält. Setzt man alle diese Bewegungen eine hinlänglich kleine Strecke fort, so erhält man eine Reihe von Nachbarlagen, so daß die positiven Werte von P nicht unter einen beliebig klein zu wählenden positiven Wert heruntersinken, und von hier aus kann man aus dem Energiegesetze denselben Schluß ziehen, und es ist damit der Satz 4. bewiesen.[1])

§ 53. Schwere Systeme.

1. Haben wir ein System schwerer Punkte mit den Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots$, die bis zu den Höhen $z_1, z_2, z_3, \ldots$ über eine beliebig gewählte feste Horizontalebene gehoben sind, so ist die zu dieser Erhebung erforderliche Arbeitsgröße (§ 22)

$$g(m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots) = g \sum m_i z_i,$$

und diese Größe kann also als die potentielle Energie unseres Systems betrachtet werden. Ist z die Höhe des Schwerpunktes und $m = \sum m_i$ die Gesamtmasse des Systems, so ist (§ 9)

$$mz = \sum m_i z_i,$$

und man kann also $mz = P$ als die potentielle Energie ansehen. Daraus folgt, daß sich ein schweres System im stabilen Gleichgewicht befindet, wenn sein Schwerpunkt so tief als möglich ist.

2. Eine schwere Kette, die an ihren Endpunkten befestigt ist, nimmt die Gestalt einer Kurve an, deren Schwerpunkt bei gegebener

1) Der Satz vom stabilen Gleichgewicht, der schon länger als richtig angenommen war, ist zuerst bewiesen von Minding und Dirichlet. (Vgl. Stäckel, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung von 1905, S. 504.)

Man kann jedes materielle System, dessen Lage durch eine endliche Zahl von Bestimmungsstücken gegeben ist, durch einen Punkt in einem Raume von mehr Dimensionen darstellen, indem man die Bestimmungsstücke als Koordinaten eines Punktes in diesem Raume betrachtet. Die potentielle Energie des Systems ist eine Ortsfunktion in diesem Raume, und wenn man sich die Freiheit nimmt, von den Gebilden dieses Raumes ebenso zu sprechen, wie von denen in unserem gewöhnlichen Raume, so gestaltet sich der allgemeine Beweis ganz so, wie bei dem besprochenen besonderen Falle.



Länge und gegebenen Endpunkten so tief wie möglich liegt. Diese Kurve heißt Kettenlinie.

3. Eine schwere Flüssigkeit in einem Gefäß stellt sich im Gleichgewicht so ein, daß die Oberfläche horizontal ist. Um einzusehen, daß dann der Schwerpunkt so tief als möglich liegt, betrachte man die Figur 189. Ist ACB das horizontale Niveau, so betrachte man irgend eine andere Gestalt der Oberfläche, etwa $A'CB'$. Da die Flüssigkeit beide Male dasselbe Volumen einnehmen muß, so ist das unter dem Niveau gelegene Volumen ACA' gleich dem über dem Niveau gelegenen BCB'.

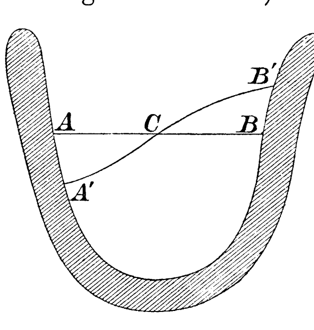


Fig. 189.

Das Volumen $A'CB'D$ entsteht daher aus $ACBD$ dadurch, daß das Volumen ACA' nach BCB' gehoben wird. Hierdurch wird aber auch der Schwerpunkt der Gesamtmasse gehoben, und es liegt folglich der Schwerpunkt der Gesamtmasse mit horizontaler Begrenzung ACB tiefer als der derselben Masse mit einer beliebigen anderen Begrenzung $A'CB'$, und die Voraussetzung für das stabile Gleichgewicht ist nur bei horizontaler Begrenzung befriedigt.

Hieraus folgt auch, daß eine schwere Flüssigkeit in einem Systeme untereinander kommunizierender Röhren in allen Röhren des Systems in gleicher Höhe stehen muß.

§ 54. Kapillare Kräfte.

1. Die Sätze über das Gleichgewicht einer Flüssigkeit, die wir soeben abgeleitet haben, sind nicht genau richtig, und es gibt sogar Fälle, die sehr bedeutend davon abweichen.

Eine kleine Quecksilbermenge ist auf einer horizontalen Unterlage im Gleichgewicht in Gestalt eines Tropfens, der, wenn die Masse der Flüssigkeit klein ist, nahe Kugelgestalt hat. Ein Wassertropfen, dessen Oberfläche mit der horizontalen Ebene gar keine Ähnlichkeit hat, kann von einer festen Fläche im Gleichgewicht herabhängen, und in kommunizierenden Röhren von verschiedener Weite steht das Wasser höher in der engen Röhre als in der weiten. Das sind Tatsachen, die uns die Erfahrung jeden Augenblick zeigt.

2. Um solche Erscheinungen zu erklären, muß man annehmen, daß außer der Schwerkraft noch andere Kräfte wirksam sind, die man die Kapillarkräfte nennt. Diese sind von zweierlei Art; die einen,

die wir die inneren nennen wollen, wirken zwischen den Teilen der Flüssigkeit, die anderen, die äußeren, wirken zwischen den Teilen der Flüssigkeit und der festen Gefäßwand, mit der sie in Berührung sind. Über die Natur dieser Kräfte wissen wir wenig; nur die eine Wahrnehmung ist gemacht worden, daß sie nur bei unmittelbarer Berührung merklich sind. Denn bringt man z. B. einen Quecksilbertropfen mit einem anderen oder mit einem festen Körper in Verbindung, so zeigt der Tropfen nicht die geringste Veränderung, so lange ein auch nur mit dem Mikroskop nachzuweisender Abstand zwischen den beiden Körpern ist.

Laplace und Gauß haben auf verschiedenen Wegen die Gesetze der Kapillarität aus der Annahme hergeleitet, daß zwischen den Molekülen der Körper Anziehungskräfte wirken, die, ähnlich wie die Gravitation nach dem Newtonschen Gesetze, Funktionen der Entfernung sind, aber solche Funktionen, die in der Entfernung außerordentlich rasch abnehmen, und, so zu sagen, nur für unendlich kleine Werte der Entfernung merkliche Werte haben. Es ist dies nur eine Hypothese, die, nach der heutigen Anschauungsweise der Physiker, kaum wahrscheinlicher oder verständlicher ist, als wenn wir durch eine andere Hypothese gleich das Gesetz im ganzen annehmen.

3. Wir wollen von der Wahrnehmung ausgehen, daß eine Flüssigkeitsmasse eine Gestalt annimmt, die sich der Kugelgestalt um so mehr nähert, je mehr sie durch die inneren Kapillarkräfte allein bestimmt ist, je mehr sie also den Einwirkungen der Schwere und der äußeren Kapillarkräfte entzogen ist; ein kleiner Quecksilbertropfen, ein frei fallender Wassertropfen, ein in einer anderen Flüssigkeit von gleichem spezifischen Gewichte schwimmender Öltropfen bieten solche Fälle dar. Die Kugel ist aber unter allen Gestalten die, die ein gegebenes Volumen bei kleinster Oberfläche einschließt.

Es scheint hiernach plausibel, daß die Arbeit der inneren Kapillarkräfte nur in einer Verkleinerung der Oberfläche besteht und mit der Verkleinerung der Oberfläche proportional ist.

Wir setzen daher die potentielle Energie der inneren Kapillarkräfte P_i mit der Oberfläche F der Flüssigkeit proportional:

$$P_i = aF, \tag{1}$$

worin a eine Konstante, die Kapillarkonstante der Flüssigkeit ist.

4. Die äußeren kapillaren Kräfte rühren her von der Anziehung der Gefäßwand auf die mit ihr in Berührung stehenden Flüssigkeitsteile. Die Gefäßwände ziehen die Flüssigkeit zu sich heran und suchen den von Flüssigkeit bedeckten Teil ihrer Oberfläche zu vergrößern. Die Arbeit dieser Kräfte besteht in einer Vergrößerung



des bedeckten Teils der Oberfläche und wir nehmen also an, daß die potentielle Energie P_a der äußeren Kapillarkräfte mit dem negativen Werte der Oberfläche des bedeckten Teiles der Gefäßwand proportional sei. Ist also T die Fläche der Gefäßwand, die mit Flüssigkeit bedeckt ist, so setzen wir

$$P_a = -2bT, \tag{2}$$

worin b eine zweite Kapillarkonstante ist, die von der Natur der Flüssigkeit und des Gefäßes gemeinschaftlich abhängt. (Der Faktor 2 ist aus Zweckmäßigkeitsgründen beigefügt.)

Bezeichnen wir noch mit U den freien Teil der Flüssigkeitsoberfläche, so ist $F = U + T$ und folglich

$$P_i = a(U + T). \tag{3}$$

5. Außer den kapillaren Kräften wirkt auf die Flüssigkeit noch die Schwerkraft. Die potentielle Energie P_s dieser Kraft ist, wenn c das spezifische Gewicht, d. h. das Gewicht der Volumeneinheit, V das Volumen der Flüssigkeit und Z die Höhe des Schwerpunktes über einer beliebigen aber festen Horizontalebene bedeutet (§ 22),

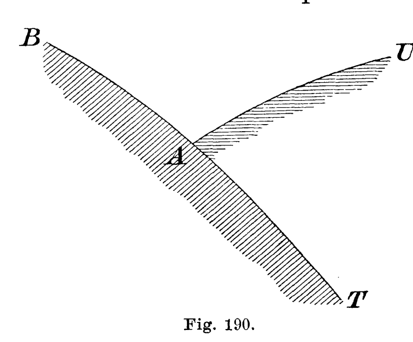


Fig. 190.

$$P_s = cVZ, \tag{4}$$

und folglich ist die potentielle Energie der ganzen Flüssigkeit

$$P = cVZ + (a - 2b)T + aU. \tag{5}$$

Wenn diese Funktion einen möglichst kleinen Wert hat, so befindet sich die Flüssigkeit im stabilen Gleichgewicht.[1])

1) Nach der älteren von Gauß und Laplace gebrauchten Bezeichnung wäre $a = \alpha^2 c$, $b = \beta^2 c$ zu setzen und α und β heißen darin die Kapillaritätskonstanten; a und b haben die Dimensionen „Gewicht durch Länge", da die Energie die Dimension „Gewicht mal Länge" hat; α und β sind einfach Längen. Für Quecksilber ist nach Quincke

$$a = 52{,}25 \text{ bis } 56{,}43 \frac{\text{mg}}{\text{mm}},$$

für Wasser

$$a = 7{,}6 \frac{\text{mg}}{\text{mm}},$$

für das reinste Wasser nach Quincke

$$a = 8{,}0 \frac{\text{mg}}{\text{mm}}.$$

mg bedeutet hier das Gewicht eines Milligramms, nicht seine Masse.

6. In Bezug auf die Konstanten a und b ist zunächst zu bemerken, daß, wenn $b > a$ ist, ein Gleichgewicht nicht möglich ist, so lange noch irgend ein Teil der Gefäßwand unbedeckt ist.

Dies zeigt uns die folgende Erwägung.

Es sei A in Figur 190 der Spurpunkt einer Linie, in der die freie Oberfläche U der Flüssigkeit an die Wand des Gefäßes stößt, und AB sei ein unbedeckter Teil der Gefäßwand. Man denke sich nun an AB ein dünnes Häutchen AD (Fig. 191) über einen Teil σ der Wand gezogen. Hierdurch nehmen U und T jedes um eine gleiche Größe σ zu, nämlich T um die innere, U um die äußere Fläche des Häutchens.

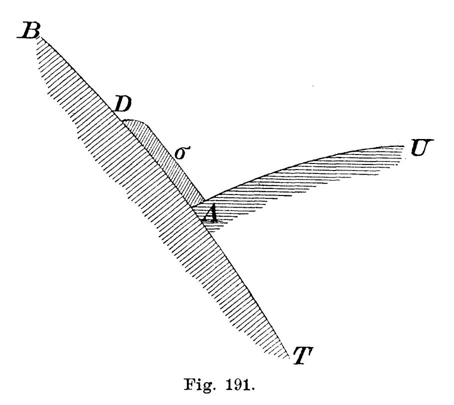


Fig. 191.

Die Masse des Häutchens kann man sich so klein denken, daß dadurch die übrige Fläche U und der Schwerpunkt der Masse nicht merklich verändert werden.

Nach (5) hat sich dann P um $2(a-b)\sigma$ geändert, und wenn also $a < b$ ist, so ist diese Änderung eine Abnahme. Es würde dann also P von dem Werte aus, den es in Figur 190 hat, noch verkleinert werden können, und die Figur 190 könnte keiner Gleichgewichtslage entsprechen.

In einem solchen Falle wird also nicht eher Gleichgewicht eintreten können, als bis die ganze Gefäßwand mit einer Flüssigkeitshaut überzogen, „benetzt" ist, und dann wird sich die Sache ebenso verhalten, als ob das Gefäß aus der starr gewordenen Flüssigkeit bestände, d. h. es wird $b = a$ zu setzen sein. Dieser Fall tritt z. B. ein bei Wasser oder Alkohol in einem Glasgefäße. Er hängt übrigens sehr von der Beschaffenheit der Oberfläche ab und wird z. B. nicht eintreten, wenn die Wand etwas fettig ist. Dagegen tritt er ein, wenn man das Glasgefäß gut mit Schwefelsäure reinigt und austrocknet.

7. Randwinkel. Da nun b nicht größer als a sein kann, so läßt sich ein Winkel zwischen 0^0 und 180^0 bestimmen, den wir mit A bezeichnen wollen, so daß

$$(6) \qquad \frac{a-2b}{a} = \cos A,$$

und dann wird nach (5)

$$(7) \qquad P = cVZ + a(T\cos A + U).$$

Dieser Winkel A ist von der Natur der Flüssigkeit und der Gefäßwand abhängig; er ist 180^0, wenn $a = b$ wird, also bei den benetzenden Flüssigkeiten. Die Bedeutung dieses Winkels ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Es sei in Figur 192 C die Spur der Grenzlinie zwischen Flüssigkeit und Gefäßwand, die wir uns auf der Ebene der Figur senkrecht denken. CU sei ein Stück der Fläche U, CT ein Stück der Fläche T. Man verschiebe nun den Teil CB von U einmal nach BC', dann nach BC'', so daß jedesmal ein gleich großes Stück δ der Fläche T von C überstrichen wird und die Fläche nach BC' und BC'' kommt. Diese Verschiebung denke man sich längs eines Stückes der Grenzlinie von der Länge 1 vorgenommen.

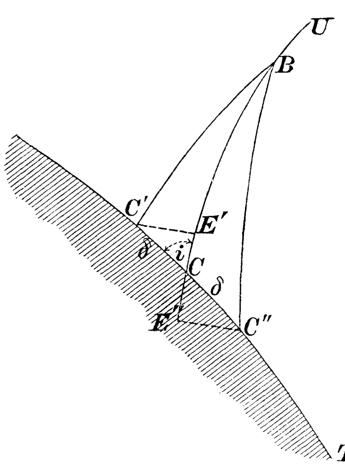


Fig. 192.

Von den Punkten C' und C'' fälle man Perpendikel $C'E'$ und $C''E''$ auf BC.

Alles das denke man sich in so kleinem Maßstabe ausgeführt, daß CB, CC', CC'', BC', BC'' als geradlinig betrachtet werden können, und daß zugleich die Massenverschiebung so klein ist, daß man ihren Einfluß auf die Lage des Schwerpunktes vernachlässigen darf. Endlich werde mit i der Winkel $C'CB$ bezeichnet, unter dem die Oberfläche der Flüssigkeit an die Wand stößt.

Sind die Winkel CBC' und CBC'' hinlänglich klein, so können wir in erster Annäherung setzen:

$$BC' = BE' = BC - \delta \cos i,$$
$$BC'' = BE'' = BC + \delta \cos i,$$

und für die Zunahme der Flächen U und T ergibt sich bei den beiden Verschiebungen:

$$U' - U = -\delta \cos i, \quad T' - T = \delta,$$
$$U'' - U = \delta \cos i, \quad T'' - T = -\delta.$$

Demnach erhalten wir aus (7) für die Zunahme von P

$$(8) \qquad \begin{aligned} P' - P &= a\delta(\cos A - \cos i), \\ P'' - P &= -a\delta(\cos A - \cos i), \end{aligned}$$

und wenn also der Winkel i, der wie A zwischen 0^0 und 180^0 liegt, nicht gleich A ist, so ist entweder $P' - P$ oder $P'' - P$ negativ;

also findet für eine der beiden Verschiebungen ein Abnehmen von P statt und es besteht kein Gleichgewicht. Wenn daher Gleichgewicht besteht, so muß $i = A$ sein.

Der Winkel i heißt der Randwinkel. Er ist für gegebene Flüssigkeiten und Gefäße konstant. Für Quecksilber und Glas ist er etwa $43^0\,12'$. Bei den benetzenden Flüssigkeiten ist er 180^0 und hier tangiert also die Oberfläche der Flüssigkeit die Gefäßwand.

Wir haben die Ausdrücke (8) nur mit gewissen Vernachlässigungen gebildet. Der genaue Sinn der Gleichungen ist der, daß, wenn $\cos A - \cos i$ nicht gleich Null wäre, man die Verschiebung δ so klein annehmen könnte, daß das Vorzeichen von $P' - P$ und $P'' - P$ durch (8) bestimmt wäre, und das genügt für unseren Nachweis.

§ 55. Kapillare Röhren.

1. Wir wenden den Ausdruck für die potentielle Energie dazu an, das Ansteigen oder Niederdrücken von Flüssigkeiten in kapillaren Röhren zu untersuchen. Wir wollen annehmen, daß eine enge Röhre, deren Querschnitt den Flächeninhalt q und den Umfang u habe, in ein großes mit Flüssigkeit gefülltes Bassin eintaucht. Die vertikalen Wände der Röhre nehmen wir zylindrisch an, setzen aber über die Gestalt des Querschnitts einstweilen nichts voraus. Erfahrungsmäßig wird in einer solchen Röhre die Flüssigkeit entweder in die Höhe gezogen oder (z. B. bei Quecksilber) herabgedrückt.

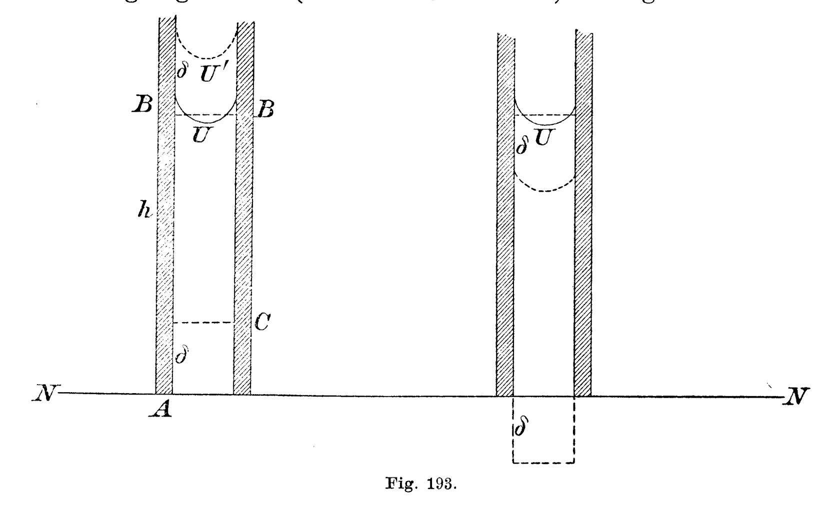


Fig. 193.

Nehmen wir an, es sei in der Figur 193 NN das äußere Niveau, AB die Röhre, in der die Flüssigkeit bis U gestiegen und da im

Gleichgewicht ist. Die Oberfläche U der Flüssigkeit in der Röhre ist nicht horizontal, sondern in einer Weise gekrümmt, die nur mit Hilfe der höheren Mathematik bestimmt werden kann und auch da große Schwierigkeiten macht. Die Kenntnis dieser Oberfläche ist aber zur Bestimmung der Steighöhe nicht nötig. Wir legen nämlich einen ebenen Schnitt $\overline{BB}$ durch die Oberfläche U in solcher Höhe h, daß die Flüssigkeitssäule AB dasselbe Volumen hq hat wie die Säule AU und nennen dieses h die Steighöhe.

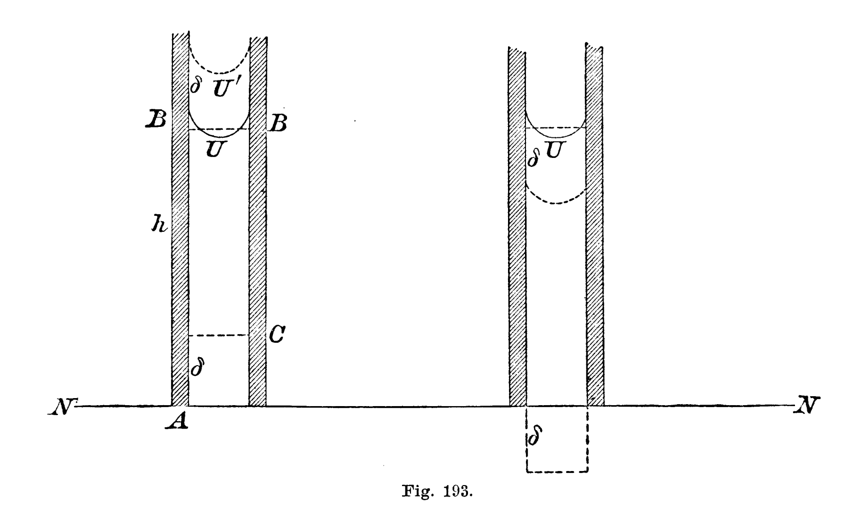


Fig. 193.

2. Jetzt geben wir der Flüssigkeitssäule eine Verschiebung, indem wir sie im ganzen um eine Strecke δ in die Höhe heben, ohne die Gestalt der Oberfläche U dabei zu verändern. Um die Kontinuität der Flüssigkeit zu erhalten, müssen wir bei A eine zylindrische Säule AC von dem Volumen $q\delta$ aus dem Bassin herausheben, wodurch das Niveau des Bassins und die potentielle Energie der äußeren Flüssigkeit nicht merklich verändert wird. Die Arbeit, die bei dieser Verschiebung gegen die Schwerkraft allein geleistet werden muß, ist für die Hebung des Zylinders AC gleich dem Gewicht mal der Höhe des Schwerpunktes, d. h. $= \frac{1}{2}cq\delta^2$, und für den Zylinder AU, der nach CB gehoben ist, dessen Gewicht chq mal der Hubhöhe δ, also $chq\delta$. Der Zuwachs, den die potentielle Energie P_s dadurch erleidet, ist also

$$c(hq\delta + \tfrac{1}{2}q\delta^2).$$

Die freie Oberfläche U hat sich nicht geändert, dagegen ist die bedeckte Fläche T um das zwischen U und U' gelegene Stück $u\delta$ ge-

wachsen, und daher ist die Zunahme der potentiellen Energie P nach § 54, (7)

(1) $$\delta(chq + ua \cos A) + \tfrac{1}{2}cq\,\delta^2,$$

und diese Größe darf nicht negativ sein.

3. Ebenso ergibt sich, wenn wir die Fläche U nach unten verschieben, für die Zunahme von P, die Arbeit des Zylinders CU, nämlich der Wert

$$-c(h-\delta)q\,\delta,$$

vermehrt um die Arbeit des in das Bassin hinabgedrückten Zylinders CA:

$$-\tfrac{1}{2}cq\,\delta^2;$$

endlich vermindert sich hier T um $q\delta$ und es ergibt sich für die Zunahme der potentiellen Energie

(2) $$-\delta(chq + ua \cos A) + \tfrac{1}{2}cq\,\delta^2,$$

und auch dieser Ausdruck darf nicht negativ sein.

4. Wenn aber $chq + ua \cos A$ von Null verschieden, etwa dem absoluten Werte nach größer als ω wäre, so brauchte man nur δ so klein zu nehmen, daß $\omega - \frac{1}{2}cq\,\delta$ positiv wird, um entweder den Ausdruck (1) oder (2) negativ zu machen. Folglich muß im Zustande des Gleichgewichts

(3) $$chq + ua \cos A = 0$$

sein, oder wenn man

(4) $$\frac{4q}{u} = d$$

setzt und d die Weite der Röhre nennt:

(5) $$h = -\frac{4a \cos A}{cd}.$$

Ist der Querschnitt der Röhre kreisförmig vom Radius r, so ist $q = \pi r^2$, $u = 2\pi r$ und $d = 2r$ der Durchmesser der Röhre. Man sieht, daß h positiv ist, also eine Hebung der Flüssigkeit in der Röhre stattfindet, wenn der Winkel A stumpf ist, und speziell bei netzenden Flüssigkeiten, wie Wasser an Glas, wo $\cos A = -1$ ist, ergibt sich

(6) $$h = \frac{4a}{cd},$$

also die Steighöhe der Weite der Röhre umgekehrt proportional. Ist der Winkel A spitz, wie bei Quecksilber an Glaswänden, dann ist h negativ und es findet eine Depression der Flüssigkeitssäule statt.



5. Denken wir uns zwei solche Röhren von den Weiten d und d' in das gleiche Bassin eingetaucht, so ergibt sich

$$h = -\frac{4a}{cd}\cos A, \quad h' = -\frac{4a}{cd'}\cos A,$$

also

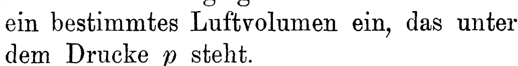
(7) $$h - h' = -\frac{4a}{c}\cos A\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d'}\right);$$

man kann nun, ohne das Gleichgewicht zu stören, im Innern des Bassins einen Teil der Flüssigkeit starr machen, so daß die beiden Röhren d und d' unten miteinander kommunizieren. Dann gibt der Ausdruck (7) (bei negativem $\cos A$) an, um wieviel das Wasser in dem engen Schenkel höher steht als in dem weiten.

Man hätte auch, wenn auch etwas umständlicher, die Formel (7) direkt ableiten können und hätte daraus den Ausdruck (5) erhalten, indem man d' unendlich groß im Vergleich zu d annimmt.

6. Das Energieprinzip lehrt den Druck im Innern einer Seifenblase bestimmen.

Bei einer Seifenblase können wir, da die Flüssigkeitsschicht außerordentlich dünn ist, von dem Einfluß der Schwerkraft absehen. Ebenso haben wir, wenn die Seifenblase frei schwebt, oder nur an einem kleinen Teile festhängt, von den äußeren Kapillarkräften abzusehen. Die Seifenblase nimmt dann Kugelgestalt an und schließt ein bestimmtes Luftvolumen ein, das unter dem Drucke p steht.



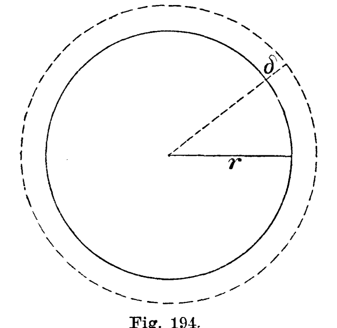


Fig. 194.

Bezeichnen wir mit r den Radius der Kugel und nehmen an, daß dieser sich unter dem Einflusse des Druckes der eingeschlossenen Luft um die sehr kleine Größe δ vermehrt habe, dann ist die Arbeit der Druckkräfte (vgl. § 26)

$$p \cdot 4\pi r^2 \cdot \delta.$$

Diese Arbeit muß gleich der Vermehrung der potentiellen Energie der inneren Kapillarkräfte sein, also nach unserer Grundhypothese proportional mit der Vergrößerung der Oberfläche. Es kommt hier die innere und die äußere Fläche in Betracht und die Zunahme der potentiellen Energie ist daher

$$2a \cdot 4\pi((r+\delta)^2 - r^2) = 16 a \pi r \delta$$

(mit Vernachlässigung von δ^2). Hiernach ergibt sich

$$p = \frac{4a}{r}.$$

VIERTES BUCH.

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

Achter Abschnitt.

Prinzipien der Wahrscheinlichkeit.

§ 56. Kausalität.

1. Eine Anwendung des Zahlbegriffs auf das Geschehen in der Außenwelt von ganz eigener Art ist die sogenannte Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie hat nicht den Zweck, Eigenschaften oder Beziehungen der Objekte der Außenwelt durch Zahlen darzustellen, sondern sie drückt durch die Zahlen einen gewissen Zustand unserer eigenen Meinung und Erwartung über die Ereignisse aus.

Es ist viel und treffliches über den Wert und die Bedeutung der Aussagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gedacht und geschrieben worden, aber trotzdem ist nicht zu läugnen, daß über den Grundvoraussetzungen dieser Lehre, die sich unserem Verstande mit axiomatischer Gewißheit aufdrängen, noch ein Dunkel schwebt. Vielleicht gelingt es, dieses Dunkel teilweise aufzuhellen, wenn wir auch hier an den Mengenbegriff und den Begriff der Abbildung anknüpfen, die, wie wir schon beim Zahlbegriff gesehen haben, und wie sich auch in der Geometrie zeigt, die Grundlage alles mathematischen Schaffens sind.[1])

1) Es ist wohl selbstverständlich, daß sich bei den zu allen Zeiten üblichen Glücksspielen eine gewisse natürliche Wahrscheinlichkeitsrechnung herausgebildet hat. Von wissenschaftlichen Bearbeitern des Gegenstandes sind zunächst Blaise Pascal und Fermat (um 1654) zu nennen. Es ist ferner zu erwähnen Huygens, de ratiociniis in ludo aleae (1657) und die „Ars conjectandi" (Wahrscheinlichkeitsrechnung) von Jacob Bernoulli (1713, acht Jahre nach des Verfassers Tode von seinem Neffen Nikolaus I Bernoulli herausgegeben), in deutscher Übersetzung von Haußner in Ostwalds Klassikern, Leipzig 1899. Wir nennen sodann die klassischen Werke von Laplace, „Théorie analytique des probabilités" (1809, 3. Aufl. 1820), Essai philosophique sur les probabilités (1814, 6. Aufl. 1840, deutsch von Schwaiger, Leipzig 1886) und Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements.

Neuere Lehrbücher sind: Poincaré, „Calcul des Probabilités", 1896. Czuber, „Wahrscheinlichkeitsrechnung" (Leipzig, Teubner 1903).

Über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt Todhunter,

2. Die Bildung von Wahrscheinlichkeitsurteilen beruht in erster Linie auf den Begriffen der Ursache, der Gesetzmäßigkeit und des Zufalls, und diese müssen wir daher zunächst erörtern, wenn wir eine sichere Grundlage gewinnen wollen.

Die Voraussetzung einer notwendigen, gesetzmäßigen Aufeinanderfolge des Geschehens liegt jeder naturwissenschaftlich-mechanischen Weltanschauung zu Grunde. Danach ist die Aufeinanderfolge der Ereignisse eine vollkommen und eindeutig bestimmte, und es läßt sich, ohne eine andere Welt anzunehmen, nicht ein einziges Glied aus der Kette der Ereignisse hinweg oder hinzu denken. Es ist also unzulässig, den Begriff des ursächlichen Zusammenhanges des Geschehens so zu erklären, daß man sagt, ein A ist die Ursache von B oder B die Wirkung von A, wenn B nicht sein würde, falls A nicht wäre.

Welcher greifbare Sinn bleibt aber für den Begriff der Ursache übrig, wenn der tatsächliche Verlauf der Welt in nichts unterschieden ist von einem notwendigen und gesetzmäßigen?

3. Die hier angedeutete Schwierigkeit überwinden wir durch Anwendung des Mengen- oder Klassenbegriffs. Unter einem Ereignis verstehen wir eine Zustandsänderung in der Zeit. Jedes Ereignis fordert eine Ursache. Um aber einen deutlichen Begriff von dieser Forderung zu gewinnen, fassen wir die Ereignisse zu Klassen zusammen, wir betrachten also Mengen, deren Elemente Ereignisse sind.

Wir können solche Klassen zunächst gänzlich nach unserer Willkür bilden. Es ist aber daran festzuhalten, daß die Definition der Klasse so scharf sein muß, daß von jedem Einzelereignis völlig bestimmt ist, ob es der Klasse angehört oder nicht. Wir können uns vorstellen, daß eine Klasse unendlich viele — vergangene und zukünftige — Ereignisse enthält, auch wenn uns die Erfahrung nur eine begrenzte Anzahl oder vielleicht sogar nur eines von ihnen gegeben hat.

4. Wenn zwei Ereignisklassen U und W in der Beziehung zueinander stehen, daß jedem Ereignis u der Klasse U ein Ereignis w

„A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace" (1865) und M. Cantor in seiner Geschichte der Mathematik. Viele Untersuchungen über die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind veröffentlicht worden. Wir erwähnen J. v. Kries, „Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Freiburg i. B. 1886, und die Königsberger Rektoratsrede von H. Weber „Über Kausalität in den Naturwissenschaften", Leipzig, Engelmann 1881. Vgl. auch die Anmerkungen in der deutschen Ausgabe von Poincaré, „Wert der Wissenschaft", Leipzig, Teubner 1906.



der Klasse *W* unmittelbar folgt und umgekehrt jedem Ereignis *w* aus *W* ein Ereignis *u* aus *U* unmittelbar vorausgeht, so heißt *U* die Ursachsklasse von *W* und *W* die Wirkungsklasse von *U*.

Besteht zwischen den Klassen *U* und *W* diese Beziehung, so heißt das Einzelereignis *u* die Ursache von *w* und *w* die Wirkung von *u*.

Das uns eingepflanzte Kausalitätsgesetz besteht in nichts anderem als in der Überzeugung, daß sich zu jeder beliebig abgegrenzten Ereignisklasse *W* eine Klasse *U* abgrenzen läßt, die nach der gegebenen Definition als deren Ursachsklasse zu betrachten ist.

Woher uns diese Überzeugung kommt, das ist eine Frage, auf die ich keine Antwort habe.

Die Bestimmung, daß die Ursache *U* der Wirkung *W* unmittelbar vorangehe, wird durch folgende Betrachtung modifiziert. Die Klasse *U* wird ihrerseits wieder eine Ursache U_1 haben, diese eine Ursache U_2 u. s. f., und man kann dann auch U_1 oder U_2 u. s. f. als Ursache von *W* betrachten und in diesem Sinne kann auch zwischen der Ursache und der Wirkung ein Zeitraum liegen. Zeigt sich in der Länge dieses Zeitraumes eine Regelmäßigkeit, so ist dies als ein Kennzeichen des ursächlichen Zusammenhanges zu betrachten. Immer aber muß die gesamte Kette von Ursachen hinzugedacht werden, und welches Glied der Kette wir herausgreifen und als Ursache bezeichnen, hängt außer von unserer Kenntnis besonders auch von dem speziellen Interesse ab, das wir im einzelnen Falle an der Erscheinung haben.

5. Zur vollständigen Abgrenzung einer Ereignisklasse wird meist eine größere Zahl von Bestimmungen und Angaben erforderlich sein, falls nicht die Sprache schon einfache Benennungen dafür bietet. Oft aber wird es für den gerade vorliegenden Zweck nicht erforderlich sein, diese Angaben alle genau aufzuführen. Sie werden zum Teil als selbstverständlich oder als für den gerade vorliegenden Zweck ohne Bedeutung übergangen werden können. Daraus erklärt es sich, daß der Sprachgebrauch in Beziehung auf die Zuordnung von Ursache und Wirkung häufig unbestimmt und ungenau ist.

Man wird vielleicht im physikalischen Unterrichte sagen, die Ursache einer Schallempfindung seien gewisse Wellenbewegungen der Luft, während man in anderem Zusammenhange etwa den Bau unseres Gehörorgans oder einen Kanonenschuß als die Ursache dieser Erscheinung bezeichnen wird, und gegen keine dieser Ausdrucksweisen ist etwas einzuwenden. Selbst wenn z. B. ein historisches Ereignis, was doch nur ein einziges ist, z. B. der Untergang des

römischen Reiches, aus der Vorgeschichte und den begleitenden Umständen erklärt werden soll, wird man diese Anschauungsweise bestätigt finden, indem hier durch Abstraktion von allem Einzelnen, Individuellen, das Ereignis in eine Klasse möglicher — vielleicht später einmal eintretender — verwandter Ereignisse eingereiht wird.

§ 57. Gesetzmäßigkeit und Zufall.

1. Die Ereignisklassen können wir ganz nach unserer Willkür abgrenzen, aber es zeigt sich hier, wie bei der Mengenbildung überhaupt, daß es zweckmäßig ist, die Klassen nach einer gewissen Verwandtschaft oder Ähnlichkeit der darin aufzunehmenden Ereignisse abzugrenzen, also Dinge, die in unserer Gedanken- und Empfindungswelt nahe beieinander liegen, zu vereinigen.

Wir nennen eine Ereignisklasse einfach, wenn ihre Elemente eine solche Verwandtschaft zeigen. Je einfacher eine Ereignisklasse ist, um so kürzer wird man sich bei der Beschreibung fassen können, und für die allereinfachsten hat die Sprache gewisse Wortbildungen, die von jedermann verstanden werden, die Zeitwörter, nötigenfalls mit Adverbien oder Objekten.

2. Hat eine einfache Ereignisklasse auch eine einfache Ursachsklasse, so heißt der Zusammenhang zwischen beiden gesetzmäßig.

Hat aber die einfache Ereignisklasse eine nicht einfache Ursachsklasse, so heißt der Zusammenhang zufällig.

Es lassen sich nach dieser Definition die Ereignisse nicht schlechtweg in gesetzmäßige und zufällige einteilen, sondern es findet ein stetiger Übergang zwischen beiden statt, wie etwa zwischen warm und kalt, hart und weich. Dies steht ja auch in vollkommenem Einklange mit dem Sprachgebrauch. Es wird aber nötig sein, das Gesagte durch einige Beispiele zu erläutern, wobei die Schwierigkeit nur in der Wahl aus einer allzugroßen Zahl von Fällen liegt.

3. Wir nennen es Zufall, wenn aus einem Kartenspiel ein As gezogen wird. Die Ereignisklasse, das Ziehen eines As, ist hier sehr einfach. Dagegen ist es ganz unmöglich, die Ursachsklasse zu beschreiben, die die Hand des Ziehenden gerade an die Stelle führt, wo das As liegt, oder das As beim Mischen der Karten gerade an diese Stelle gebracht hat.

Anders wäre es aber, wenn das Kartenspiel aus lauter Assen oder vorwiegend aus Assen bestände, dann würde die Ursachsklasse



schon viel einfacher ausfallen und das Ereignis ein mehr oder weniger gesetzmäßiges werden.

Man wird leicht diesen Charakter des Kausalzusammenhanges überall da erkennen, wo wir das Wort Zufall gebrauchen. Es ist zufällig, wenn ich ohne Verabredung auf einer Reise mit einem Freunde zusammentreffe. Dagegen wird das Ereignis gesetzmäßig, wenn eine Verabredung vorhergeht.

Wenn Wallenstein sagt: „Es gibt keinen Zufall“, so supponiert er damit für alle uns zufällig erscheinenden Ereignisklassen eine einfache Ursachsklasse, nämlich den Willen einer höheren Macht, die das menschliche Schicksal planmäßig lenkt.

4. Eine einfache Ereignisklasse, die zugleich eine einfache Ursachsklasse hat, heißt eine natürliche Klasse, und wenn die Klasse zugleich von großem Umfange ist, so bezeichnen wir einen solchen Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung als ein Naturgesetz.

§ 58. Wahrscheinlichkeit.

1. All unserem Wissen und Urteilen haftet die Unvollkommenheit an, daß es uns nicht absolute Gewißheit, sondern nur eine Wahrscheinlichkeit bietet. Darin, daß man von einer größeren oder kleineren Wahrscheinlichkeit sprechen kann, liegt aber schon ein Merkmal für die Möglichkeit, die Wahrscheinlichkeit auf das Zahlenreich abzubilden und aus den Zahlenoperationen Schlüsse über Wahrscheinlichkeiten zu ziehen. Ehe wir aber zu einer genaueren Bestimmung dieser Abbildung übergehen, müssen wir die folgende allgemeine Bemerkung vorausschicken.

Wahrscheinlichkeit ist nicht eine Eigenschaft der Dinge, sondern nur ein Zustand unserer Meinung oder unseres Wissens über die Dinge. Wenn wir auf irgend eine Frage keine bestimmte Antwort haben, so werden wir nur dann die Antwort im einen oder im anderen Sinne für wahrscheinlicher halten, wenn wir dafür bestimmte Gründe haben. Diese Gründe können rein subjektiver Art sein, in unserer Stimmung, in unserem Temperament oder in unseren Wünschen liegen; dann aber werden wir ihnen bei vernünftiger Überlegung kein entscheidendes Gewicht beilegen. Sie können aber auch durch unsere augenblickliche Kenntnis der begleitenden Umstände bestimmt sein. Es ist kein Hindernis, daß wir jeder solchen Wahrscheinlichkeit nach unserem jeweiligen Ermessen einen bestimmten Zahlenwert beilegen, und ein gewisses Bild unserer augenblicklichen Meinung kann dadurch immerhin gegeben werden. Daß dieses Bild aber auch etwas

richtiges und wertvolles über die äußeren Dinge lehre, werden wir nur dann erwarten dürfen, wenn der Einfluß der unbekannten Umstände gegenüber dem der bekannten gering anzuschlagen ist. Ich betone dies, um auch hier wieder darauf hinzuweisen, daß der Zahlbegriff und seine Anwendung auf die Dinge eine willkürliche Schöpfung unseres Denkens ist.

2. Wir sprechen nicht bloß bei zukünftigen, sondern auch bei vergangenen aber noch unbekannten Ereignissen, ja auch bei dauernden Zuständen von Wahrscheinlichkeit. Um das zusammenzufassen, wollen wir hier von Erscheinungen und Erscheinungsklassen reden, in demselben Sinne, wie wir früher den Ausdruck Ereignisklassen gebraucht haben.

Eine fruchtbare Anwendung des Zahlbegriffs auf Wahrscheinlichkeiten ist nur dann möglich, wenn es sich um einfache Erscheinungsklassen (in dem Sinne, der in § 57, 1. festgelegt ist) handelt.

3. Wir denken uns nun eine solche Erscheinungsklasse E in irgend eine Zahl, etwa n, Teilklassen

(1) $$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \ldots,\ E_n$$

zerlegt und zwar von der Art, daß wir von einer zu beurteilenden unbekannten Erscheinung e der Klasse E nach dem augenblicklichen Stande unseres Wissens keinen Grund haben zu vermuten, daß sie eher zu der einen als zu einer anderen dieser Teilklassen gehört.

Wir wollen solche Teilklassen gleichwertig nennen. Eine solche Einteilung bietet sich bisweilen ganz von selbst, besonders in solchen Fällen, wo, wie bei Glücksspielen, ein näheres Wissen über die Einzelereignisse absichtlich ausgeschlossen wird. In anderen Fällen wird aber bei der Bildung gleichwertiger Klassen viel dem subjektiven Ermessen überlassen bleiben müssen, und ein erfahrener und scharfsinniger Beobachter wird die Aufgabe richtiger und besser lösen, als der minder begabte.

Ist die Einteilung von E in n gleichwertige Klassen getroffen, so schreiben wir der Zugehörigkeit der Erscheinung e zu einer bestimmten der Klassen (1), etwa zu E_1, die Wahrscheinlichkeit $1/n$ zu. Dies ist reine Definition, durch die eben nichts weiter ausgedrückt ist, als die Gleichwertigkeit der n Klassen.

4. Ist k ein Teiler von n und $n = kn'$, so lassen sich die Klassen (1) zu je k in größere Klassen zusammenfassen, die wir mit

(2) $$E_1',\ E_2',\ \ldots,\ E'$$



bezeichnen, worin etwa E_1' aus den Klassen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ besteht. Auch diese Klassen E_i' werden wir nach unserer Kenntnis für gleichwertig halten müssen, und demnach ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis e zu E_1' gehört, gleich $1/n' = k/n$ zu setzen. So groß ist also die Wahrscheinlichkeit, daß e zu irgend einer der Klassen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ gehört.

Wenn $k = n$ ist, so wird dieser Zahlenwert gleich 1. Die Klasse E_1' fällt mit E zusammen, und da e nach Voraussetzung zu E gehört, so ist die Wahrscheinlichkeit 1 gleich der Gewißheit zu setzen.

5. Aber auch wenn k kein Teiler von n ist, können wir nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß die Einzelerscheinung e zu irgend einer der Klassen $E_1, E_2, \ldots, E_k$ gehört. Es ist nun zwar einleuchtend, daß diese Wahrscheinlichkeit um so größer sein wird, je größer k ist, weil ja e sicher zu dem Komplex $E_1, E_2, \ldots, E_k$ gehört, wenn es zu einem der Komplexe $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}$ gehört, aber nicht umgekehrt. Ein Zahlenwert für diese Wahrscheinlichkeit läßt sich aber aus der Definition 4. noch nicht ableiten. Wenn aber die Klassen $E_1, E_2, \ldots$ gleichwertig sind, so wird diese Wahrscheinlichkeit nur von der Zahl k, nicht von der besonderen Auswahl der $E_1, E_2, \ldots, E_k$ abhängen. Allen diesen Forderungen genügen wir, wenn wir diese Wahrscheinlichkeit gleich dem echten Bruche k/n setzen, was wiederum eine Definition ist, die aber die Definition 3. als speziellen Fall in sich enthält.

Nehmen wir irgend zwei Komplexe E', E'', von denen der eine h, der andere k der Teilklassen E_i enthält, so haben die Wahrscheinlichkeiten, daß e zu E' oder E'' gehört, das Verhältnis $h : k$. Hierbei ist es gleichgültig, ob die Klassen E' und E'' gemeinschaftliche Elemente enthalten oder nicht.

Wenn aber E' und E'' irgend zwei Teilklassen von E sind, so wird man nur dann das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten durch einen rationalen Bruch ausdrücken können, wenn man die Klasse E so in gleichwertige Teilklassen E_i einteilen kann, daß E' und E'' je durch eine bestimmte Anzahl h und k dieser Teilklassen erschöpft sind.

In den meisten Fällen bietet sich eine Einteilung in Teilklassen E', E'', von denen wir zwar sofort sehen, daß sie nicht gleichwertig sind, obwohl wir kein Mittel haben, sie in eine bestimmte Anzahl gleichwertiger Teilklassen zu teilen. Dann fehlen die Grundlagen für eine zahlenmäßige Bestimmung der Wahrscheinlichkeit. Trotzdem ist häufig die Ungleichwertigkeit so groß und augenfällig, daß wir keinen Augenblick im Zweifel sind, in welche der Teilklassen wir eine Einzel-



erscheinung e zu verweisen haben. In solchen Fällen wäre auch ein Zahlenausdruck für die Wahrscheinlichkeit ganz zwecklos.

6. Wir wollen das Gesagte an zwei einfachen Beispielen erläutern. Ein Würfel, wie er zum Würfelspiel gebraucht wird, zeigt, auf den Tisch geworfen, eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Hierin bestehe die Erscheinungsklasse E. Wenn der Würfel keine mir bekannte Unregelmäßigkeit hat und wenn nach den Vorschriften des Spieles geworfen wird, so sind die sechs Erscheinungsklassen E_1, $E_2, \ldots, E_6$, bei denen der Würfel 1 oder 2 ... oder 6 zeigt, gleichwertig. Die Regeln des Spieles verlangen geradezu, daß sie gleichwertig seien. Wir haben also hier für jede dieser Nummern die Wahrscheinlichkeit 1/6.

Die Wahrscheinlichkeit für eine gerade Zahl wäre 1/2 und die Wahrscheinlichkeit, daß eine der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 fällt, ist 5/6.

Ein anderes etwas komplizierteres Beispiel ist das folgende: Die Sterblichkeitstabellen zeigen, daß im Durchschnitt von den sechzigjährigen Männern der sechsundzwanzigste im Laufe eines Jahres stirbt (abgerundet). Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß ein bestimmter einzelner Mensch N, der heute 60 Jahre alt ist, im Laufe des nächsten Jahres stirbt. Ist nun von dem N nichts weiter bekannt, so besteht der Inhalt meines Wissens über die Frage lediglich in der erwähnten Angabe der Statistik. Die Erscheinungsklasse E ist hier die Gesamtheit der sechzigjährigen Männer. Die Einzelerscheinung e ist der besagte N. Teilen wir die Klasse E in die beiden Teilklassen der im nächsten Jahre Sterbenden und der Überlebenden, so sind diese beiden Klassen nicht gleichwertig. Um gleichwertige Klassen zu erhalten, muß ich nach Angabe der Statistik die Klasse der Überlebenden noch in 25 gleichwertige Klassen teilen. Ich brauche aber diese Teilung nicht wirklich auszuführen, da es für die gestellte Frage in keiner Weise auf ihre Unterscheidung ankommt. Das Ergebnis ist dann also die Wahrscheinlichkeit von 1/26 für den Tod des N im nächsten Jahre.

Dieses Resultat ist von der größten Bedeutung für die Lebensversicherungsgesellschaften, weil da die Gleichwertigkeit der angegebenen Klassen feststeht. Es ist aber von sehr geringem Wert, angewandt auf einen bestimmten uns bekannten N. Da ist die Gleichwertigkeit der Klassen nur sehr unsicher geschätzt und würde sofort zerstört werden, sowie etwa der Gesundheitszustand oder die sonstigen Lebensumstände des N in Betracht gezogen werden.

§ 59. Wahrscheinlichkeit und Wirklichkeit.

1. Wir haben in dem letzten Beispiele einen Punkt berührt, der noch einer genaueren Erörterung bedarf. Wir haben oben scharf betont, daß die Zahlen, durch die wir Wahrscheinlichkeiten ausdrücken, nicht eine Eigenschaft der Dinge der Außenwelt darstellen, sondern nur zur Charakterisierung unserer Meinung oder Erwartung über zukünftige oder unbekannte Ereignisse dienen.

Damit scheint auf den ersten Blick im Widerspruch zu stehen, daß sich die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung gezogenen Folgerungen in der Erfahrung bewährt haben, daß z. B. die Solidität der Lebensversicherung sich auf die Überzeugung gründet, daß die Angaben der Statistik sich bewahrheiten werden, wenn man nur eine genügend große Zahl von Einzelfällen betrachtet, oder, um ein anderes Beispiel zu wählen, daß ein Würfel, der sehr häufig, sagen wir 1000 mal geworfen wird, nahezu in einem Sechstel der Fälle die Zahl 6 zeigen wird.

Darauf ist aber zu erwiedern, daß dieses Ergebnis keineswegs sicher, sondern nur wieder mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist. Ganz ausgeschlossen ist es nicht, daß bei den 1000 Würfen immer die Zahl 6 fällt, auch dann, wenn das Ereignis ein wirklich zufälliges ist. Schon Jacob Bernoulli und später Laplace haben dargetan, daß diese Regelmäßigkeit sich mit einer unbegrenzt wachsenden Wahrscheinlichkeit einstellt, wenn die Zahl der Fälle ins Unbegrenzte wächst.

2. Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern. Nehmen wir an, es werde mit einer Münze „Kopf oder Schrift“ gespielt. Die Klassen, daß Kopf oder Schrift fällt, seien vollständig gleichwertig. Wenn nun dies Spiel n mal wiederholt wird, so kann 1 mal, 2 mal, 3 mal, ..., n mal „Kopf“ fallen. Diese n Klassen sind aber keineswegs gleichwertig. Um ihre Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, müssen wir die gesamten Klassen aller Kombinationen von n Würfen in gleichwertige Teilklassen teilen, und da bildet jede mögliche Aufeinanderfolge mit oder ohne Wechsel von Kopf und Schrift, deren Zahl 2^n beträgt, eine gleichwertige Klasse. Es fragt sich, wie viele dieser Klassen eine bestimmte Anzahl von Malen, etwa k mal, „Kopf“ enthalten.

Das ist aber offenbar so oft der Fall, als man n Elemente zu je k ohne Widerholung kombinieren kann; denn jedes Element einer solchen Kombination aus den n Würfen kann man mit „Kopf“ und die übrigbleibenden mit „Schrift“ belegen; und diese Zahl ist also nichts anderes, als der Binomialkoeffizient $B_k^{(n)}$.



Die Wahrscheinlichkeit, daß k mal „Kopf" fällt, ist also nach § 58, 5. gleich $B_k^{(n)} : 2^n$.

Da die Koeffizienten eines entwickelten Binoms nach der Mitte zu am größten sind, so zeigt es sich, daß die mittleren Werte von k die größte Wahrscheinlichkeit haben, und je größer n ist, um so mehr wird sich vermutlich das Verhältnis der Zahl der Würfe der einen Art zu der Gesamtzahl der Würfe dem Werte 1/2 nähern.

Nehmen wir etwa $n = 10$, so haben wir die Binomialkoeffizienten

$$1,\ 10,\ 45,\ 120,\ 210,\ 252,\ 210,\ 120,\ 45,\ 10,\ 1;$$

unter 1024 Fällen, von 10 Würfen ist es also nur 1 mal zu erwarten, daß 10 mal „Kopf" fällt, und 252 mal, daß nur 5 mal „Kopf" fällt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältnis der Zahl der „Kopf"-Würfe zu der Gesamtzahl der Würfe einen der Werte 4/10, 5/10, 6/10 hat, ist gleich $672/1024 = 21/32$, während die Wahrscheinlichkeit für einen der übrigen acht Werte nur 11/32 ist.

3. Ähnlich verhält es sich mit den sogenannten Massenerscheinungen der Statistik, die, obwohl sie zum Teil von einem unberechenbaren Faktor, dem menschlichen Willen abhängen, doch eine große Regelmäßigkeit und scheinbare Gesetzmäßigkeit zeigen, z. B. der Häufigkeit der Eheschließungen, der Verbrechen, der unbestellbaren Briefe.

Nehmen wir z. B. die Bevölkerung einer großen Stadt und zählen etwa die Zahl der Selbstmorde in einem Jahre und in einem zweiten Jahre, so stehen diese beiden Zahlen in dem Verhältnisse zweier ganzer Zahlen, die zwischen Null und der Bevölkerungszahl schwanken können.

Irgend ein Wert dieses Verhältnisses wird durch eine gewisse Anzahl von möglichen Fällen hervorgebracht, und wenn wir diese Fälle als gleichwertig betrachten, so können wir die Wahrscheinlichkeit irgend eines Wertes dieses Verhältnisses ebenso wie beim Würfelspiel berechnen. Es ergibt sich eine überwiegend große Wahrscheinlichkeit für die Werte, die der 1 nahe kommen, also eine Wahrscheinlichkeit für das ungefähre Gleichbleiben der Zahl der Selbstmorde in den beiden Jahren.

Hier ist nun freilich die Gleichwertigkeit der Fälle nur eine rohe Annahme, und bei genauerem Zusehen werden sich sehr bedeutende Unterschiede im Einzelnen ergeben.

Wir dürfen daher auch nur bei großen Bevölkerungszahlen auf eine Übereinstimmung der Wirklichkeit mit dieser Schätzung der Wahrscheinlichkeit rechnen. Wie groß diese Zahl sein muß, das

wird davon abhängen, welchen Einfluß die angedeuteten Verschiedenheiten haben. Dieser Einfluß wird größer sein in den komplizierten Verhältnissen eines Kulturvolkes, in dem die Individualität des Einzelnen mehr entwickelt ist, als in den einfachen Verhältnissen eines Naturvolkes. Daß aber trotzdem eine Übereinstimmung überall eintritt, ist ein Beweis von einem gewissen Artcharakter auch in der Menschennatur.

§ 60. **Wahrscheinlichkeit von Ursachen.**

1. Wenn die Aufstellung einer Wahrscheinlichkeit in Widerspruch steht mit der nachfolgenden Erfahrung, so deutet dies darauf, daß unser Wissen, nachdem wir die Wahrscheinlichkeit geschätzt haben, nicht hinreichend war, daß die unbekannten Umstände von entscheidendem Einfluß gewesen sein müssen, und wir werden darauf hingewiesen, nach solchen unbekannten Einflüssen zu suchen und dadurch unser Wissen zu erweitern. Wir werden vor die Frage gestellt:

> Ist das Eintreten eines unwahrscheinlichen Ereignisses zufällig oder gesetzmäßig?

Welchen Sinn diese Unterscheidung hat, ergibt sich aus § 57, 2. Die Beantwortung dieser Frage ist also wiederum nur die Entscheidung, welche von zwei Wahrscheinlichkeiten die größere ist. Die Antwort wird davon abhängen, welchen Grad von Wahrscheinlichkeit die Gesetzmäßigkeit des Ereignisses an sich, vor Eintritt des Ereignisses, für uns hat. Oft läßt sich diese Wahrscheinlichkeit nicht in Zahlen abschätzen; aber sie gehört zu den oben erwähnten Fällen, wo wir auch ohne eine solche nicht im Zweifel sind, auf welche Seite wir neigen sollen.

2. Ein paar Beispiele werden den hier zugrunde liegenden Gedanken klar machen.

Wenn 100 mal mit einem Würfel geworfen wird, so bestehen für die Aufeinanderfolge der gefallenen Zahlen 6^{100} verschiedene Möglichkeiten. Alle diese sind gleichwertig, wenn über die Art des Würfelns und über die Beschaffenheit des Würfels nichts besonderes bekannt ist. Jeder dieser Kombinationen kommt also eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit zu und doch muß eine von ihnen zum Vorschein kommen. Hat diese irgend eine bestimmte Regelmäßigkeit, besteht sie z. B. aus lauter Sechsen oder auch nur aus einer Überzahl von Sechsen, so schließen wir mit einer an Gewißheit grenzenden Wahrscheinlichkeit auf irgend einen unbekannten



Umstand, etwa in der Beschaffenheit des Würfels (z. B. der Lage seines Schwerpunktes), der diesen Erfolg herbeigeführt hat. Bei irgend einer beliebigen unregelmäßigen Folge, die doch von vornherein dieselbe Unwahrscheinlichkeit hat, machen wir diesen Schluß nicht. Dies erklärt sich dadurch, daß eine Unregelmäßigkeit, die ein bestimmtes Fallen des Würfels, z. B. auf Sechs begünstigt, sei es in betrügerischer Absicht oder zufällig, an sich nichts unwahrscheinliches hat, während das zufällige Entstehen der besonderen Kombination in hohem Maße unwahrscheinlich ist.

Wenn nun auch die unregelmäßige Reihenfolge die gleiche Unwahrscheinlichkeit für ein zufälliges Entstehen bietet, so hat dort die entgegengesetzte Annahme eines gesetzmäßigen Entstehens dieser Kombination durch eine unbekannte Einrichtung des Würfels oder der Art des Würfelns genau dieselbe, wenn nicht eine noch größere Unwahrscheinlichkeit, und es liegt also jetzt kein Grund für uns vor, eine Gesetzmäßigkeit anzunehmen. Wenn wir auf einer Buchdruckertafel die Buchstaben KONSTANTINOPEL sehen, so nehmen wir mit voller Überzeugung an, daß nicht der Zufall diese vierzehn Buchstaben zusammengestellt hat, sondern die bewußte Absicht eines Menschen. An sich ist jede zufällige Kombination von vierzehn Buchstaben gleich wahrscheinlich, und wenn wir irgend eine uns unverständliche Zusammenstellung von Buchstaben vorfinden, so können wir durchaus im Zweifel sein, ob der Zufall oder eine uns unbekannte Absicht, z. B. eine Geheimschrift, diese Buchstaben zusammengeführt hat. Wenn es sich aber um ein gebräuchliches Wort handelt, so ist die Wahrscheinlichkeit einer Absicht unvergleichlich größer. Eine Ilias kann nicht durch Zufall entstanden sein.

3. Auf diesen Schlüssen beruht in den Naturwissenschaften die Auffindung gesetzmäßiger Zusammenhänge in der Natur, d. h. solcher Erscheinungsklassen, die wir früher natürlich genannt haben (§ 57, 2.).

Wenn wir in einer Erscheinungsklasse eine gewisse Regelmäßigkeit wahrnehmen, die nicht schon zu der Definition dieser Klasse gehört, so haben wir zunächst wieder die Alternative, diese Regelmäßigkeit für zufällig oder für gesetzmäßig zu halten, und je einfacher diese Regelmäßigkeit ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit eines Zufalls und um so mehr neigen wir daher zur Annahme einer Gesetzmäßigkeit, die uns leicht zur vollen Überzeugung wird. Die Auffindung dieser Gesetzmäßigkeit, d. h. der einfachen Ursachsklasse, ist dann die Aufgabe der Forschung.

Wenn wir z. B. sehen, wie stark sich die Atomgewichte des größten Teils unserer chemischen Elemente ganzen Zahlen annähern, so kann es wohl kaum einem Zweifel unterliegen, ob dies ein zu-



fälliges Zusammentreffen ist, oder ob ein noch unbekanntes Gesetz hier im Spiele ist, dessen Auffindung ein großer Triumph der Chemie wäre.

Die Entscheidung zwischen Gesetzmäßigkeit und Zufälligkeit ist übrigens nur ein extremer Fall. Dieselben Grundsätze werden angewandt, wenn eine Erscheinung, unserer Kenntnis nach, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit aus verschiedenen Ursachen hervorgegangen sein kann. Wir werden uns dann für die Ursachen entscheiden, deren Vorhandensein, abgesehen von dem eingetretenen Erfolge, die größte Wahrscheinlichkeit hat. Auch hier werden wir nur in gewissen einfachen, willkürlich ersonnenen Fällen (Spielfällen) in der Lage sein, dieser Wahrscheinlichkeit einen Ausdruck durch Zahlen zu geben.

Später werden wir hierfür noch einige Beispiele geben.

4. Die Beurteilung der Wahrheit eines Berichtes, einer Erzählung stützt sich auf die gleiche Erwägung. Ein Bericht hat zunächst, abgesehen von seinem Inhalt, die Präsumption der Wahrheit für sich, aber auch die Möglichkeit einer Lüge, eines Irrtums, kurz der Unwahrheit des Berichtes liegt vor. Die berichtete Tatsache kann gleichfalls, abgesehen von der Glaubwürdigkeit des Berichtes, größere oder geringere Wahrscheinlichkeit haben. Je unwahrscheinlicher an sich die berichtete Tatsache ist, einer um so stärkeren Beglaubigung wird der Bericht bedürfen, wenn wir die Tatsache für wahr halten sollen. Das Entscheidende dabei ist, daß die Wahrscheinlichkeit eines falschen Berichtes kleiner sei als die Wahrscheinlichkeit der berichteten Tatsache. Gewisse Tatsachen wird uns keinerlei Bericht glaubhaft erscheinen lassen.

Dies sind die logischen Grundsätze, nach denen Wahrscheinlichkeiten zu beurteilen sind. Es sind dieselben, durch die der gesund und besonnen denkende Mensch in der Wissenschaft und im Leben sein Urteil, seine Erwartungen und schließlich auch sein Handeln bestimmen läßt.

Auf sie stützt sich auch eine richtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die, wie Laplace sich treffend ausdrückt, nichts anderes ist, als der in Rechnung gesetzte gesunde Menschenverstand.



Neunter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

---

§ 61. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten.

1. Mit den Zahlen, die wir den Wahrscheinlichkeiten zugeordnet haben, können Rechenoperationen ausgeführt werden; diese werden aber nur dann einen praktischen Wert haben, wenn sie bestimmten Verbindungen der Wahrscheinlichkeiten entsprechen, und wenn den Resultaten der Rechnung wieder die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit beigelegt werden kann. Hier kommen aber fast nur die Addition und die Multiplikation in Betracht. Daß selbst die Addition nur in beschränktem Umfange gebraucht werden kann, ergibt sich schon daraus, daß alle Wahrscheinlichkeiten echte Brüche sein müssen.

2. Bei der Bestimmung des Zahlenwertes einer Wahrscheinlichkeit kommt es, wie in § 58 ausgeführt ist, vor allem darauf an, eine Erscheinungsklasse E in eine gewisse Anzahl, n, von gleichwertigen Teilklassen zu teilen.

Wir setzen eine solche Einteilung als getroffen voraus und nennen diese Teilklassen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ jetzt die Elementarklassen.

Fassen wir irgend eine Anzahl r der n Elementarklassen zu einer Komplexe E' zusammen, so ist

$$w' = \frac{r}{n}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß eine noch unbekannte Erscheinung e der Klasse E dem Komplex E' angehört. Da $r \overline{\overline{<}}\, n$ ist, so ist $w' \overline{\overline{<}}\, 1$.

Bezeichnen wir mit E'' einen zweiten Komplex, der aus s Elementarklassen besteht, und nehmen an, daß E' und E'' keine gemeinsamen Elementarklassen enthalte, so besteht der Komplex E''' von E'' und E' aus $r + s$ Elementarklassen, und wenn w'' die Wahrscheinlichkeit für E'' bedeutet, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß e

zu E''' gehört, gleich $w' + w''$. Hierauf ist also die Anwendung der Addition beschränkt.

3. Multiplikation. Es seien, immer unter Voraussetzung gleichwertiger Elementarklassen, E', E'' zwei Teilklassen von E, die hier aber auch gemeinschaftliche Elemente enthalten, ja sogar identisch sein können, denen die Wahrscheinlichkeiten w', w'' zukommen. Nach der Definition sind dann

$$r' = nw', \quad r'' = nw''$$

die Anzahlen der Elementarklassen in E' und E''.

Es wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß von zwei Erscheinungen e' und e'' aus E die erste zu E', die zweite zu E'' gehört.

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir eine neue Erscheinungsklasse G bilden, deren Elemente g die Paare der Erscheinungen von E sind. Die Elementarklassen $G_{i,k}$ von G bilden wir so, daß wir unter $G_{i,k}$ die Gesamtheit der Fälle verstehen, bei denen das erste Element des Paares g zu E_i, das zweite zu E_k gehört. Da nun i und k von 1 bis n gehen, so ist die Anzahl der Elementarklassen $G_{i,k}$ gleich n^2.

Die Annahme, daß von den beiden Erscheinungen e', e'', die eine Erscheinung g zusammensetzen, die erste zu E', die zweite zu E'' gehört, gibt r' Werte von i und r'' Werte von k, und folglich $r'r''$ Elementarklassen $G_{i,k}$. Es ist also die Wahrscheinlichkeit dieser Annahme $r'r'' : n^2$, also gleich dem Produkt $w'w''$.

4. Die Annahme der Gleichwertigkeit der Klassen $G_{i,k}$ setzt voraus, daß die Erscheinungen e' und e'' voneinander unabhängig seien, d. h. die Wahrscheinlichkeit von E'' darf nicht verändert werden, wenn wir wissen, daß das Ereignis e' zu E' gehöre. Ob diese Voraussetzung zutrifft, muß in jedem Falle durch eine besondere Überlegung festgestellt werden.

Dieselben Betrachtungen gelten, wenn wir nicht bloß zwei, sondern eine beliebige Anzahl von Teilklassen E', E'', E''', ... annehmen.

5. Wir können das Resultat dieser Betrachtungen in dem Satze aussprechen:

> Das Produkt der Wahrscheinlichkeiten mehrerer voneinander unabhängiger Erscheinungen ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen aller dieser Erscheinungen.

Beispielsweise ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Werfen mit einem Würfel 6 fällt, gleich 1/6. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Würfel n mal hintereinander auf 6 fällt, ist also $(1/6)^n$. Dieselbe Wahrscheinlichkeit hat jede vorgeschriebene Reihenfolge von n Zahlen.

Damit ist die Anwendung arithmetischer Operationen auf die Wahrscheinlichkeiten erschöpft. Das Hauptinteresse in den Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt immer in der Ermittelung gleichwertiger Klassen. In vielen Fällen wird dabei dem subjektiven Ermessen, der Erfahrung und Klugheit ein gewisser Spielraum gegeben sein. In anderen Fällen, zu denen besonders die Zufallsspiele gehören, ist die Aufgabe rein mathematisch durch Abzählung zu lösen. Hierfür betrachten wir in der Folge einige typische Beispiele.

§ 62. Beispiel für abhängige und unabhängige Ereignisse.

1. Wir betrachten zunächst ein Beispiel, das den Unterschied zwischen abhängigen und unabhängigen Ereignissen zur Anschauung bringen soll.

Wenn zwei Spielkarten verdeckt auf dem Tische liegen, so gibt es für die Farbe, der diese Spielkarten angehören, vier Möglichkeiten; die erste rot, die zweite rot (r, r), die erste rot, die zweite schwarz (r, s), die erste schwarz, die zweite rot (s, r) und endlich beide schwarz (s, s).

Wenn wir nichts weiter wissen, werden wir jedem dieser Fälle die gleiche Wahrscheinlichkeit 1/4 zuschreiben.

Die Wahrscheinlichkeit für einen der beiden Fälle (r, s) und (s, r) ist aber 1/2. Es ist also wahrscheinlicher, daß von den beiden Karten die eine rot, die andere schwarz ist, als daß beide rot sind.

Dies bleibt noch alles ebenso, wenn wir wissen, daß die zwei Karten aus zwei verschiedenen Spielen gezogen sind.

2. Wenn aber beide Karten aus demselben Spiele gezogen sind, dann ist die Sache anders. Nehmen wir an, das Spiel enthalte $2n$ Karten, n rote und n schwarze. Für die erste Karte ergibt sich die Wahrscheinlichkeit 1/2 für rot und 1/2 für schwarz. Ist aber eine rote Karte gezogen, so sind nur noch $n - 1$ rote und n schwarze Karten im Spiele. Die Wahrscheinlichkeit für rot ist also jetzt $(n-1)/(2n-1)$, und für schwarz $n/(2n-1)$.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit

$$\text{für } (r, r): \quad \frac{n-1}{2(2n-1)},$$

$$\text{für } (r, s): \quad \frac{n}{2(2n-1)},$$

und ebenso

$$\text{für } (s, r): \qquad \frac{n}{2(2n-1)},$$

$$\text{für } (s, s): \qquad \frac{n-1}{2(2n-1)},$$

also eine erhöhte Wahrscheinlichkeit für (r, s) gegenüber (r, r). Alle vier Wahrscheinlichkeiten nähern sich um so mehr dem Werte $1/4$, je größer n ist. Ist $n = 1$, also überhaupt nur eine rote und eine schwarze Karte vorhanden, so sind die Fälle (r, r) und (s, s) ganz unmöglich. Für ein Whistspiel z. B. ist $n = 26$, also die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{25}{102}, \quad \frac{26}{102}, \quad \frac{26}{102}, \quad \frac{25}{102}.$$

§ 63. Der wahrscheinliche Wert.

1. Wir haben in § 59, 2. gesehen und an einem Beispiel erläutert, wie die Erwartung, daß die Vorhersagungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung eintreffen, selbst wieder ein Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist. Diese Frage ist von so fundamentaler Bedeutung für eine richtige Auffassung der ganzen Theorie, daß wir hier an der Hand eines verwandten Beispiels auf eine nähere Diskussion eingehen wollen.

2. Wir wollen annehmen, in einer Urne befinden sich weiße und schwarze Kugeln gemischt, in bekannter Anzahl. Es sei n die Gesamtzahl der Kugeln, a die Zahl der weißen, b die Zahl der schwarzen, also

$$n = a + b.$$

Wird aufs geradewohl hineingegriffen und eine Kugel herausgezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine weiße Kugel a/n und für eine schwarze b/n.

Wir nehmen nun an, der Zug werde öfter wiederholt und, um die bekannten Umstände gleich zu erhalten, werde nach jedem Zuge die Kugel in die Urne zurückgeworfen und gehörig umgeschüttelt. Es sei ν die Anzahl der Züge, α die Anzahl derer, die eine weiße, β derer, die eine schwarze Kugel ergeben haben, also

$$\nu = \alpha + \beta.$$

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit W_α für irgend eine Zahl α berechnen.

3. Bestimmen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit, daß α mal eine weiße, β mal eine schwarze Kugel in einer bestimmten vorgeschriebenen Reihenfolge gezogen werde, so haben wir für jede weiße Kugel eine Wahrscheinlichkeit a/n und diese Züge sind voneinander unabhängige Ereignisse im Sinne von § 61, 4. Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß bei α bestimmten Zügen jedesmal eine weiße Kugel gezogen wird, $(a/n)^\alpha$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit für die β schwarzen Züge $(b/n)^\beta$ und folglich die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse

$$\left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta. \tag{1}$$

4. Nun ist aber nur nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß α weiße und β schwarze Kugeln zum Vorschein kommen, nicht daß dies in einer bestimmten Reihenfolge geschieht. Wir haben also noch zu zählen, wie viele solcher Reihenfolgen es gibt. Diese Reihenfolgen sind gleichwertige Klassen, und folglich erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit, wenn wir die Zahl (1) mit der Anzahl der Reihenfolgen multiplizieren.

Es handelt sich also noch darum, zu ermitteln, auf wie viele verschiedene Arten man α Dinge auf die Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, \nu$$

verteilen kann, oder, was dasselbe ist, auf wie viele Arten man ν Elemente zu je α ohne Wiederholung kombinieren kann. Diese Zahl haben wir mit $B_\alpha^{(\nu)}$ bezeichnet und

$$B_\alpha^{(\nu)} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \alpha}$$
$$= \frac{\nu!}{\alpha!\,\beta!}$$

gefunden. Bd. I, § 53 der 1ten, § 57 der 2ten Auflage.

Es ist also die Wahrscheinlichkeit, daß unter ν Zügen α mal eine weiße Kugel gezogen wird,

$$W_\alpha = \frac{\nu!}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta. \tag{2}$$

6. Die Zahl α kann bei gegebenem ν jeden der Werte $0, 1, 2, \ldots, \nu$ haben, aber keinen anderen. Die Summe aller dieser Wahrscheinlichkeiten

$$W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_\nu$$

ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine unbestimmte Konstellation von α



und β erfolgt, also gleich 1, und dies ergibt sich auch aus der Bedeutung der Binomialkoeffizienten, wonach

$$\sum B_\alpha^{(\nu)} \left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta = \left(\frac{a+b}{n}\right)^\nu = 1$$

ist.

7. Um die verschiedenen W_α miteinander zu vergleichen, bilden wir den Quotienten

$$W_\alpha : W_{\alpha-1} = \frac{(\alpha-1)!\,(\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!} \frac{a}{b} = \frac{\beta+1}{\alpha} \frac{a}{b}.$$

Soll $W_\alpha > W_{\alpha-1}$ sein, so muß

$$\alpha b < (\beta+1)a = (\nu+1-\alpha)a$$

oder

$$n\alpha < (\nu+1)a, \quad \alpha < \frac{(\nu+1)a}{n}$$

sein. Es wird also $W_{\alpha-1}$ mit wachsendem α wachsen, so lange diese Ungleichheit erfüllt ist, und daraus folgt, daß W_α bei gegebenem ν den größten Wert W_{α_0} erhält, wenn $\alpha = \alpha_0$ die größte in $(\nu+1)a/n$ enthaltene ganze Zahl ist. Setzen wir dann

$$\alpha_0 = \frac{(\nu+1)a}{n} - \theta,$$

so ist θ ein positiver echter Bruch.

Es wird

$$\frac{\alpha_0}{\nu} = \frac{a}{n} + \frac{a}{\nu n} - \frac{\theta}{\nu},$$

und dieser „wahrscheinlichste Wert" des Verhältnisses $\alpha : \nu$ kommt also dem Verhältnisse $a : n$ der Zahl der vorhandenen weißen Kugeln zu der Gesamtzahl um so näher, je größer die Zahl ν der Versuche ist.

8. Wenden wir die Formel in 7. auf zwei aufeinander folgende Werte von α an, so ergibt sich

$$\frac{W_\alpha}{W_{\alpha-1}} = \frac{\beta+1}{\alpha} \frac{a}{b}, \quad \frac{W_{\alpha+1}}{W_\alpha} = \frac{\beta}{\alpha+1} \frac{a}{b},$$

und daraus

$$\frac{W_{\alpha+1}}{W_\alpha} - \frac{W_\alpha}{W_{\alpha-1}} = \frac{a}{b} \frac{\alpha\beta - (\alpha+1)(\beta+1)}{\alpha(\alpha+1)} = -\frac{a}{b} \frac{\nu+1}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Da dieser Ausdruck für jedes α negativ ist, so schließen wir:

Der Wert des Verhältnisses $W_\alpha : W_{\alpha-1}$ nimmt ab, wenn α wächst.

§ 64. Der Satz von Jacob Bernoulli.

1. Das letzte Resultat zeigt uns zwar, welcher Wert des Verhältnisses $\alpha : \nu$ und damit auch welcher Wert von $\alpha : \beta$ der wahrscheinlichste ist. Es ist aber auch damit noch nicht viel gewonnen, so lange wir nicht die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten untereinander vergleichen können.

Vor allem ist es aber von Interesse, was aus diesen Wahrscheinlichkeiten wird, wenn die Anzahl ν der Versuche unbegrenzt wächst.

Hierbei dürfen wir aber nicht nach der Wahrscheinlichkeit eines einzelnen bestimmten Wertes dieses Verhältnisses fragen; denn diese Wahrscheinlichkeit würde mit unbegrenzt wachsendem ν unendlich klein, was wir hier allerdings nicht begründen können; sondern wir müssen die Frage so stellen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, daß das Verhältnis $\alpha : \nu$ nicht über eine gewisse Größe von dem wahrscheinlichsten Werte abweiche. Hierüber gilt der folgende Satz, worin an die Stelle der Kugeln des Beispiels beliebige gleichmäßige Ereignisse, an Stelle der weißen Kugeln die einer bestimmten Absicht günstigen, an die Stelle der schwarzen die ungünstigen Fälle getreten sind.

2. Wenn unter n möglichen Fällen a günstige sind, und der Versuch wird ν mal wiederholt, darunter α mal mit günstigem Erfolge, so nähert sich die Wahrscheinlichkeit, daß das Verhältnis $\alpha : \nu$ von dem Werte $a : n$ um weniger als eine gegebene Größe $\varDelta$ abweicht, mit wachsendem ν unbegrenzt der Gewißheit.

3. Um den Beweis dieses Satzes elementar führen zu können, wollen wir, wie es Jacob Bernoulli getan hat, einige vereinfachende Voraussetzungen machen, die indessen das Wesen der Sache nicht berühren.

Zunächst wollen wir bemerken, daß der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wertes α

$$(1) \qquad W_\alpha = B_\alpha^{(\nu)} \left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta = \frac{\nu!}{\alpha!\,\beta!} \left(\frac{a}{n}\right)^\alpha \left(\frac{b}{n}\right)^\beta$$

nicht von den absoluten Werten von a, b, n, sondern nur von deren Verhältnissen abhängt. Man erhält also bei gleichbleibendem ν denselben Wert W_α, wenn die Zahl n aller möglichen Fälle beliebig vergrößert wird, wenn nur das Verhältnis, in dem günstige und un-



günstige Fälle gemischt sind, dasselbe bleibt. Man kann also n so groß annehmen, daß

$$\varDelta = \frac{1}{n}$$

beliebig klein wird.

4. Wir nehmen nun ferner an, daß die Anzahl der Versuche, ν, ein Vielfaches von n sei, und setzen, indem wir mit q eine natürliche Zahl bezeichnen,

$$\nu = qn.$$

Diese Voraussetzung ist nur zur Vereinfachung der Rechnung gemacht. Sie wird aber das Resultat nicht wesentlich beeinflussen können, wenn nur die Zahl ν im Vergleich zu n als groß angenommen wird.

Als wahrscheinlichster Wert von α hat sich im vorigen Paragraphen die größte in $(\nu + 1)a/n$ enthaltene ganze Zahl ergeben. Es ist aber unter der jetzt geltenden Voraussetzung

$$\frac{(\nu + 1)\,a}{n} = q\,a + \frac{a}{n},$$

und da a/n ein echter Bruch ist, so ist qa die größte ganze Zahl, die in diesem Bruch enthalten ist. Also ist qa der wahrscheinlichste Wert von α und qb der zugehörige Wert von β.

5. Wir fragen nun, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß das Verhältnis $\alpha : \nu$ zwischen den Grenzen $a/n - \varDelta$ und $a/n + \varDelta$ liegt (wobei wir die Grenzen mit einschließen können). Setzen wir $\varDelta = 1/n$, so ist dazu erforderlich, daß

$$\frac{a-1}{n} \leqq \frac{\alpha}{\nu} \leqq \frac{a+1}{n},$$

folglich

$$qa - q \leqq \alpha \leqq qa + q$$

ist; also ist unsere Frage gleichbedeutend mit der nach der Wahrscheinlichkeit, daß α einen der Werte

$$aq, \quad aq \pm 1, \quad aq \pm 2, \quad \ldots, \quad aq \pm q$$

habe. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit w, so ist, da hier die Voraussetzungen für die Addierbarkeit der Wahrscheinlichkeiten erfüllt sind (§ 61, 2.),

$$\begin{aligned} w = W_{aq} &+ W_{aq+1} + W_{aq+2} + \cdots + W_{aq+q} \\ &+ W_{aq-1} + W_{aq-2} + \cdots + W_{aq-q}. \end{aligned}$$

Die Gesamtsumme aller W_α ist gleich 1. Von diesen W_α fehlen in der Summe w die, in denen $\alpha > aq + q$ oder $\alpha < aq - q$ ist. Be-

zeichnen wir die ersten dieser Zahlen mit r, die zweiten mit s, verstehen also unter r und s alle Zahlen, die den Ungleichungen

(2)
$$aq + q < r \leqq nq,$$
$$0 \leqq s < aq - q$$

genügen, so ist

$$1 = w + \sum W_r + \sum W_s,$$

wenn sich die Summenzeichen auf alle zulässigen Werte von r und von s erstrecken. Setzen wir noch

$$R = \sum W_r + \sum W_s,$$

so wird

(3)
$$w = 1 - R.$$

6. Wir machen jetzt von dem Satze Gebrauch, daß das Verhältnis $W_\alpha : W_{\alpha-1}$ mit wachsendem α abnimmt (§ 63, 8.), und daß also, wenn $\alpha < \alpha'$ angenommen wird,

$$\frac{W_{\alpha+1}}{W_\alpha} > \frac{W_{\alpha'+1}}{W_{\alpha'}},$$

und daher auch

$$\frac{W_{\alpha'}}{W_\alpha} > \frac{W_{\alpha'+1}}{W_{\alpha+1}},$$

und daraus, indem wir α', α durch $\alpha' + 1$, $\alpha + 1$, dann durch $\alpha' + 2$, $\alpha + 2$ u. s. f. ersetzen, für ein positives p:

(4)
$$\frac{W_{\alpha'}}{W_\alpha} > \frac{W_{\alpha'+p}}{W_{\alpha+p}}.$$

Setzen wir darin $\alpha = aq$, $\alpha' = aq + q$, so folgt für jedes r, das der Bedingung (2) genügt,

$$\frac{W_{aq+q}}{W_{aq}} > \frac{W_r}{W_{r-q}},$$

und setzt man in (4) $\alpha + p = aq - q$, $\alpha' + p = aq$, so ergibt sich

$$\frac{W_{aq-q}}{W_{aq}} > \frac{W_{aq-q-p}}{W_{aq-p}} = \frac{W_s}{W_{s+q}}.$$

Bedeutet also M eine Zahl, die größer ist als die größte der beiden Zahlen

(5)
$$\frac{W_{aq+q}}{W_{aq}}, \quad \frac{W_{aq-q}}{W_{aq}},$$

so ergibt sich aus den letzten Ungleichungen

$$W_r < M W_{r-q},$$
$$W_s < M W_{s+q},$$

und wenn man die Summen über alle r und alle s nimmt und bedenkt, daß jede Summe aus einem Teile der W_α kleiner als 1 ist, also

$$\sum W_{r-q} + \sum W_{s+q} < 1,$$

so ergibt sich

(6) $$R < M.$$

7. Wir beweisen nun, daß die beiden Quotienten (5) Null werden, wenn q ins Unendliche wächst. Daraus folgt dann, daß man M, das keiner anderen Bedingung unterliegt, als daß es größer ist als diese beiden Quotienten, so klein annehmen kann als man will, wenn man q, d. h. ν hinlänglich groß annimmt, und daraus folgt weiter, daß die Wahrscheinlichkeit w der Einheit beliebig nahe kommt, wenn ν groß genug genommen wird, wie in dem Satze 2. behauptet ist.

Nach dem Ausdrucke (1) ist

$$\frac{W_{aq+q}}{W_{aq}} = \frac{(aq)!\,(bq)!}{(aq+q)!\,(bq-q)!}\left(\frac{a}{n}\right)^q\left(\frac{b}{n}\right)^{-q}$$
$$= \frac{(bq-q+1)(bq-q+2)\cdots bq}{(aq+1)(aq+2)\cdots(aq+q)}\left(\frac{a}{b}\right)^q,$$
$$\frac{W_{aq-q}}{W_{aq}} = \frac{(aq-q+1)(aq-q+2)\cdots aq}{(bq+1)(bq+2)\cdots(bq+q)}\left(\frac{b}{a}\right)^q.$$

Der erste dieser beiden Quotienten besteht aus q Faktoren

$$f_t = \frac{a(bq-q+t)}{b(aq+t)}, \quad t = 1, 2, \ldots, q.$$

Diese Faktoren f_t liegen aber der Größe nach alle zwischen den Werten

(7) $$\frac{b-1}{b} \quad \text{und} \quad \frac{a}{a+1},$$

denn man erhält die Differenzen

$$f_t - \frac{b-1}{b} = \frac{t(a-b+1)}{b(aq+t)},$$
$$f_t - \frac{a}{a+1} = -\frac{a(q-t)(a-b+1)}{b(a+1)(aq+t)},$$

die ein entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Da nun die beiden Größen (7) positive echte Brüche sind, so

sind sämtliche f_t kleiner als ein gewisser positiver echter Bruch und es ergibt sich, wenn wir diesen echten Bruch mit c bezeichnen,

$$\frac{W_{aq+q}}{W_{aq}} < c^q.$$

Ebenso findet man, daß die Faktoren

$$g_t = \frac{b(aq - q + t)}{a(bq + t)}, \quad t = 1, 2, \ldots, q,$$

aus denen der Quotient $W_{aq-q} : W_{aq}$ zusammengesetzt ist, zwischen

$$\frac{a-1}{a} \quad \text{und} \quad \frac{b}{b+1}$$

liegen, und daraus dann auch

$$\frac{W_{aq-q}}{W_a} < c^q$$

ist. Die vier echten Brüche

$$\frac{a-1}{a}, \quad \frac{a}{a+1}, \quad \frac{b-1}{b}, \quad \frac{b}{b+1}$$

lassen sich auch so darstellen:

$$1 - \frac{1}{a}, \quad 1 - \frac{1}{a+1}, \quad 1 - \frac{1}{b}, \quad 1 - \frac{1}{b+1},$$

und man kann für c den größten unter ihnen wählen, also je nachdem a oder b größer ist,

$$c = 1 - \frac{1}{a+1} \quad \text{oder} \quad c = 1 - \frac{1}{b+1}$$

setzen.

8. Je kleiner man das Intervall $\varDelta$ angenommen hat, um so größer wird man die Zahlen n, a, b, deren Verhältnisse nur als gegeben betrachtet werden, annehmen müssen, und um so mehr wird sich der Bruch c der Einheit nähern. Desto größer muß also auch q angenommen werden, wenn man die Wahrscheinlichkeit w auf eine bestimmte Höhe bringen will.

Nehmen wir $a \geqq b$, so wird $c = a/(a+1)$ gesetzt werden können, und es ergibt sich aus (6)

$$R < \left(\frac{a}{a+1}\right)^q;$$

damit nun R mit Sicherheit unter eine gewisse Grenze, z. B. $1:1000$, heruntersinke, muß

$$\left(\frac{a}{a+1}\right)^q < \frac{1}{1000}, \quad \left(\frac{a+1}{a}\right)^q > 1000$$

folglich

$$q(\log(a+1) - \log a) > 3$$

sein. Nehmen wir z. B. $a = b$ an und setzen $n = 200$, $a = b = 100$, so ist $\varDelta = 1 : 200$, $\lg(a+1) - \lg a = 0{,}0043 \ldots$ Es müßte also

$$q > \frac{3}{0{,}0043} > 750,$$

$$\nu = nq = 150\,000$$

werden.

Wenn also in der Urne gleichviele weiße und schwarze Kugeln enthalten sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 150 000 Versuchen das Verhältnis der weißen zu den schwarzen Zügen zwischen den Grenzen 0,495 und 0,505 liegt, mehr als tausendmal größer, als daß dies Verhältnis außerhalb dieser Grenzen liegt.

§ 65. Beispiele.

Wir betrachten noch einige einfache Beispiele für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten, wobei es sich immer um die Ermittelung gleichwertiger Klassen oder bei ungleichwertigen Klassen um die Vergleichung der Werte handelt.

1. Das eine Beispiel ist von historischem Interesse, weil es das erste ist, an dem sich der Scharfsinn Pascals versuchte:

Zwei Spieler A und B spielen miteinander, so daß in jedem einzelnen Spiele die Chancen des Gewinnens für jeden dieselben sind, z. B. „Kopf oder Schrift“. Es ist dabei verabredet, daß dem der ganze Einsatz zufallen soll, der zuerst drei Spiele gewonnen hat. Das Spiel wird aber abgebrochen, nachdem A ein Spiel, B zwei Spiele gewonnen hat. Wie ist der Einsatz zwischen A und B nach Billigkeit zu teilen?

Zum Gewinn des Einsatzes fehlen dem A noch zwei, dem B nur noch ein gewonnenes Spiel. Wenn also weiter gespielt worden wäre, so wäre nach höchstens zwei Spielen der Gewinn entschieden gewesen, denn diese zwei Spiele muß entweder A beide gewinnen oder B gewinnt wenigstens eins davon. Die Möglichkeiten des Gewinnens in diesen beiden Spielen sind aber

$$AA,\ AB,\ BA,\ BB,$$

und jede dieser Möglichkeiten ist gleich wahrscheinlich, davon ist aber nur die erste dem A günstig, in den drei letzten Fällen wäre B Sieger. Die Wahrscheinlichkeit des endlichen Gewinnens wäre

also $\frac{1}{4}$ für A und $\frac{3}{4}$ für B und in diesem Verhältnisse ist der Gewinn zu verteilen; A erhält $\frac{1}{4}$, B erhält $\frac{3}{4}$ des Einsatzes.

An dieser Überlegung wird nichts geändert, wenn man berücksichtigt, daß das Spiel beendet ist, sobald einer der Spieler gewonnen hat, daß also nur die drei Fälle

$$AA, AB, B$$

möglich sind. Denn der letzte Fall, daß B zuerst gewinnt, hat die gleiche Wahrscheinlichkeit wie die, daß einer der beiden Fälle BA oder BB eintritt.

2. Man sieht, daß es hierbei nicht auf die Zahl 3 der zu gewinnenden Spiele, sondern nur auf die Anzahl der jedem der beiden Spieler zum Gewinne noch fehlenden Spiele ankommt. Wenn also, um ein anderes Zahlenbeispiel zu wählen, dem A noch zwei, dem B noch drei Spiele fehlen, so ist nach höchstens vier Spielen der Gewinn entschieden.

Hier sind nun die gleichwertigen Möglichkeiten des Gewinnens folgende:

$$\begin{array}{llll} AAAA, & AAAB, & AABA, & AABB, \\ ABAA, & ABAB, & ABBA, & ABBB, \\ BAAA, & BAAB, & BABA, & BABB, \\ BBAA, & BBAB, & BBBA, & BBBB, \end{array}$$

und hierin sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13 dem A, und 8, 12, 14, 15, 16 dem B günstig. Die Chancen für A und B verhalten sich also wie 11 zu 5.

Wenn dem A noch a Spiele, dem B noch b Spiele fehlen, so ist der Gewinn nach höchstens $a + b - 1$ Spielen entschieden. Diese Spiele können auf 2^{a+b-1} gleich mögliche Arten verlaufen, und es handelt sich dann darum, abzuzählen, in wie vielen von diesen Fällen A früher seine a Spiele als B seine b Spiele gewonnen hätte.

2. Es werden drei Würfel geworfen. Die Zahl der Augen, die fallen, kann jeden der Werte zwischen 3 und 18 betragen, die beiden Grenzen eingeschlossen. Welche Wahrscheinlichkeit hat jede dieser Zahlen für sich?

Sind a, b, c die Augenzahlen, die sich bei einem Wurf auf den drei Würfeln zeigen, und

$$a + b + c = z,$$

so kommt es also darauf an, auf wie viele Arten für ein gegebenes z die a, b, c aus der Reihe der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 sich bestimmen lassen.

Wenn man die Würfel umdreht, so zeigen sie die Augenzahlen $7-a$, $7-b$, $7-c$ und es geht also z in $21-z$ über. Die Zahl z hat also dieselbe Wahrscheinlichkeit wie die Zahl $21-z$ und demnach können wir uns auf die Betrachtung der Werte $z = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ beschränken. Diese haben dann dieselben Wahrscheinlichkeiten wie die Werte 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11.

Kümmert man sich zunächst nicht um die Beschränkung, daß die a, b, c die Zahl 6 nicht übersteigen dürfen, so ergibt sich:

Eine Zahl $z > 1$ läßt sich auf $z-1$ Arten in zwei positive Summanden zerlegen; denn man kann für den ersten Summanden jede der Zahlen $1, 2, \ldots, z-1$ nehmen und erhält dadurch jedesmal den anderen bestimmt.

Eine Zahl $z > 2$ läßt sich auf

$$(z-2)+(z-3)+\cdots+2+1=\frac{(z-1)(z-2)}{2}$$

Arten in drei positive Summanden zerlegen. Denn man kann wieder für den ersten Summanden $1, 2, \ldots, z-2$ nehmen und erhält für die Differenz $z-1, z-2, \ldots, 2$ die Zahlen der Zerlegungen in zwei Summanden $z-2, z-3, \ldots, 1$.

So lange nun $z < 9$ ist, kann in der Zerlegung der Summand 7 oder eine noch größere Zahl nicht vorkommen, und wir finden also daß für

$$z = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

die Anzahl der möglichen Würfe die Dreieckszahlen

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21$$

sind. Für $z = 9$ aber fallen die drei Zerlegungen weg, in denen einer der Summanden 7, die beiden anderen 1 sind und für $z = 10$ die neun, in denen die Summanden 1, 1, 8 und 1, 2, 7 sind. Demnach bleiben für

$$z = 9,\ 10$$

die Zahlen der Zerlegung:

$$28-3=25, \quad 36-9=27.$$

Zur Übersicht stellen wir in der folgenden Tabelle die möglichen Würfe zusammen; dabei ist von je drei oder sechs Würfen, die durch Permutation auseinander entstehen, nur einer geschrieben, während die Anzahl der Permutionen in Klammern beigesetzt ist.

$3 = 1+1+1 \quad (1)$	$5 = 1+1+3 \quad (3)$
$4 = 1+1+2 \quad (3)$	$= 1+2+2 \quad (3)$

$$6 = 1 + 1 + 4 \quad (3)$$
$$= 1 + 2 + 3 \quad (6)$$
$$= 2 + 2 + 2 \quad (1)$$

$$7 = 1 + 1 + 5 \quad (3)$$
$$= 1 + 2 + 4 \quad (6)$$
$$= 1 + 3 + 3 \quad (3)$$
$$= 2 + 2 + 3 \quad (3)$$

$$8 = 1 + 1 + 6 \quad (3)$$
$$= 1 + 2 + 5 \quad (6)$$
$$= 1 + 3 + 4 \quad (6)$$
$$= 2 + 2 + 4 \quad (3)$$
$$= 2 + 3 + 3 \quad (3)$$

$$9 = 1 + 2 + 6 \quad (6)$$
$$= 1 + 3 + 5 \quad (6)$$
$$= 1 + 4 + 4 \quad (3)$$
$$= 2 + 2 + 5 \quad (3)$$
$$= 2 + 3 + 4 \quad (6)$$
$$= 3 + 3 + 3 \quad (1)$$

$$10 = 1 + 3 + 6 \quad (6)$$
$$= 1 + 4 + 5 \quad (6)$$
$$= 2 + 2 + 6 \quad (3)$$
$$= 2 + 3 + 5 \quad (6)$$
$$= 2 + 4 + 4 \quad (3)$$
$$= 3 + 3 + 4 \quad (3)$$

Man sieht, daß die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln eine bestimmte Augenzahl z zu werfen, gegen die Mitte zu wächst, am Anfang und am Ende aber stärker als gegen die Mitte.

3. Wenn ich eine Anzahl von n richtig abgekürzten Dezimalbrüchen zu addieren habe, so kann der Fehler in den letzten Dezimalen in einem jeden Summanden zwischen $-0,5$ und $+0,5$ schwanken. Die Möglichkeit des Fehlers in der Summe schwankt also zwischen $-0,5\,n$ und $+0,5\,n$, könnte also bei großem n sehr beträchtlich werden. Die Frage nach der Warscheinlichkeit eines Fehlers von bestimmter Größe ist nach denselben Grundsätzen zu beurteilen, wie in dem eben behandelten Problem mit den drei Würfeln, und es ergibt sich daraus das beruhigende Resultat, daß die in der Mitte liegenden, also hier die kleinen Fehler sehr viel wahrscheinlicher sind als die großen.

§ 66. Beispiele für die Wahrscheinlichkeit der Ursachen.

1. Wir haben schon in § 60 die allgemeinen Gesichtspunkte gegeben, nach denen eine Erscheinung α mit größerer Wahrscheinlichkeit der einen oder der anderen von mehreren denkbaren Ursachen $a, b, c, \ldots$ zuzuschreiben ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß etwa a die Ursache von α sei, ist der Wahrscheinlichkeit gleichzusetzen, mit der das Eintreten der Ursache a ohne Rücksicht auf den Erfolg zu erwarten war.

Die Frage liegt aber in Wirklichkeit oft nicht so einfach. Ein Beispiel wird dies klar machen. Es soll sich in einem bestimmten Todesfalle, über dessen nähere Umstände wir nicht unterrichtet sind, um die Wahrscheinlichkeit dieser oder jener Krankheit als Todesursache handeln. Dabei wird es nicht sowohl auf die relative Häufigkeit der betreffenden Krankheit an sich, sondern nur auf die Fälle mit tötlichem Ausgange ankommen. Wir werden also erstens die Wahrscheinlichkeit der Krankheit an sich und zweitens die Wahrscheinlichkeit des tötlichen Ausganges in Betracht zu ziehen haben.

2. Suchen wir dies auf eine allgemeine Formel zurückzuführen, so stellt sich die Frage so:

Die Erscheinungen a, b, c, ... gehören in gewisse Klassen A, B, C, ..., deren Elemente nur zum Teil die Erscheinung α verursachen können. Welche Wahrscheinlichkeit hat es, daß die Ursache von α unter A, unter B, unter C, zu suchen sei?

3. Die Antwort auf diese Frage wird einfach und anschaulich, wenn wir sie aus einem Spielfalle ableiten.

Nehmen wir an, wir haben schwarze und weiße Kugeln in der Menge N. Es seien im ganzen darunter n schwarze Kugeln, also die Wahrscheinlichkeit, blindlings eine schwarze Kugel zu ziehen,

$$P = \frac{n}{N} \cdot$$

Diese Kugeln mögen nun in eine Reihe von Beuteln (1), (2), (3), ... verteilt sein. Es sei eine schwarze Kugel gezogen und es wird nach der Wahrscheinlichkeit W_1 gefragt, daß diese schwarze Kugel aus dem ersten Beutel stammt.

Es seien

im Beutel (1) N_1 Kugeln, darunter n_1 schwarze,
" " (2) N_2 " " n_2 "
. . . .

Es sind also

$$p_1 = \frac{n_1}{N_1}, \quad p_2 = \frac{n_2}{N_2}, \quad \cdots$$

die Wahrscheinlichkeiten, daß bei einem Griff in den ersten oder in den zweiten u. s. w. Beutel eine schwarze Kugel ergriffen sei, und

$$P_1 = \frac{N_1}{N}, \quad P_2 = \frac{N_2}{N}, \quad \cdots$$

die Wahrscheinlichkeiten, daß überhaupt eine blindlings gezogene Kugel aus dem ersten, dem zweiten u. s. w. Beutel stammt.

Die Gesamtzahl aller schwarzen Kugeln, also der Möglichkeiten, die dem Erscheinen einer schwarzen Kugel günstig sind, beträgt n, und darunter sind n_1, die aus dem ersten Beutel stammen. Nehmen wir an, daß alle diese Züge gleich möglich sind, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w_1 = \frac{n_1}{n},$$

und diese Wahrscheinlichkeit ist also, wie es auch vorauszusehen war, nur von der Zahl und der Verteilung der schwarzen Kugeln, nicht von den Zahlen der weißen abhängig.

Benutzen wir aber nicht die Zahlen, sondern nur die Wahrscheinlichkeiten p_1, P_1, P, so ergibt sich nach den Formeln für p_1, P_1, P

$$w_1 = \frac{p_1 P_1}{P}.$$

4. Kehren wir wieder zu unserer allgemeinen Darstellung zurück, so können wir sagen:

> Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Erscheinung α aus der Ursachsklasse A stammt, ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeit von A mit der Wahrscheinlichkeit, daß A der Erscheinung α günstig sei, geteilt durch die Wahrscheinlichkeit von α überhaupt.

5. Um ein ganz einfaches Zahlenbeispiel zu nehmen, seien drei Beutel gegeben, in deren erstem zwei Goldmünzen, im zweiten zwei Silbermünzen, im dritten eine Gold- und eine Silbermünze liegen.

Ich habe blindlings eine Goldmünze ergriffen und frage nach der Wahrscheinlichkeit w_1, daß die zweite Münze desselben Beutels gleichfalls eine Goldmünze sei.

Dies findet nur dann statt, wenn die zuerst gezogene Münze aus dem ersten Beutel stammt. Es ist hier

$$P = \tfrac{1}{2}, \quad P_1 = P_2 = P_3 = \tfrac{1}{3},$$
$$p_1 = 1, \quad p_2 = 0, \qquad p_3 = \tfrac{1}{2},$$

und folglich

$$w_1 = \tfrac{2}{3}.$$

Nachdem also eine Goldmünze gezogen ist, ist es wahrscheinlicher, daß in demselben Beutel noch eine zweite Goldmünze zu finden ist.

6. Es ergibt sich hieraus ein Resultat, was auf den ersten Blick befremdet, wiewohl es richtig ist.

Nehmen wir an, im ersten Beutel sei nur eine Kugel und zwar eine schwarze, im zweiten sei eine schwarze Kugel unter einer sehr

großen Zahl von anderen. Die Wahrscheinlichkeit, aus dem ersten Beutel eine schwarze Kugel zu ziehen, ist hier der Gewißheit gleich, also ist $p_1 = 1$ zu setzen, während p_2 einen verschwindend kleinen Wert hat. Ist N die Gesamtzahl der Kugeln, so ist

$$P_1 = \frac{1}{N}, \quad P_2 = \frac{N-1}{N},$$

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{1}{N-1}, \quad P = \frac{2}{N},$$

und folglich $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$. Es spricht also hier die gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine gezogene schwarze Kugel aus dem ersten, wie daß sie aus dem zweiten Beutel stammt.

Zehnter Abschnitt.

Ausgleichung der Beobachtungsfehler.

§ 67. Beobachtungsfehler.

1. Alles menschliche Wissen und Können ist unvollkommen. So auch sind alle Messungen in der Astronomie, der Physik, der Geodäsie, der Technik oder wo sie sonst vorkommen mögen, auch wenn sie von dem geübtesten und sorgfältigsten Beobachter mit den besten Instrumenten ausgeführt sind, nicht absolut genau, sondern mit größeren oder kleineren Fehlern behaftet.

Es ist ein nahe liegendes Mittel, die Resultate dadurch zu verbessern, daß man ein und dieselbe Messung mehrmals wiederholt, vielleicht unter abgeänderten Bedingungen. Da diese verschiedenen Messungen einer und derselben Größe aber niemals genau miteinander übereinstimmen werden, so wird ein gewisser mittlerer Wert mit Wahrscheinlichkeit als der richtige zu betrachten sein. Es fragt sich aber, nach welchen Gesichtspunkten man diesen mittleren Wert auszuwählen oder zu bestimmen hat, und diese Frage zu lösen ist eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

2. Die Beobachtungsfehler sind von zwei verschiedenen Arten. Die erste Art bilden die sogenannten systematischen oder auch konstanten Fehler. Es sind die Fehler, die vorzugsweise in einem bestimmten Sinne wirken, für die daher eine einfache Ursache (§ 57) vorauszusetzen ist. Sie können z. B. in einer fehlerhaften Konstruktion des Meßinstrumentes oder in seiner Aufstellung ihre Ursache haben. Man wird sie nach Möglichkeit zu ermitteln suchen, indem man die Messung an Objekten ausführt, deren Größe bereits anderswoher bekannt ist, wobei sich dann zeigt, ob eine Tendenz der Abweichung im einen oder anderen Sinne vorhanden ist. Es ist die erste Aufgabe des Beobachters, diese systematischen Fehler, die sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung entziehen, zu ermitteln und ihren Einfluß unschädlich zu machen.

3. Die zweite Art von Fehlern sind die zufälligen. Es liegt in dem Begriffe des Zufalls, daß sich diese Fehler nicht auf einfache Ursachen zurückführen lassen; von diesen ist anzunehmen, daß sie nicht vorwiegend in einem Sinne wirken. Sie werden aber, je nach der Geschicklichkeit und Sorgfalt des Beobachters und nach der Güte des Instrumentes, in engeren oder weiteren Grenzen schwanken. Diese zufälligen Fehler sind nun, wie alle Zufallserscheinungen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugänglich. Es ist Gauß, dem wir die Begründung einer Wahrscheinlichkeitstheorie der Beobachtungsfehler verdanken, die unter dem Namen der Methode der kleinsten Quadrate bekannt ist. Sie gibt dem rechnenden Naturforscher ein sicheres Mittel in die Hand, durch das er Messungen, die nicht vollständig untereinander übereinstimmen, am besten zur Gewinnung eines Mittelwertes miteinander verbindet, unter der Voraussetzung, daß keine systematischen Fehler im Spiele sind. Dem Geiste der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechend ist der Nutzen dieser Methode der, daß zwar möglicherweise im einzelnen Falle ein anderer Wert als der mit ihr gefundene der Wahrheit noch näher kommen kann, daß aber im großen Ganzen, wenn man regelmäßig nach dieser Methode verfährt, die Abweichungen von der Wahrheit verschwindend klein sind (entsprechend dem Bernoullischen Theorem).

Da bei allen Wahrscheinlichkeitsfragen das subjektive Ermessen, Erfahrung und richtige Beurteilung unbekannter Umstände eine Rolle spielt, so liegt es in der Natur der Sache, daß in diesen Fragen von einem mathematischen Beweise im Sinne der Arithmetik nicht die Rede sein kann. Alle Ableitungen, die zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gegeben sind, haben keinen anderen Zweck als den, die Gründe namhaft zu machen, die für diese Methode sprechen, und das Gewicht dieser Gründe möglichst zu verstärken.

§ 68. Das arithmetische Mittel.

1. Jede Messung setzt sich aus einer Menge undefinierbarer Akte unserer Muskeln, unserer Sinnesorgane und unseres Verstandes zusammen, deren jeder mit gewissen Fehlern behaftet ist. Dazu kommen noch die zufälligen Fehler, die in dem Meßinstrument, der Beschaffenheit der Luft, kurz in der Umgebung ihren Grund haben. Alle diese Fehler zusammen haben Einfluß auf das Resultat der Messung, und zwar, wenn systematische Fehler ausgeschlossen sind, ebenso leicht im einen wie im anderen Sinne.

Ob wir die möglichen Fehler als stetig annehmen, oder aus einer sehr großen aber endlichen Zahl einzelner Elementarfehler



zusammengesetzt denken, das wird auf das Resultat ohne wesentlichen Einfluß sein. Wenn wir aber die letztere Annahme machen, so können wir ein sehr einfaches Bild an die Stelle der Messung setzen, das die wesentlichen Verhältnisse jeder Messung, mag sie sich auf eine Länge, einen Winkel, eine Zeit oder was immer beziehen, getreu wiedergibt.

2. Wir denken uns eine Urne, die schwarze und weiße Kugeln in unbekanntem Verhältnis enthält. Es soll das Verhältnis der Zahl der weißen zu der der schwarzen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu der Gesamtzahl der Kugeln ermittelt werden. Zu dieser Bestimmung soll uns aber nur das Mittel zu Gebote stehen, daß wir beliebig oft eine Kugel aus der Urne nehmen, wieder zurückwerfen und neu durcheinander mischen und dabei die gezogenen weißen Kugeln abzählen.

Ist wie früher a die Anzahl der weißen, n die Gesamtzahl der Kugeln, die in der Urne enthalten sind, so ist

$$x = \frac{a}{n}$$

die gesuchte Zahl, die der zu messenden Größe entspricht. Die einzelnen Züge entsprechen den Elementarakten einer Messung, und, in Gruppen zusammengefaßt, den einzelnen Messungen derselben Größe. Das Verhältnis $\xi = \alpha : \nu$ der Zahl der gezogenen weißen Kugeln zu der Gesamtzahl ν aller Züge ist das Resultat der Messung.

Nach dem Bernoullischen Theorem wächst die Wahrscheinlichkeit, daß ξ in einem beliebig gegebenen Intervall $x - \varDelta$ und $x + \varDelta$ liegt, mit der Zahl ν ins Unbegrenzte, und folglich wird bei hinlänglich großem ν dieses Verhältnis ein Näherungswert für das unbekannte x sein.

3. Wenn nun einmal ν Züge geschehen sind und nichts weiter bekannt ist, so werde ich keinen Grund haben, eher anzunehmen, daß x über ξ, als daß es unter ξ liegt, und ich werde also bis auf weiteres ξ als den wahrscheinlichsten Wert von x zu betrachten haben. Die Wahrscheinlichkeit, daß x um mehr als $\varDelta$ von ξ abweicht, wird um so kleiner, je größer die Zahl ν ist. Ich werde daher dem Resultat der Zählung, das zu ξ geführt hat, ein um so größeres Gewicht beilegen, je größer ν ist.

Das Gewicht einer solchen Messung, verglichen mit anderen, die sich nur durch den Wert von ν unterscheiden, erhält damit eine Maßzahl p, die wir mit ν proportional annehmen.

4. Wir denken uns nun die ganze Ziehung von ν Zügen in nacheinander ausgeführte Teilziehungen von ν_1, ν_2, ν_3, ... Zügen



zerlegt und jedesmal die Zahl $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ der weißen Züge bestimmt. Es ist dann

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots,$$

und die Zahl der weißen Kugeln

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots.$$

Betrachten wir jede der Teilziehungen als das Bild je einer besonderen Messung, deren Resultate

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\nu_1}, \quad \xi_2 = \frac{\alpha_2}{\nu_2}, \quad \xi_3 = \frac{\alpha_3}{\nu_3}, \quad \cdots$$

sind, so ist

$$\alpha = \nu_1 \xi_1 + \nu_2 \xi_2 + \nu_3 \xi_3 + \cdots$$

und folglich

$$\xi = \frac{\nu_1 \xi_1 + \nu_2 \xi_2 + \nu_3 \xi_3 + \cdots}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \cdots},$$

oder, wenn wir die Gewichte $p_1, p_2, p_3, \ldots$ einführen,

(1) $$x = \frac{p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots},$$

und das ist also der wahrscheinlichste Wert, der dem x als Resultat der verschiedenen Messungen zuzuschreiben ist. Haben diese Messungen alle das gleiche Gewicht, sind es also Messungen einer und derselben Größe, die unter unveränderten Umständen und mit derselben Sorgfalt angestellt sind, so haben wir $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \cdots$ zu setzen, und wenn wir also die Anzahl der Messungen mit m bezeichnen, so ist

(2) $$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m}{m},$$

d. h. der wahrscheinlichste Wert, der sich aus mehreren Messungen derselben Größe x ergibt, die unter denselben Umständen angestellt sind, ist das arithmetische Mittel (Durchschnittswert) aus den einzelnen Ergebnissen. Dies ist das Prinzip des arithmetischen Mittels, das sich also aus dem von uns gewählten Bilde ohne weiteres ergibt.

Sind irgend welche Umstände vorhanden, die der einen Beobachtung einen Vorzug vor der anderen geben, so werden wir den Beobachtungen verschiedene Gewichte beilegen und die Formel (1) statt der Formel (2) anwenden. Das Gewicht p der Gesamtheit der Beobachtungen ist die Summe der Gewichte der einzelnen Beobachtungen.

(3) $$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots.$$

Für die Schätzung der Gewichte lassen sich aber keine allgemeinen Regeln angeben.

§ 69. Der mittlere Wert einer Beobachtungsreihe.

1. Wenn sich in einer größeren Zahl von Messungen, die sich auf eine und dieselbe Größe x beziehen und die Werte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ergeben haben, eine vorfindet, die weit aus dem Bereiche der übrigen hinausfällt, so kann der Verdacht vorliegen, daß bei dieser ein ganz besonderer Umstand einen außergewöhnlich großen Fehler herbeigeführt hat, der den Wert dieser Beobachtung ganz aufhebt; um ein grobes Beispiel in unserem Bilde anzuführen, daß man sich etwa bei der Feststellung der Zahl der weißen Kugeln verzählt habe. Eine solche Beobachtung müßte dann bei der Feststellung des Wertes, den man für x zu nehmen hat, außer Betracht bleiben, da sie über den wahren Wert dieser Größe absolut nichts lehren könnte.

Die Frage aber, welche Grenze der Abweichung von den mittleren Werten einen solchen Verdacht hinlänglich begründet, von wo an man also eine solche irreguläre Beobachtung auszuschalten hat, läßt sich wieder nicht nach allgemeinen Prinzipien beantworten und muß der Erfahrung und dem Taktgefühl des Beobachters überlassen bleiben.

Man wird vielleicht einem Anfänger, um Willkür auszuschließen und ihn vor der Gefahr zu schützen, daß etwa eine vorgefaßte Meinung über das zu erwartende Resultat unbewußt Einfluß gewinne, die Vorschrift geben, alle Beobachtungen nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu berücksichtigen und keine auszuschalten. Dem erfahrenen Forscher muß es aber überlassen bleiben, hier in jedem besonderen Falle nach bestem Wissen zu entscheiden.

2. Einigermaßen wird diesen Zweifeln Rechnung getragen bei einer zweiten Methode, aus einer Reihe von Beobachtungen den wahrscheinlichsten Wert der gemessenen Größe abzuleiten, die von Dirichlet theoretisch untersucht ist.[1])

Wenn man sich nämlich nicht darauf beschränkt, für die Verbindung der Beobachtung eine von vornherein feststehende, von dem Ergebnisse der Beobachtung unabhängige Vorschrift zu geben, sondern, was prinzipiell richtig ist, das Ergebnis der Beobachtungen selbst bei der Art ihrer Verwertung mitsprechen läßt, so gelangt man dazu, den Messungen, die von dem Mittel am meisten abweichen, als minder zuverlässig ein geringeres Gewicht zuzuschreiben. In welchem Maße dies geschehen soll, darüber läßt sich freilich auch keine all-

1) Bemerkungen über die zweckmäßigste Art, Beobachtungen zur Bestimmung unbekannter Elemente zu verbinden. Dirichlets Werke Bd. II, S. 347. Bd. I, S. 379.



gemeine Regel angeben. Eine Art aber, wie dies geschehen kann, ist die folgende:

Angenommen, es sei eine ungerade Anzahl $2m-1$ von Messungen einer unbekannten Größe x angestellt. Wir ordnen die Resultate der Messungen der Größe nach

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{2m-1}$$

und nehmen für x den mittelsten dieser Werte

$$x = \xi_m.$$

Man sieht, daß bei dieser Bestimmung der Wert von x nicht verändert wird, wenn etwa einer der äußersten Werte ξ_1 oder ξ_{2m-1} von den übrigen weiter abweicht, während das arithmetische Mittel dabei in demselben Sinne verschoben wird.

Man gelangt zu dieser Regel durch Anwendung des Prinzips vom arithmetischen Mittel, wenn man der mittelsten Beobachtung ein beliebiges Gewicht, das gleich 1 genommen werden kann, zuschreibt und die Gewichte der übrigen mit ihrem Abstand vom Mittel umgekehrt proportional annimmt.

Um dann die Formel § 68, (1) anzuwenden, haben wir die Gewichte so zu bestimmen, daß

$$p_1 = \frac{q}{\xi_m - \xi_1}, \quad p_2 = \frac{q}{\xi_m - \xi_2}, \quad \ldots, \quad p_{m-1} = \frac{q}{\xi_m - \xi_{m-1}},$$

$$p_{m+1} = \frac{q}{\xi_{m+1} - \xi_m}, \quad p_{m+2} = \frac{q}{\xi_{m+2} - \xi_m}, \quad \ldots, \quad p_{2m-1} = \frac{q}{\xi_{2m-1} - \xi_m},$$

$$p_m = 1$$

wird, wenn q ein beliebiger Faktor ist.

Es ist dann

$$\begin{aligned} p_r\xi_r &= p_r\xi_m - q, \quad \text{wenn } r < m, \\ p_r\xi_r &= p_r\xi_m + q, \quad \text{wenn } r > m, \\ p_m\xi_m &= p_m\xi_m. \end{aligned}$$

Da nun ebenso viele r über m wie unter m liegen, so ergibt sich durch Addition aller dieser Ausdrücke:

$$\frac{p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots} = \xi_m.$$

Das Entsprechende für eine gerade Zahl von Beobachtungen würde sein, daß man das arithmetische Mittel zwischen den zwei mittelsten Werten annimmt.

§ 70. Wahrscheinlicher Fehler.

1. Wenn eine unbekannte Größe x durch Messungen und Beobachtungen irgend welcher Art bestimmt ist und dafür ein genäherter Wert ξ_1 gefunden ist, so werde ich bis auf weiteres diesen Wert ξ_1 für den wahrscheinlichsten Wert von x halten müssen. Wenn aber auf anderen Wegen oder durch neue Messungen für dieselbe Größe x andere Werte $\xi_2, \xi_3, \ldots$ gefunden sind, so ist es noch ungewiß, welcher Wert für den wahrscheinlichsten zu halten ist.

Ich werde, um die Regel des arithmetischen Mittels anwenden zu können, jedem dieser Werte $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ein gewisses Gewicht $p_1, p_2, p_3, \ldots$ beilegen müssen, und dann das Mittel

$$\xi = \frac{p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2 + p_3 \xi_3 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}$$

für den wahrscheinlichsten Wert halten.

Soll dieser Wert ξ wieder mit anderweitigen Bestimmungen von x verbunden werden, so wird ihm das Gewicht

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

beizulegen sein.

2. Die Schwierigkeit besteht nun immer in der richtigen Abschätzung des Gewichtes, die bei den komplizierten Vorgängen einer messenden Beobachtung nicht auf genaue mathematische Grundsätze zurückgeführt werden kann.

Um aber trotzdem zu einem bestimmten Verfahren zu gelangen, müssen wir eine Hypothese machen.

Bei jeder Beobachtung ξ wird, wenn man sie für sich, ohne Rücksicht auf die übrigen, betrachtet, eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür vorhanden sein, daß ihr Fehler dem absoluten Werte nach einen gegebenen positiven Wert nicht überschreitet. Eine absolute Genauigkeit hat eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit, während es andererseits sicher ist, also die Wahrscheinlichkeit „Eins" hat, daß der Fehler zwischen Null und Unendlich liegt. Es muß also eine bestimmte Grenze r geben, bei der die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler darunter liegt, $= 1/2$ ist, und es hat dann die gleiche Wahrscheinlichkeit, daß der absolute Wert des Fehlers unter r liegt, wie daß er darüber liegt. Diese Größe r heißt der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung ξ.

Man kann die Definition von r auch so ausdrücken: Es ist 1 gegen 1 zu wetten, daß der Fehler unter r liegt.

Je zuverlässiger die Beobachtung ist, desto kleiner

wird ihr wahrscheinlicher Fehler sein und dieser kann daher als Maß für die Genauigkeit der Beobachtung dienen.

3. Man wird in einer Beobachtungsreihe einer Beobachtung ein um so größeres Gewicht einräumen, je kleiner der wahrscheinliche Fehler ist, und über diesen Zusammenhang, der sich aus allgemeinen Gründen nicht exakt bestimmen läßt, muß eine Annahme gemacht werden.

Das Nächstliegende wäre wohl, daß man das Gewicht dem wahrscheinlichen Fehler umgekehrt proportional setzt. Diese Annahme ist aber nach dem Urteile erfahrener Forscher wie Gauß, Laplace nicht als die beste anzusehen, sondern das Gewicht einer Beobachtung nimmt in einem stärkeren Verhältnisse ab. Man hat einer Beobachtung, die den doppelten wahrscheinlichen Fehler hat, wie eine andere, weniger als die Hälfte des Gewichtes der ersten beizulegen, und die Annahme, die allgemein gemacht wird, ist die, daß das Gewicht umgekehrt proportional mit dem Quadrate des wahrscheinlichen Fehlers ist.

Das Gewicht ist eine Verhältniszahl, die nur einen Sinn hat, wenn es sich darum handelt, mehrere Beobachtungen miteinander in Verbindung zu setzen, und es kann nach Belieben einer dieser Beobachtungen das Gewicht 1 beigelegt oder auch eine andere Einheit gewählt werden. Der wahrscheinliche Fehler dagegen ist in denselben Einheiten ausgedrückt, wie die zu messende Größe selbst. Wir können demnach auch, indem wir über die Einheit des Gewichtes verfügen, mit p das Gewicht, mit r die wahrscheinlichen Fehler bezeichnen,

$$p = \frac{1}{r^2}$$

setzen.

4. Wenn eine Reihe von Bestimmungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ einer und derselben Größe x vorliegt mit den Gewichten $p_1, p_2, p_3, \cdots$ und den wahrscheinlichen Fehlern $r_1, r_2, r_3, \ldots$, so erhält man daraus nach Nr. 1 ein Mittel ξ, dessen Gewicht $= p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ ist. Für den wahrscheinlichen Fehler r dieses Wertes ξ erhält man $1 : \sqrt{p}$ und daraus

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{1}{r_1^{\,2}} + \frac{1}{r_2^{\,2}} + \frac{1}{r_3^{\,2}} + \cdots}.$$

§ 71. Messung von Vielfachen einer Unbekannten.

1. Wir haben früher den Fall betrachtet, daß eine unbekannte Größe x mehrmals direkt gemessen sei, und haben die Bestimmung der Unbekannten durch das arithmetische Mittel als die beste



erkannt. Wir betrachten jetzt einen etwas allgemeineren Fall, daß nicht x selbst, sondern verschiedene Vielfache von x

(1) $$a_1 x,\ a_2 x,\ a_3 x,\ \ldots$$

gemessen seien, und daß die Messungen die Werte

(2) $$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots$$

ergeben haben. Hierin sollen die $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gegebene positive Zahlen sein. Aus diesen Messungen erhält man die Werte von x

(3) $$\frac{\xi_1}{a_1},\ \frac{\xi_2}{a_2},\ \frac{\xi_3}{a_3},\ \ldots,$$

die, wenn die Messungen absolut genau wären, alle miteinander identisch sein müßten, wegen der Beobachtungsfehler aber voneinander abweichen werden. Es ist die Frage, welchen Wert für x wir für den wahrscheinlichsten zu halten haben.

2. Diese Aufgabe ist durch das arithmetische Mittel gelöst, wenn die Gewichte

(4) $$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots$$

der einzelnen Bestimmungen (3) bekannt sind; denn dann ist der wahrscheinlichste Wert von x

(5) $$\xi = \frac{\frac{p_1 \xi_1}{a_1} + \frac{p_2 \xi_2}{a_2} + \frac{p_3 \xi_3}{a_3} + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung bei etwaiger weiterer Kombination mit anderen Messungen ist

(6) $$p = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots.$$

3. Nehmen wir an, daß die Messungen (2) alle denselben Grad von Zuverlässigkeit haben, so wird ihnen allen der gleiche wahrscheinliche Fehler ϱ zuzuschreiben sein. Der daraus abgeleitete Wert ξ_1/a_1 hat dann aber nur den wahrscheinlichen Fehler ϱ/a_1, und demnach sind die wahrscheinlichen Fehler der Bestimmungen (3)

(7) $$\frac{\varrho}{a_1},\ \frac{\varrho}{a_2},\ \frac{\varrho}{a_3},\ \ldots,$$

und nach der in § 70, 3. gemachten Annahme über den Zusammenhang zwischen Gewicht und wahrscheinlichem Fehler haben wir

$$p_1 = \frac{a_1^2}{\varrho^2},\quad p_2 = \frac{a_2^2}{\varrho^2},\quad p_3 = \frac{a_3^2}{\varrho^2},\quad \ldots$$

zu setzen und finden nach (5)

$$\xi = \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots},$$

wofür wir auch abgekürzt

(8) $$\xi = \frac{\Sigma a_1 \xi_1}{\Sigma a_1^2}$$

schreiben können. Das Gewicht dieser Bestimmung ist

$$p = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots}{\varrho^2},$$

und folglich ihr wahrscheinlicher Fehler

$$r = \frac{\varrho}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots}}.$$

§ 72. Kleinste Summe der Fehlerquadrate.

1. Wenn die Unbekannte x genau bekannt wäre, so wären auch die Fehler der Messungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ bekannt, nämlich

$$D_1 = a_1 x - \xi_1, \quad D_2 = a_2 x - \xi_2, \quad D_3 = a_3 x - \xi_3, \quad \ldots,$$

wenn wir eine zu kleine Größe als mit einem positiven, eine zu große als mit einem negativen Fehler behaftet annehmen.

2. Nun ist aber x nicht genau bekannt, und also sind es auch nicht die Fehler. Der für uns wahrscheinlichste Wert von x ist aber ξ (§ 71, (5)), und folglich sind

$$\varDelta_1 = a_1 \xi - \xi_1, \quad \varDelta_2 = a_2 \xi - \xi_2, \quad \varDelta_3 = a_3 \xi - \xi_3, \quad \ldots$$

bis zu einer genaueren Kenntnis von x die wahrscheinlichsten Werte der Fehler $D_1, D_2, D_3, \ldots$ (Hier ist der wahrscheinlichste Wert eines Fehlers wohl zu unterscheiden von dem wahrscheinlichen Fehler, der in § 70, 2. definiert ist.)

3. Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit einer Bestimmung ist von Wichtigkeit die Summe der Fehlerquadrate

$$Q = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \cdots,$$

auf deren Wert positive und negative Fehler gleichmäßig einwirken. Diese Summe hat immer einen positiven Wert, und sie wäre nur dann gleich Null, wenn alle Messungen ganz exakt wären. Q ist unbekannt, so lange der wahre Wert von x unbekannt ist. Den wahr-



scheinlichsten Wert R von Q erhalten wir aber, wenn wir den wahrscheinlichsten Wert von x einführen, nämlich

$$R = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots.$$

4. Wir beweisen nun den Satz:

Unter allen möglichen Annahmen, die man über den Wert von x machen kann, gibt ξ der Summe der Fehlerquadrate den kleinsten Wert.

Es ist nämlich

$$D_1^2 - \Delta_1^2 = (D_1 - \Delta_1)(D_1 + \Delta_1)$$
$$= a_1(x - \xi)(a_1(x + \xi) - 2\xi_1),$$

und wenn wir dieselben Ausdrücke für D_2, Δ_2, a_2, ξ_2, ... bilden und die Summe nehmen, so folgt

$$Q - R = (x - \xi)\left[(x + \xi)\sum a_1^2 - 2\sum a_1 \xi_1\right].$$

Es ist aber nach § 71, (8)

$$\sum a_1 \xi_1 = \xi \sum a_1^2,$$

und folglich

$$Q - R = (x - \xi)^2 \sum a_1^2,$$

also immer positiv (außer wenn $x = \xi$ ist), daher ist $Q > R$ und R ist der kleinste unter allen Werten, die Q annehmen kann. Wegen dieser Eigenschaft der Summe der Fehlerquadrate führt die Methode, die wir hier auseinandergesetzt haben, eine Reihe von Beobachtungen am zweckmäßigsten zur Bestimmung einer Unbekannten zu verbinden, den Namen der Methode der kleinsten Quadrate.[1])

§ 73. Wahrscheinlicher Fehler und mittlerer Fehler.

1. Der wahrscheinliche Fehler ϱ der Beobachtungsreihe $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ ist in der Regel nicht bekannt, und darum ist es auch der wahrscheinliche Fehler r des Endergebnisses ξ nicht. Aber die Beobachtungen

1) Es ist ohne Zweifel Gauß, der diese Methode zuerst ersonnen und angewandt hat (seit 1797). Veröffentlicht hat er aber erst viel später etwas darüber (1809 in der Theoria motus corporum coelestium, 1816 in der Zeitschrift für Astronomie und seit 1821 in mehreren Abhandlungen in den Schriften der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften [Gauß Werke Band 4]). Inzwischen waren andere Forscher unabhängig auf dieselbe Methode gekommen (Legendre 1805, Adrain in Amerika 1808). Von besonderer Bedeutung sind die theoretischen Untersuchungen von Laplace in der Théorie analytique des Probabilités (in drei Auflagen von 1809—1820).

selbst geben dann eine gewisse Vermutung über die Größe des wahrscheinlichen Fehlers, ebenso wie die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln eine Vermutung über das wahre Verhältnis der weißen zu den schwarzen Kugeln in der Urne gibt; und diese Vermutung wird um so besser begründet sein, je größer die Zahl der Beobachtungen ist.

Da wir die wahren Fehler $D_1, D_2, D_3, \ldots$ nicht kennen, setzen wir die wahrscheinlichen $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ an ihre Stelle, und es folgt nun aus dem Begriffe des wahrscheinlichen Fehlers ϱ, daß, wenn nur die Anzahl dieser Fehler groß genug ist, etwa ebenso viele dem absoluten Werte nach über als unter ϱ liegen. Die bekannten Daten sprechen also für folgende wahrscheinlichste Annahme über den wahrscheinlichen Fehler:

> Man ordne die absoluten Werte der Δ ihrer Größe nach. Ist die Anzahl der Δ eine ungerade, so nehme man den mittelsten von ihnen für ϱ. Ist aber die Anzahl eine gerade, so kann mit gleichem Rechte jeder zwischen den beiden mittelsten Δ gelegene Wert für ϱ genommen werden.

Denn jeder solche Wert von ϱ hat die Eigenschaft, daß gleich viele Δ über ihm als unter ihm liegen.

2. Außer dem wahrscheinlichen Fehler kann zur Charakterisierung der Zuverlässigkeit der Beobachtungen irgend einer Art noch eine andere Größe, der mittlere Fehler m, dienen, den wir so definieren können:

Es seien die Beobachtungen in großer Zahl n ausgeführt und ihre Fehler seien $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n$. Dann setze man

$$m^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \cdots + D_n^2}{n},$$

also

$$m = \sqrt{\frac{D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \cdots + D_n^2}{n}}.$$

> Der mittlere Fehler ist also die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Fehlerquadrate.

Diese Definition gibt allerdings erst bei einer unendlich großen Zahl von Beobachtungen einen genaueren Sinn. Man wird aber, wenn man nur eine beschränkte Zahl von Beobachtungen hat, auch diesen endlichen Ausdruck als einen Näherungswert von m betrachten dürfen und wird überdies, wenn man die wahren Fehler nicht kennt, an deren Stelle sich mit den wahrscheinlichsten begnügen müssen. Es ist dann

$$\mu = \sqrt{\frac{\varDelta_1^2 + \varDelta_2^2 + \varDelta_3^2 + \cdots + \varDelta_n^2}{n}}$$

der wahrscheinlichste Wert des mittleren Fehlers der vorliegenden Beobachtungsreihe.

Der mittlere Fehler steht in noch direkterem Zusammenhange mit der Methode der kleinsten Quadrate, die man jetzt auch so charakterisieren kann:

> Der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten, der sich aus einer gegebenen Beobachtungsreihe ergibt, ist der, für den sich der kleinstmögliche Wert des mittleren Fehlers ergibt.

Eine Betrachtung, die nicht elementarer Natur ist und sich auf eine plausible Annahme stützt, führt dazu, daß der wahrscheinliche und der mittlere Fehler in einem ganz bestimmten numerischen Verhältnisse stehen:

$$\varrho = 0{,}6744897\, m.$$

§ 74. **Verallgemeinerung.**

1. Die nächste Verallgemeinerung des bisher behandelten Problems besteht darin, daß nicht eine unbekannte Größe durch direkte Messung, sondern gleichzeitig mehrere daraus bestimmt werden sollen, daß eine Reihe von Größen, die von diesen Unbekannten in bekannter Weise abhängen, gemessen werden, und da ist nun wieder der einfachste Fall, auf den übrigens alle anderen zurückgeführt werden, daß lineare Verbindungen dieser Unbekannten gemessen sind.

Wir nehmen drei Unbekannte x, y, z an und setzen voraus, daß n lineare Verbindungen

$$(1) \qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad \ldots$$

mit bekannten Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ gemessen seien und die Werte

$$(2) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

ergeben haben.

Es liegt keine wesentliche Beschränkung in der Annahme, daß diese Ausdrücke (1) homogen seien, denn wenn noch bekannte Glieder e_1, e_2, ... zu (1) additiv hinzutreten, so hätte man nur $\lambda_1 - e_1$, $\lambda_2 - e_2$, ... statt λ_1, λ_2, ... als die gemessenen Größen zu betrachten.

2. Wenn $n = 3$ ist, so erhalten wir drei Gleichungen

$$a_i x + b_i y + c_i z = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3,$$



und wir können daraus für x, y, z keine anderen Werte ableiten als die, die sich durch Auflösung dieser drei linearen Gleichungen nach der Algebra ergeben (Bd. I, § 40 der 1ten, § 44 der 2ten Auflage). Ist aber $n > 3$, so sind im allgemeinen diese Gleichungen nicht miteinander verträglich, was davon herrührt, daß die gemessenen λ_i mit Fehlern behaftet sind. Je drei dieser Gleichungen geben andere Werte für die Unbekannten, und es handelt sich wieder darum, welche Werte ξ, η, ζ für die x, y, z wir nach den vorliegenden Beobachtungen für die wahrscheinlichsten zu halten haben. Wir nehmen dabei an, daß die Messungen, durch die die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ gewonnen sind, alle denselben Grad von Zuverlässigkeit, also denselben wahrscheinlichen Fehler haben.

3. Um zu einem Ansatz zu gelangen, wollen wir einfach das Prinzip, das wir im vorigen Paragraphen für einen besonderen Fall gewonnen haben, verallgemeinern, d. h. wir wollen ξ, η, ζ so annehmen, daß der mittlere Fehler, der sich aus dieser Annahme für die Messungen ergibt, so klein als möglich wird.

Sind x, y, z die wahren Werte der Unbekannten, so sind die wahren Fehler der Messungen

$$\begin{aligned} D_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z - \lambda_1, \\ D_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z - \lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und für den mittleren Fehler m erhalten wir also

$$m^2 = \frac{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2}{n},$$

und wenn wir für x, y, z nicht die wahren, sondern irgend welche Werte setzen, so nimmt diese Summe immer andere, aber nur positive Werte an, unter diesen Werten wird einer der kleinste sein, und unsere Hypothese geht dahin, daß die Werte $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$, die diesem kleinsten Werte entsprechen, die wahrscheinlichsten seien.

Die wahrscheinlichsten Fehler sind dann

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta - \lambda_1, \\ \Delta_2 &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta - \lambda_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

und

$$\mu^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}$$

ist der Minimalwert der Funktion m^2.

4. Um diese Werte ξ, η, ζ zu finden, setzen wir

$$D_i^2 - \varDelta_i^2 = (D_i - \varDelta_i)^2 + 2(D_i - \varDelta_i)\varDelta_i.$$

Wenn wir nun ξ, η, ζ so bestimmen, daß

$$(4) \qquad \sum (D_i - \varDelta_i)\varDelta_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

wird für alle x, y, z, so ergibt sich durch Summation der Differenz $D_i^2 - \varDelta_i^2$ für $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$n(m^2 - \mu^2) = \sum (D_i - \varDelta_i)^2,$$

also immer positiv und m ist immer größer als μ.

Unser Ziel wird also erreicht sein, wenn wir die Gleichung (4) befriedigen können.

5. Die Gleichung (4) lautet, ausführlicher geschrieben, so:

$$\sum (a_i(x - \xi) + b_i(\eta - y) + c_i(z - \zeta))\varDelta_i = 0,$$

und da sie für alle Werte von x, y, z erfüllt sein soll, so zerfällt sie in die drei Gleichungen

$$(5) \qquad \sum a_i \varDelta_i = 0, \quad \sum b_i \varDelta_i = 0, \quad \sum c_i \varDelta_i = 0,$$

worin nun für $\varDelta_i$ die Ausdrücke (3) zu setzen sind.

Wir führen eine abkürzende Bezeichnung ein, indem wir, wenn $c_1, c_2, \ldots, c_n$; $g_1, g_2, \ldots, g_n$ irgend zwei Reihen von n Größen sind,

$$[cg] = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_n g_n$$

setzen. Dann nehmen die Gleichungen (5) nach (3) die folgende Form an

$$(6) \qquad \begin{aligned} [aa]\xi + [ab]\eta + [ac]\zeta &= [a\lambda], \\ [ba]\xi + [bb]\eta + [bc]\zeta &= [b\lambda], \\ [ca]\xi + [cb]\eta + [cc]\zeta &= [c\lambda], \end{aligned}$$

und somit haben wir also ein System von drei Gleichungen ersten Grades erhalten, durch deren Auflösung die Werte ξ, η, ζ gefunden werden.

§ 75. Gemessene abhängige Größen.

Nehmen wir an, es seien drei Größen x, y, z durch Messungen zu bestimmen, zwischen denen eine gewisse Abhängigkeit

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

besteht. Es seien z. B. x, y, z die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem Falle die Gleichung (1) die Form erhält:

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = z^2.$$

Es seien n Messungen dieser Größen x, y, z von gleichem Gewicht ausgeführt, die die Resultate

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad \ldots; \quad x_n, y_n, z_n$$

ergeben haben mögen.

Die Methode der kleinsten Quadrate lehrt, daß der Wert von x zu nehmen ist, für den die Summe der Fehlerquadrate

$$\Delta = \sum^{i} ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2) \tag{3}$$

so klein als möglich wird, aber so, daß dabei die Bedingung (1) erfüllt ist.

Man kann dieser Aufgabe in folgender Weise eine anschauliche geometrische Deutung geben:

Man betrachte x, y, z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P im Raume. Der gesuchte Punkt P muß dann auf der durch die Gleichung (1) dargestellten Fläche liegen und dabei die Größe Δ so klein als möglich machen. Im Falle (2) ist diese Fläche ein gerader Kegel mit dem Koordinatenanfangspunkte als Spitze und der z-Achse als Achse. Die gemessenen Größen x_i, y_i, z_i sind die Koordinaten von n Punkten P_i, die nicht genau auf der Fläche f liegen werden.

Aus (3) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta = n(x^2 + y^2 + z^2) - 2x\sum x_i - 2y\sum y_i - 2z\sum z_i \\ + \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \end{aligned} \tag{4}$$

und wenn wir

$$na = \sum x_i, \quad nb = \sum y_i, \quad nc = \sum z_i$$

setzen, so sind a, b, c die Koordinaten des Schwerpunktes s der mit gleichen Massen belegten Punkte P_i.

Es wird nach (4)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \frac{\Delta}{n} - \frac{1}{n} \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + a^2 + b^2 + c^2,$$

und da auf der rechten Seite außer Δ alles gegeben ist, so muß

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \tag{5}$$

so klein als möglich sein. Ist keine Bedingung (1) vorhanden, so ergibt dies, wie im vorigen Paragraphen,

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Ist aber die Bedingung (1) zu berücksichtigen, so ist (5) für ein konstantes r die Gleichung einer Kugel mit s als Mittelpunkt und r ist so zu bestimmen, daß diese Kugel die Fläche f berührt. Der Berührungspunkt ist der gesuchte Punkt P.

§ 76. Genäherte Berechnung von Irrationalzahlen.

1. Wir wollen für die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ein Beispiel betrachten, das zwar keinen praktischen Wert hat, aber doch lehrreich ist, weil sich alle Verhältnisse klar übersehen lassen.

Wenn wir eine beliebige Reihe von Irrationalzahlen haben und wir ersetzen jede dieser Zahlen durch die zunächst gelegene ganze Zahl, so begehen wir einen Fehler, der positiv oder negativ sein kann, deren absoluter Wert niemals größer als 0,5 ist. Wir haben also hier eine Fehlergrenze, d. h. einen Wert, über den kein Fehler hinausgehen kann. Innerhalb dieser Grenze müssen wir aber jeden Fehler für gleich wahrscheinlich halten, und es wird sich durchschnittlich ebenso oft ereignen, daß ein Fehler über, als daß er unter 0,25 liegt (dem absoluten Werte nach). Der wahrscheinliche Fehler ist also 0,25, und denselben Wert hat in diesem Falle der mittlere Fehler.

2. Dies können wir anwenden, um den wahrscheinlichsten Wert des Fehlers und damit also einen genaueren Näherungswert einer Irrationalzahl x zu berechnen, wenn wir die erwähnten ersten Annäherungen (in ganzen Zahlen) für eine Reihe von Vielfachen von x kennen. Es seien etwa

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \ldots$$

die den Irrationalzahlen

$$x, \ 2x, \ 3x, \ \ldots$$

zunächst gelegenen ganzen Zahlen; dann gibt das Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate (§ 71) den wahrscheinlichsten Wert ξ von x:

$$\xi = \frac{\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 + \cdots}{1 + 2^2 + 3^2 + \cdots},$$

und darauf läßt sich ein Verfahren gründen, um die Zahl x näherungsweise zu berechnen, also z. B. auch eine Näherungsmethode zur Auflösung numerischer Gleichungen. Man wird freilich eine große Zahl von Gliedern berechnen müssen, um einen einigermaßen genauen Wert zu erhalten, und es wird daher diese Methode wohl kaum in der Praxis Anwendung finden. Zur Erläuterung wollen wir es anwenden auf $x = \sqrt{2}$.

3. Gehen wir z. B. bis zu $22\sqrt{2}$, so erhalten wir für

$$\sqrt{2}, \ \sqrt{8}, \ \sqrt{18}, \ \sqrt{32}, \ \ldots, \ 22\sqrt{2}$$

die Näherungswerte

$$1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24,$$
$$25, 27, 28, 30, 31,$$

und wir erhalten für die Zähler von ξ

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 22 \cdot 31 = 5371.$$

Der Nenner ist

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 22^2 = 3795$$

(Bd. I, § 57, 3. der 1ten, § 61, 4. der 2ten Auflage) und daraus ergibt sich

$$\xi = 1{,}4155\ldots,$$

während der wahre Wert

$$x = 1{,}414\,213\,562\,373$$

ist. Geht man bis $70\sqrt{2}$, so erhält man

$$\xi = 1{,}414\,15.$$

4. Lassen wir die Anzahl der benutzten Vielfachen von x ins Unendliche wachsen, so erhalten wir eine unbegrenzt wachsende Genauigkeit, also eine genau richtige Darstellung der Zahl x. Wir gelangen so zu einem analytischen Satze, der mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts mehr zu tun hat und den wir auch ohne diese beweisen können. Der Satz lautet so:

Bezeichnen wir allgemein mit $E(x)$ die ganze Zahl, die der positiven irrationalen Zahl x so nahe als möglich kommt, und ist x eine gegebene positive irrationale Zahl, so ist x der Grenzwert des Bruches

$$\frac{E(x) + 2E(2x) + 3E(3x) + \cdots + nE(nx)}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}$$

für ein unendlich wachsendes n.

Setzen wir für $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$E(kx) = kx + \varepsilon_n,$$

so liegt nach der Definition von $E(kx)$ die Zahl ε_k zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, und es wird also

$$\frac{\Sigma k\, E(kx)}{\Sigma k^2} = x + \varrho,$$

worin

$$\varrho = \frac{\Sigma k\, \varepsilon_k}{\Sigma k^2}.$$

Es ist also

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\Sigma k}{\Sigma k^2} < \varrho < \frac{1}{2}\,\frac{\Sigma k}{\Sigma k^2},$$

und darin ist

$$\sum k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

also ist (Bd. I, § 56, 57 der 1ten, § 61, 62 der 2ten Auflage)

$$-\frac{3}{2(2n+1)} < \varrho < \frac{3}{2(2n+1)},$$

und man sieht also, daß ϱ unter jede Grenze heruntersinkt, wenn n über alle Grenzen wächst.

Übrigens würde sich dasselbe Resultat ergeben, wenn wir andere Multiplikatoren nehmen als die, die uns die Wahrscheinlichkeitsrechnung geliefert hat. In der Tat ist, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl ist, x ebenso gut der Grenzwert von

$$\frac{\Sigma k^{p-1} E(kx)}{\Sigma k^p}.$$

Infolge der verschiedenen Vorzeichen der ε_k wird aber die Größe ϱ noch stärker abnehmen, als die obige Grenzbestimmung angibt, und in dieser Beziehung ist also nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Exponent $p = 2$ der günstigste.

Für $p = 1$ z. B. gibt unser Beispiel den Wert 1,4110, was von dem wahren Werte mehr, und zwar nach der entgegengesetzten Seite, abweicht.



FÜNFTES BUCH.

GRAPHIK.

Elfter Abschnitt.

Parallelprojektion auf eine Tafel.

§ 77. Aufgabe und Methode der darstellenden Geometrie. Zentral- und Parallelprojektion.

1. Die darstellende Geometrie stellt sich die Aufgabe, räumliche Figuren so auf eine Ebene, die Bildebene, abzubilden, daß i. a. den Punkten jeder Geraden des Raumes im Bilde wiederum Punkte einer Geraden entsprechen. Diese Abbildung wird durch Projektion bewirkt, d. h. man nimmt außerhalb der Bildebene η noch einen festen Punkt O, das Projektionszentrum, an, das auch in irgend einer Richtung im Unendlichen liegen kann, und weist jedem Punkte P des Raumes den Punkt P' der Bildebene als Bild zu, der mit O und P in einer Geraden liegt. Diese Gerade OP, die das Projektionszentrum mit dem darzustellenden Punkte P verbindet, heißt der Projektionsstrahl von P.

Fällt P mit O zusammen, so wird der Projektionsstrahl unbestimmt, und mit ihm das Bild des Projektionszentrums.

Jeder Strahl durch das Projektionszentrum projiziert die unendlich vielen Punkte, die auf ihm liegen; allen diesen Punkten entspricht also ein und derselbe Bildpunkt, nämlich der Schnitt- oder Spurpunkt des Projektionsstrahls mit der Bildebene. Jedem Punkte Q' der Bildebene entsprechen also umgekehrt im Raume die unendlich vielen Punkte der Geraden OQ' als Originale, deren Bild Q' ist.

2. Daß die Abbildung des Raumes auf eine Ebene nicht eindeutig sein kann, ließ sich voraussehen. Denn schreibt man einer Geraden ∞ viel Punkte zu, so hat eine Ebene deren $\infty \cdot \infty = \infty^2$, da man sie in den ∞ vielen Geraden dieser Ebene unterbringen kann, die auf einer Geraden dieser Ebene senkrecht stehen; der

Raum hat dann $\infty^2 \cdot \infty = \infty^3$ Punkte, die etwa durch die ∞ vielen Normalebenen einer Geraden erschöpft werden können. Folglich muß bei der Abbildung der ∞^3 Punkte des Raumes auf die ∞^2 Punkte einer Ebene jeder Punkt dieser Ebene ∞ viel Raumpunkte repräsentieren. Die darstellende Geometrie, so wie sie wenigstens zurzeit ausgebildet ist, erfüllt nun diese Forderung in der Weise, daß die ∞ vielen Punkte, von denen ein beliebiger Punkt P' der Bildebene das Bild ist, den durch diesen Punkt gehenden Projektionsstrahl erfüllen.

3. Die Projektionsstrahlen sind übrigens die einzigen Geraden des Raumes, deren Abbildung je auf einen Punkt zusammenschrumpft. Denn verbindet man O mit den Punkten einer nicht durch O gehenden Geraden p, so liegen diese Strahlen in der durch O und p festgelegten Ebene, die die Bildebene auf alle Fälle in einer Geraden p', dem Bilde von p trifft; auf p' liegen die Bilder aller Punkte von p. Jede nicht durch das Projektionszentrum gehende Gerade p wird also durch eine Gerade p' abgebildet, und diese ist zugleich das Bild jeder der ∞^2 Geraden, die in der durch O und p gehenden Ebene (O, p) liegen; alle diese Geraden haben die Ebene (O, p) zur „projizierenden“ Ebene[1]), d. h. die Projektionsstrahlen der Punkte jeder dieser Geraden liegen in dieser Ebene. Ganz allgemein läßt sich sagen: Eine beliebige Kurve k der Bildebene ist das Bild jeder der unendlich vielen Kurven, die auf dem Projektionskegel dieser Kurve k liegen, d. h. auf den Strahlen, die das Projektionszentrum mit den Punkten von k verbinden.

4. Aus der bloßen Angabe ihres Bildes ist demnach eine räumliche Figur nicht eindeutig rekonstruierbar; es müssen vielmehr, um die Beziehung von Bild und Original völlig eindeutig zu machen, noch andere Angaben hinzutreten, und nach der Art dieser Angaben unterscheidet man zahlreiche Projektionsverfahren, von denen wir nur die praktisch wichtigsten werden kennen lernen. Außerdem teilt man die Projektionen ein in Zentral- und Parallelprojektionen, je nachdem das Projektionszentrum im Endlichen oder im Unendlichen liegt. Sämtliche Projektionsmethoden machen Angaben, welche vor allem die Rekonstruktion des Projektionszentrums ermöglichen; die wechselseitig eindeutige Beziehung zwischen Original und Bild wird erreicht entweder, indem man

1) Der kürzere Ausdruck Projektionsebene ist nicht verfügbar, da er vielfach der Bildebene beigelegt wird; statt Projektionsstrahl müßte man eigentlich, aber unbequemer, projizierender Strahl sagen.

zwei verschiedene Projektionen desselben Gegenstandes angibt, oder die Projektionen dreier in einer Ecke aneinanderstoßender Kanten eines zum Vergleich dienenden Würfels. Das erste Verfahren wird bei zentraler Projektion als Photogrammetrie ausgebildet, d. h. als Lehre von der Rekonstruktion eines Raumgebildes aus mehreren Photographieen; bei Parallelprojektion ergibt es die verschiedenen Zweitafelsysteme. Das zweite Verfahren liegt den verschiedenen axonometrischen Darstellungsweisen zugrunde.

5. Die Zentralprojektion oder Perspektive gibt die räumlichen Gegenstände im wesentlichen so wieder, wie wir sie mit einem starr gehaltenen Auge sehen; denn die vom Objekte durch die Pupille auf die Linse fallenden Sehstrahlen bilden angenähert ein Strahlenbündel, das durch die Linse mit ihren verschieden brechenden Schichten in eigentümlicher Weise umgewandelt wird, und zu unserem Bewußtsein gelangt schließlich das (umgekehrte) Bild, das dieses durch die Linse dringende Strahlenbündel auf der Netzhaut entwirft; bringt man nun das Sehstrahlenbündel, bevor es ins Auge dringt, mit einer Glasscheibe zum Schnitt, so erhält man auf dieser ein Bild des räumlichen Gegenstandes, wie es die Zentralprojektion liefert, und da man sich das ins Auge gelangende Strahlenbündel statt vom Raumgegenstand auch von diesem Bilde ausgehend denken kann, so muß das Bild (bei monokularem Sehen) auf das Auge dieselbe geometrische Wirkung hervorbringen wie der Gegenstand. Der Vorzug des projektiven Bildes ist also die Bildtreue; dagegen fehlt ihm die unmittelbare Maßtreue, d. h. die Gegenstände erscheinen nicht in ihren wirklichen Größenverhältnissen; ein dem Projektionszentrum, z. B. dem sehenden Auge, naher Mensch erscheint größer als ein sehr entferntes Haus. Mittelbar hat natürlich auch das projektive Bild Maßtreue, insofern man nämlich die wirklichen Maßverhältnisse der dargestellten Gegenstände aus den scheinbaren des Bildes in mehr oder minder einfacher Weise rekonstruieren kann.

6. Charakteristisch für die Zentralprojektion ist das Verhalten paralleler Geraden: diese werden nur dann auch im Bilde durch parallele Geraden dargestellt, wenn sie zur Bildebene parallel sind. Denn da die projizierenden Ebenen α und β zweier paralleler Geraden a und b den Punkt O, das Projektionszentrum, gemeinschaftlich haben, so treffen sie sich in einer durch O gehenden Geraden p, die den gemeinschaftlichen unendlich fernen Punkt von a und b projiziert, also zu a und b parallel ist; sie trifft die Bildebene im Fluchtpunkte, d. h. im Bilde des unendlich fernen Punktes von a und b, und dieser liegt selber nur dann im Unendlichen, wenn p und damit a, b zur Bildebene parallel ist.

7. Läßt man das Projektionszentrum in irgend einer Richtung ins Unendliche rücken, so werden die projizierenden Ebenen α und β einander parallel, treffen also die Bildebene in parallelen Geraden. Parallele Geraden werden also bei Parallelprojektion immer wieder durch parallele Geraden dargestellt, falls sie nicht zur Projektionsrichtung parallel sind, wo nach Nr. 1, 2, 3 die Bilder der Geraden in ihre Spurpunkte zusammenschrumpfen. Infolge dieser Tatsache hat die Parallelprojektion mehr unmittelbare Maßtreue als die Perspektive und erfüllt deshalb vorzugsweise die Anforderung, die der Architekt und Ingenieur an die ebene Abbildung räumlicher Gegenstände stellen, daß man Winkel und Strecken des Raumgegenstandes aus dem Bilde möglichst leicht entnehmen kann. Da die Bilder paralleler Geraden bei Parallelprojektion wieder parallele Gerade sind, so ist jede Parallelprojektion eines Parallelogramms wieder ein Parallelogramm, das in eine Strecke ausartet, wenn die Ebene desselben zur Projektionsrichtung parallel ist. Daraus folgt weiter, daß die Parallelprojektionen gleicher und gleich gerichteter Strecken wiederum gleiche und gleich gerichtete Strecken sind; denn liegen zwei solcher Strecken auf verschiedenen Geraden, so bestimmen ihre Endpunkte ein Parallelogramm, liegen sie auf derselben Geraden, so bestimmen sie mit einer dazu parallelen und gleichen Strecke auf einer anderen Geraden zwei Parallelogramme, die allemal als Parallelogramme projiziert werden.

8. Diese Tatsache folgt auch unmittelbar aus der Ähnlichkeitslehre und kann so verallgemeinert werden: Wenn ein Punkt eine

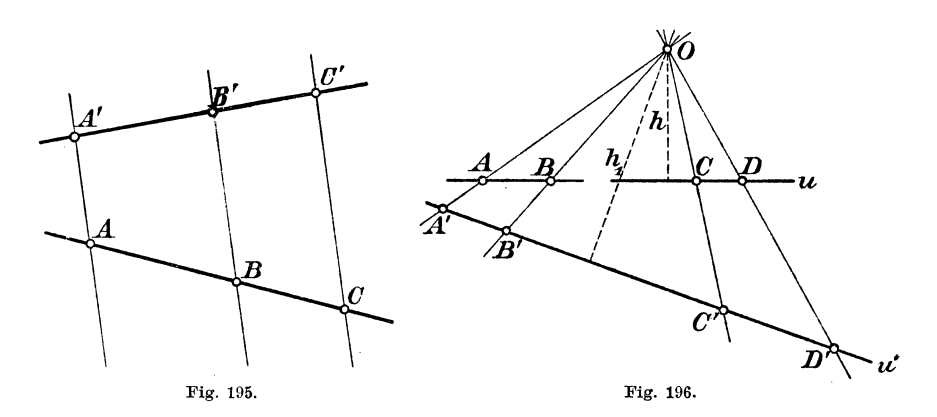


Fig. 195. Fig. 196.

Strecke in irgend einem Verhältnisse teilt, so teilt in jeder Parallelprojektion das Bild dieses Punktes das Bild der

Strecke in demselben Verhältnisse; denn aus Figur 195 entnimmt man, wenn $AA' \| BB' \| CC'$ ist:

$$AC : CB = A'C' : C'B'.$$

Bei Zentralprojektion bleibt dagegen das einfache Verhältnis zweier Strecken einer Geraden nicht ungeändert, wohl aber das Doppelverhältnis. Sind z. B. (Fig. 196) die Geraden u und u' durch ein Strahlenbüschel O aufeinander perspektiv bezogen, so daß den Punkten A, B, C, D von u die Punkte A', B', C', D' von u' entsprechen, und sind h, h_1 die von O auf u und u' gefällten Lote, so ist:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} &= \frac{\frac{1}{2}AB \cdot h}{\frac{1}{2}BC \cdot h} : \frac{\frac{1}{2}AD \cdot h}{\frac{1}{2}DC \cdot h} = \frac{AOB}{BOC} : \frac{AOD}{DOC} \\ &= \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OB \sin AOB}{\frac{1}{2}OB \cdot OC \sin BOC} : \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OD \sin AOD}{\frac{1}{2}OD \cdot OC \sin DOC} \\ &= \frac{\sin AOB}{\sin BOC} : \frac{\sin AOD}{\sin DOC} = \frac{\sin A'OB'}{\sin B'OC'} : \frac{\sin A'OD'}{\sin D'OC'} \\ &= \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'};\end{aligned}$$

also gilt ganz allgemein der Satz:

Bei Zentralprojektion bleibt das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden ungeändert.

§ 78. Schräge axonometrische Parallelprojektion.

1. Aus den Sätzen des § 77, Nr. 7, folgt unmittelbar das allgemeine Konstruktionsverfahren der axonometrischen Parallelprojektionen. Wir nehmen zunächst an, es sei uns bereits gelungen, die drei von einer Ecke O ausgehenden Kanten OX, OY, OZ eines Würfels durch Parallelprojektion auf eine Ebene abzubilden[1]), O^*X^*, O^*Y^*, O^*Z^* seien die Bilder. Es sei der Spezialfall vermieden, daß von den vier Punkten O^*, X^*, Y^*, Z^* drei in gerader Linie liegen.

Die drei Geraden OX, OY, OZ betrachten wir als Achsen eines rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystems. Um jetzt einen beliebigen Punkt P des Raumes in der vorliegenden Parallelprojektion darzustellen, fällen wir von P auf die drei Koordinaten-

1) Mit O wird in diesem Paragraphen, abweichend vom vorigen, der Anfangspunkt eines Koordinatensystems bezeichnet; in § 77 war O (oculus) das Projektionszentrum.

achsen die Lote PP_x, PP_y, PP_z. Dann sind $x = OP_x$, $y = OP_y$, $z = OP_z$ die Koordinaten von P. Es gilt jetzt, auf O^*X^*, O^*Y^*, O^*Z^* die Bilder P_x^*, P_y^*, P_z^* von P_x, P_y, P_z zu finden. Das geschieht auf Grund der Bemerkung, daß nach § 77, 8.

$$O^*P_x^* : O^*X^* = OP_x : OX, \quad O^*P_y^* : O^*Y^* = OP_y : OY,$$
$$O^*P_z^* : O^*Z^* = OP_z : OZ$$

sein muß, durch Reduktion der drei Koordinaten x, y, z.

Man zeichnet zu diesem Zwecke OX hin (Fig. 197), trägt in

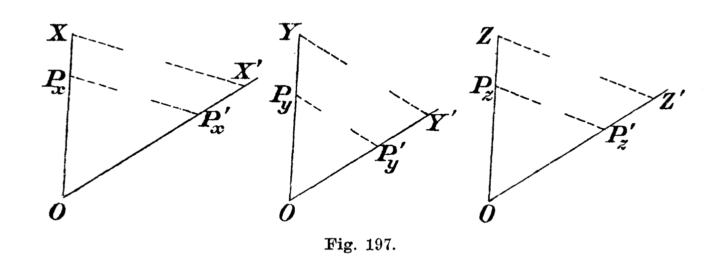


Fig. 197.

irgend einer Richtung die Strecke $OX' = O^*X^*$ daran, trägt auf OX die Strecke OP_x ab und zieht $P_xP_x' \parallel XX'$. Dann heißt

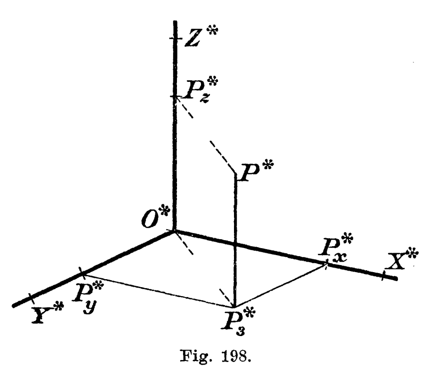


Fig. 198.

$$x^* = OP_x'$$

und ebenso

$$y^* = OP_y', \quad z^* = OP_z'$$

die reduzierte[1]) Länge von x, y, z. Jetzt macht man (Fig. 198) auf den Bildern der drei Koordinatenachsen einfach $O^*P_x^* = x^*$, $O^*P_y^* = y^*$, $O^*P_z^* = z^*$, zieht $P_x^*P_3^* \#$ (parallel und gleich) $O^*P_y^*$, $P_3^*P^* \#$ $O^*P_z^*$, und P^* ist das gesuchte Bild von P.

2. In dieser Weise wird man alle bestimmenden Punkte der vorgelegten Raumfigur darstellen. In dieser Form ist aber das Verfahren viel zu umständlich; es wird vor allen Dingen darauf ankommen, die Hilfskonstruktionen mit der endgültigen Figur in irgend eine Verbindung zu bringen, um Hilfslinien zu sparen. Zunächst

1) Man projiziert in der Regel so, daß die sog. reduzierten Längen stets kürzer sind als die wirklichen. In der Figur sind, um auch den Fall des Gegenteils einmal zu illustrieren, die Bilder der Koordinaten länger als die Originale.

wollen wir die Vereinfachung vornehmen, daß die Bildebene zur z-Achse parallel liegt. Dann ist (Fig. 199) $O^*Z^* \mathrel{\#} OZ$, die Reduktion der z-Koordinate fällt also fort. Die vereinfachte Reduktion der anderen Koordinaten ist dann unmittelbar aus Figur 199 ersichtlich, wo $O^*S = OX = OY = OZ$ ist. Dieses Verfahren ist neuerdings von Beyel weiter ausgebildet worden (vgl. Archiv für Math. und Phys. (2), 4, Seite 237.)

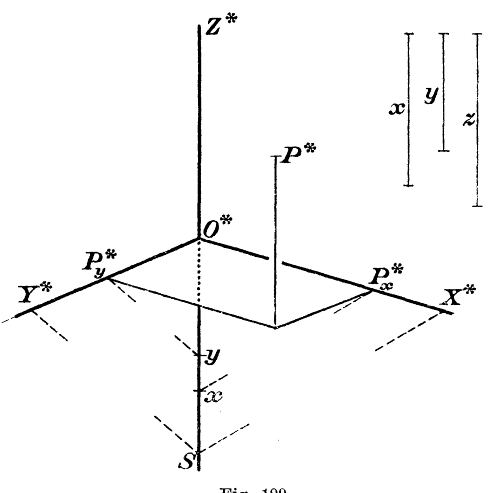


Fig. 199.

3. Wie man sieht, kommt bei diesen auf Koordinaten gestützten Parallelprojektionen, die deshalb axonometrische genannt werden, alles darauf an, die drei gleichen und aufeinander senkrechten Strecken OX, OY, OZ in Projektion zu setzen und umgekehrt aus ihren Bildern die Strecken zu rekonstruieren. Da gilt nun der Fundamentalsatz von Pohlke[1]): Drei von einem Punkte O^* ausgehende Strecken O^*X^*, O^*Y^*, O^*Z^* können immer als Parallelprojektion eines Systems von drei gleichen und aufeinander senkrechten Strecken OX, OY, OZ angesehen werden, wobei höchstens drei der Punkte O^*, X^*, Y^*, Z^* in einer Geraden liegen dürfen; und zwar gibt es im allgemeinen vier Systeme $OXYZ$, von denen $O^*X^*Y^*Z^*$ eine Parallelprojektion ist, und die durch Parallelverschiebung in der Richtung der Projektionsstrahlen nicht ineinander übergehen.

Dieser Satz hat bis jetzt nur theoretischen Wert gehabt, praktisch ist die Rekonstruktion von $OXYZ$ aus $O^*X^*Y^*Z^*$ im allgemeinen Falle zu verwickelt. Wir dürfen daher von einem Beweise absehen und werden uns auf Fälle beschränken, die der unmittelbaren Behandlung besonders zugänglich sind.

4. Die vorangehenden Ausführungen gelten für jede axonometrische Parallelprojektion; ausführlicher wollen wir jetzt das Verfahren der schrägen axonometrischen Parallelprojektion entwickeln.

---

1) Vgl. Fr. Schilling, Über den Pohlkeschen Satz, Ztschr. f. Math. u. Phys. 48 (1902), Seite 487 ff.

Das ist eine axonometrische Parallelprojektion, deren Projektionsstrahlen gegen die Bildebene schräg, nicht senkrecht stehen und deren Bildebene zu zwei Koordinatenachsen, etwa zur x- und zur z-Achse, parallel ist. Das Ergebnis dieser Projektion heiße kurz ein Schrägbild. Im Schrägbilde erscheinen daher alle zur x- und zur z-Achse parallelen Strecken in ihrer wahren Größe, nur die Strecken in der Richtung der y-Achse sind in demselben Verhältnisse verkürzt oder verlängert.[1])

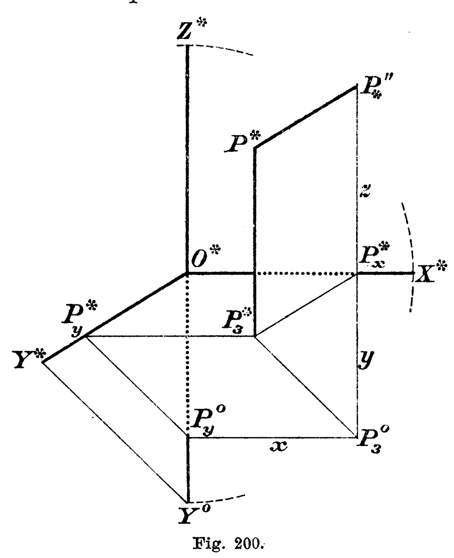


Fig. 200.

Die Figur 199 geht jetzt in Figur 200 über, wo $O^*X^* = OX$, $O^*Z^* = OZ$, $O^*P_x^* = x$, $P^*P_3^* = z$; auf O^*Z^* ist nach unten $O^*Y^0 = OY$, $OP_y^0 = y$ abgetragen, und durch P_y^0 ist $P_y^0 P_y^* \parallel Y^0 Y^*$ gezogen. Dadurch ist P_y^* bestimmt. Eine andere Konstruktion des Punktes P^* geht von $O^*P_x^* = x$ aus, errichtet $P_x^* P_*'' = z$, $P_x^* P_3^0 = y$ und zieht durch P_x^* zu O^*Y^* und durch P_3^0 zu Y^*Y^0 die Parallelen, diese treffen sich in P_3^*. Dann ist $P^*P_3^* \mathrel{\#} P_*''P_x^*$. Durch Angabe von O^*, Y^*, Y^0 ist also das Verfahren festgelegt.

5. Diese Ableitung des Schrägbildes führt zwar unmittelbar zum Mechanismus der Konstruktion, ist aber geometrisch zu wenig anschaulich. Um einen tieferen Einblick in die Bedeutung der Hilfslinien dieser Konstruktion zu bekommen, machen wir uns zunächst die Tatsache zunutze, daß die Parallelprojektion eines Gegenstandes sich nicht ändert, wenn man die Bildebene parallel zu sich selbst verschiebt. Wir dürfen daher die Bildebene mit der xz-Ebene einfach zusammenfallen lassen. Die Bilder der Punkte dieser Ebene sind daher mit ihren Originalen identisch, werden also ebenso bezeichnet. Dagegen sollen die Schrägbilder aller anderen Raumpunkte von nun an die Marke s erhalten (Fig. 201). Der Fußpunkt des von P auf die xz-Ebene gefällten Lotes, die Orthogonalprojektion von P, heiße P'', der Fußpunkt des Lotes von P auf die xy-Ebene wird, etwas umständlich, aber der Übereinstimmung

1) Man wählt die Projektionsrichtung in der Regel so, daß keine Verlängerung eintritt; vgl. Anm. auf Seite 412.

mit dem folgenden Abschnitte wegen, mit P' bezeichnet, sein Schrägbild mit P_s'; ebenso sei P''' der Fußpunkt des Lotes von P auf die zy-Ebene, P_s''' sein Bild. In der Figur ist OY' die wahre Länge von OY_s; ferner $OP_x = x$, $P_xP' = y$ und senkrecht auf der x-Achse, $P'P_s' \| Y'Y_s$, $P_xP_s' \| OY_s$, $P_s'P_s \# P_xP'' = z$.

Wie man sieht, kann jeder Punkt mittels seiner Koordinaten bildlich dargestellt werden, wenn nur die eine, auf der Bildebene senkrechte Strecke OY dargestellt ist. Da ist nun klar, daß je nach der Wahl der Projektionsrichtung jeder beliebige Punkt Y_s der Bildebene als Projektion von Y auftreten

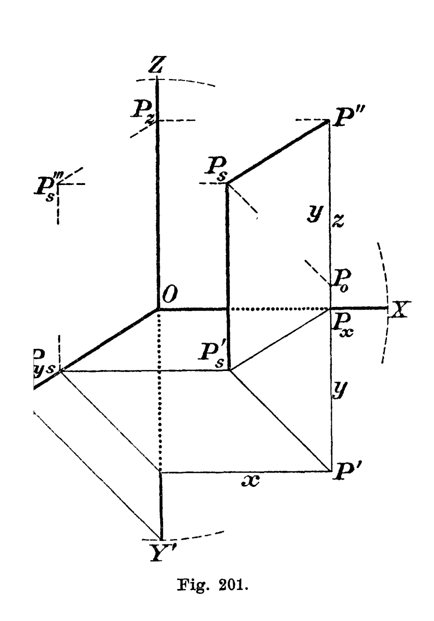


Fig. 201.

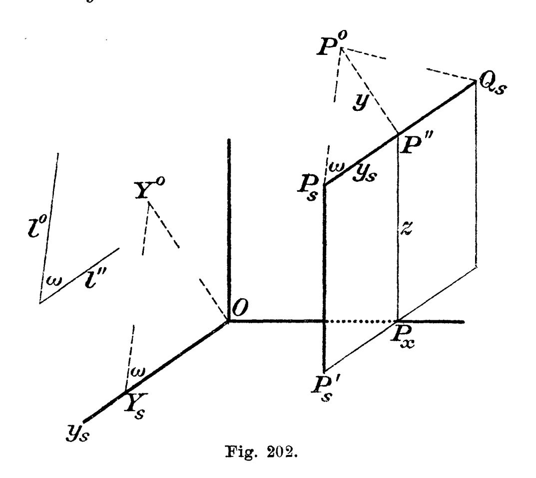


Fig. 202.

kann, man braucht nach willkürlicher Annahme von Y_s nur YY_s zur Projektionsrichtung zu machen. Das ist der wesentliche Inhalt des Pohlkeschen Satzes im vorliegenden Falle. Wir geben uns die Projektionsrichtung l, die nur nicht gerade auf der Bildebene senkrecht stehen soll, durch ihre kleinste Neigung ω zur Bildebene und durch die Orthogonalprojektion l'' eines Projektionsstrahls l; diese wird erhalten, wenn man alle Punkte von l senkrecht auf die Bildebene projiziert, und ω ist der kleinste Winkel zwischen l und l''. Die Orthogonalprojektionen aller Projektionsstrahlen sind zueinander parallel, also auch parallel zu l''. Das Schrägbild der auf der Bildebene senkrechten Geraden ist zu l'' parallel. Um jetzt OY zu projizieren, ziehen wir durch O die Parallele y_s zu l'' (siehe Fig. 202), errichten in O auf ihr das Lot $OY^0 = OY$ und ziehen durch Y^0 die Parallele zum freien Schenkel l^0 des irgendwo an l'' angetragenen Winkels ω;

sie trifft y_s in Y_s. Die Figur 202 löst zugleich auch die Aufgabe, aus der Länge OY und der Projektion OY_s von OY die Projektionsrichtung zu rekonstruieren.

6. Jetzt können wir uns vom Koordinatensystem ganz frei machen, denn da OY jedes beliebige Lot auf der Bildebene sein kann, so kann das Verfahren der Figur 202 auf jeden Punkt Y angewandt werden. Sei also P ein beliebiger Punkt vor der Bildebene und P'' seine Orthogonalprojektion auf die Bildebene. Wir ziehen dann durch P'' die Parallele zur Richtung l'' und erhalten so einen geometrischen Ort für das Bild P_s von P. Auf dieser Geraden errichten wir in P'' das Lot $P''P^0 = y$ und ziehen dann durch P^0 die Parallele zu l^0; sie trifft die erste Parallele in P_s. In Figur 202 könnte der Punkt O, als Orthogonalprojektion von Y aufgefaßt, auch mit Y' bezeichnet werden. Stände die Projektionsrichtung des Schrägbildes, was wir ausgeschlossen hatten, auf der Bildebene senkrecht, so wäre P_s mit P'' identisch. Zeichnet man in Figur 202 zur Erhöhung der Plastik wieder das Koordinatensystem ein, so ist $P''P_s \parallel OY_s$, $P''P_x$ steht senkrecht auf der x-Achse, und es ist $P_sP_s' \# P''P_x$. — Figur 202 zeigt auch die Darstellung eines Punktes Q, der hinter der Bildebene liegt, und zwar haben wir Q zu P hinsichtlich der Bildebene symmetrisch angenommen. — Da im Unterrichte als Bildebene die Wandtafel benutzt zu werden pflegt, so wird der senkrechte Abstand eines Punktes von der Bildebene als Tafelabstand bezeichnet. Wir können nunmehr also einen Punkt P aus seiner Orthogonalprojektion P' und seinem Tafelabstande PP' darstellen; der Tafelabstand eines Punktes ist seine Ordinate y.

7. Wollte man in dieser Weise eine aus einer größeren Zahl bestimmender Punkte zusammengesetzte Figur darstellen, so wäre das Verfahren immer noch umständlich genug. Man könnte sich da in der Weise helfen, wie es in der Praxis oft geschieht, daß man (durch passende Wahl der Projektionsrichtung) dem Verhältnisse des wahren Tafelabstandes PP'' zum scheinbaren P_sP'' einen bequem zu konstruierenden Wert gibt, z. B. den Wert $\frac{1}{2}$. Denn da

$$PP'' : P_sP'' = P^0P'' : P_sP'' = \operatorname{tg} \omega$$

nur von dem Winkel ω abhängt, so ist dieses Reduktionsverhältnis r zwischen dem wahren und dem scheinbaren Tafelabstande für alle Punkte dasselbe, und wenn man etwa $r = \frac{1}{2}$ genommen hat, so hat man einfach $P''P_s$ parallel zu l'' und gleich $ry = r \cdot PP'' = \frac{1}{2} PP''$ anzutragen, was besonders dann von

Nutzen sein wird, wenn alle Abstände in irgend einem Maßstabe gemessen werden, was jedoch im folgenden nicht vorausgesetzt werden soll.

8. Bei der Darstellung von Gegenständen der Architektur und Technik sind häufig die Orthogonalprojektionen der wichtigeren Punkte auf eine Horizontalebene, im vorliegenden Falle also etwa auf die xy-Ebene, gegeben. Um diese Projektion, den Grundriß, zu verwerten, stellen wir uns die allgemeinere Aufgabe, von einer geradlinigen Figur der xy-Ebene, etwa einem Quadrat, ein Schrägbild zu entwerfen. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit nehmen wir in der xy-Ebene eine Gerade $u \| x$ an, welche die y-Achse in Y treffe, und fügen noch eine Parallele w zur y-Achse so hinzu, daß das darzustellende Quadrat von dem aus x, u, y, w gebildeten Rechteck eingeschlossen wird. Dann stellen wir zuerst Y dar (Fig. 203) und legen u_s durch Y_s parallel zu x. Ist T der Schnittpunkt von w mit x, so geht w_s durch T parallel zu OY_s. Jetzt klappen wir die xy-Ebene um die x-Achse herunter, bis sie mit der Bildebene xz zusammenfällt; Y', u', w' sind dann die neuen Lagen von Y, u, w. Die darzustellende Figur, etwa ein Quadrat $\underline{A'}\underline{B'}\underline{C'}\underline{D'}$, wird jetzt in ihrer richtigen Lage zu x und y in der Umklappung eingetragen, als $A'B'C'D'$.

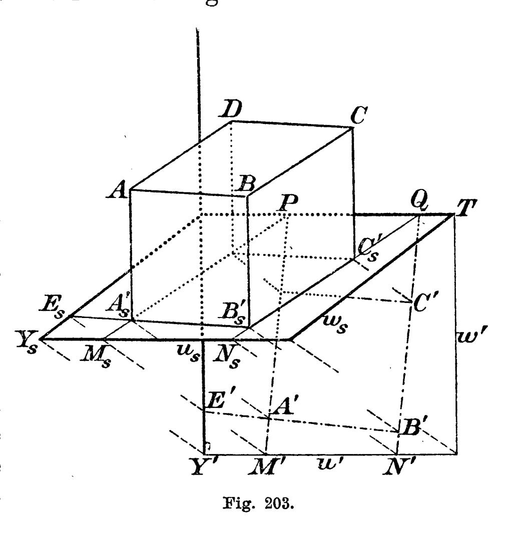


Fig. 203.

Sind $\underline{M}$ und $\underline{N}$ die Schnittpunkte von $\underline{A'}\underline{D'}$ und $\underline{B'}\underline{C'}$ mit u und M', N' ihre Umklappungen, so ist $\underline{M}M' \| \underline{N}N' \| \underline{Y}Y'$, also auch $M_sM' \| N_sN' \| Y_sY'$, wodurch M_s und N_s auf u_s bestimmt sind. Jetzt lassen sich die Geraden $\underline{A'}\underline{D'}$ und $\underline{B'}\underline{C'}$ unter Benutzung ihrer Schnittpunkte P, Q mit der x-Achse ohne weiteres darstellen, ihre Bilder sind PM_s und QN_s. Da ferner $\underline{A'}A' \| \underline{M'}M' \| \underline{B'}B' \| \underline{N'}N' \| \underline{C'}C' \| \underline{D'}D'$, indem alle diese Geraden unter 45^0 gegen die xy- und xz-Ebene geneigt sind, so ist auch $A_s'A' \| B_s'B' \| C_s'C' \| D_s'D' \| M_sM' \| Y_sY'$, wodurch A_s', B_s', C_s', D_s' auf PM_s bezw. QN_s bestimmt sind. Man hätte auch die Geraden $\underline{A'}\underline{B'}$ und $\underline{C'}\underline{D'}$ oder gar die Diagonalen des Quadrates ähnlich wie $\underline{A'}\underline{D'}$ und $\underline{B'}\underline{C'}$ abbilden können. Eine oder die andere dieser Konstruktionen wird man stets zur Kontrolle der Genauigkeit hinzufügen. Auch enthält dies Verfahren zur Festlegung

von A_s', B_s', C_s', D_s' Angaben genug, um auch ohne Verwendung der Geraden u auszukommen. In Figur 203 ist $\underline{A'B'C'D'}$ als Basis eines Würfels betrachtet worden, der ebenfalls dargestellt ist.

9. Da jede auf xz senkrechte Ebene die Rolle der xy-Ebene übernehmen kann, so gilt das Konstruktionsverfahren von Nr. 8 für jede dieser Ebenen, z. B. auch für die yz-Ebene. Ist eine Figur der yz-Ebene darzustellen, etwa wiederum ein Quadrat $ABCD$, so klappt man diese Ebene um die z-Achse in die Bildebene, indem man sie wie ein Blatt eines Buches nach links wendet. Die Lage des Quadrates in der Bildebene sei $A'''B'''C'''D'''$; diese denken wir uns gegeben (Fig. 204). Da jetzt wiederum $AA''' \| BB''' \| CC''' \| DD'''$, so wird auch, wenn A_s, B_s, C_s, D_s die gesuchten Bilder von A, B, C, D sind, $A_sA''' \| B_sB''' \| C_sC''' \| D_sD'''$ sein. Diese Richtung ermitteln wir, indem wir noch eine Strecke OY der y-Achse mit umklappen, deren Endpunkt dann in die Lage Y''' auf der x-Achse übergehen wird, wo $OY''' = OY = OY'$ ist, wenn Y' die Bedeutung der vorangehenden Figuren 201 und 203 hat. Jetzt ist also $A_sA''' \| Y_sY'''$, und die Darstellung kann nun in der mannigfachsten Weise erfolgen. In der Figur sind die Schnittpunkte V''', W''' der Geraden AB mit der umgelegten y-Achse und der Parallele durch Y''' zu z benutzt, $V_sV''' \| Y_sY'''$, $W_sW''' \| Y_sY'''$ gemacht und $A_sA''' \| B_sB''' \| Y_sY'''$ konstruiert. Ähnlich sind die übrigen Punkte übertragen. — Beim Studium dieser Beispiele wird dem Leser geraten, die Figur immer neu anzufertigen und die zahlreichen Proben der Richtigkeit zu beachten, die sich aus der Überbestimmtheit der Punkte ergeben.

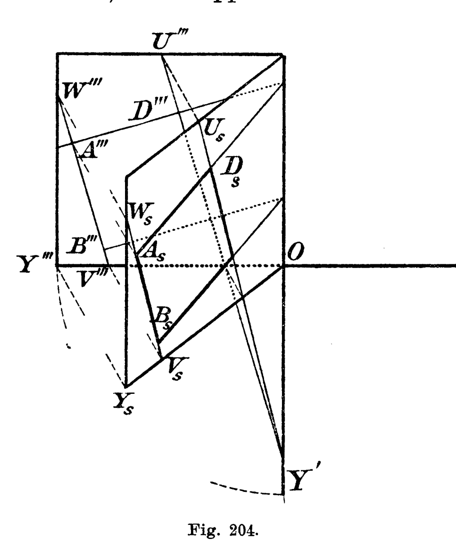


Fig. 204.

10. Wie bereits gesagt, läßt sich dieser Gedankengang auf jede zur Bildebene senkrechte Ebene übertragen. Eine solche Ebene sei nun etwa durch ein Rechteck $MM''N''N$ plastisch gemacht, dessen Seite $M''N''$ in der Bildebene liegt und die Orthogonalprojektion von MN ist; klappt man dieses Rechteck um $M''N''$ in die Bildebene xz, so erhält man in dieser ein dem gegebenen Rechteck

kongruentes Rechteck $\bar{M}\bar{N}N''M''$ (Fig. 205), das wir jetzt konstruieren wollen. Dazu brauchen wir nur die Länge von NN'' aus N_sN'' zu bestimmen, indem wir uns etwa das Rechteck durch sein Bild $M_sN_sN''M''$ und durch Y_s, Y' gegeben denken. Zu diesem Zwecke ziehen wir $N''N' \parallel OY'$, $N_sN' \parallel Y_sY'$; dann ist $N''N' = N'N$ nach Nr. 8. Also ist $N''\bar{N} = N''N'$ bestimmt, und damit die Umklappung des Rechtecks. Ist S irgend ein Punkt der Ebene dieses Rechtecks, gegeben durch sein Bild S_s, und $\bar{S}$ seine Umklappung, so ist $S\bar{S} \parallel M\bar{M} \parallel N\bar{N}$, also auch $S_s\bar{S} \parallel M_s\bar{M} \parallel N_s\bar{N}$. Macht man noch $S_sS'' \parallel N_sN''$, wo S'' auf $M''N''$ liegt und die Orthogonalprojektion von S auf die Bildebene ist, und zieht man $S''\bar{S} \parallel N''\bar{N}$, $S_s\bar{S} \parallel N_s\bar{N}$, so ist $\bar{S}$ aus S_s bestimmt; umgekehrt ergibt diese Figur S_s aus $\bar{S}$. Es läßt sich also jetzt jede Figur der Rechteckebene aus ihrer Umklappung abbilden, und aus dem Bilde kann immer die wirkliche Gestalt, die ja die Umklappung zeigt, rekonstruiert werden.

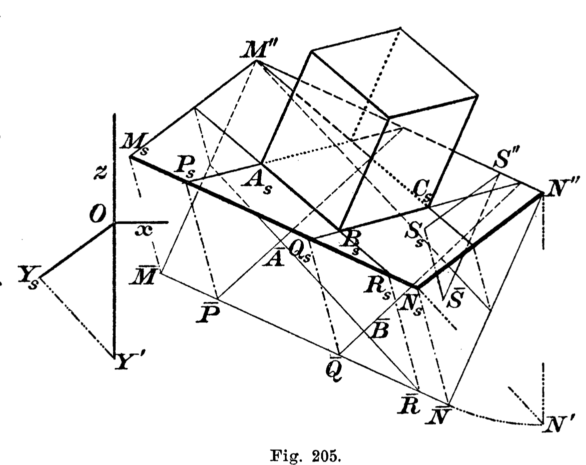


Fig. 205.

11. Auf diese Weise ist in Figur 205 ein Rechteck $ABCD$ dargestellt worden, das in der Ebene $MNN''M''$ liegt. Zugleich ist dieses Rechteck als Basis eines auf jener Ebene stehenden Quaders aufgefaßt worden. Die vier auf dieser Ebene senkrechten Kanten sind zur Bildebene parallel, erscheinen dort also in ihrer wahren Größe, und zwar stehen die Bilder dieser Kanten auf $M''N''$ senkrecht, da sie parallel sind zu dem Lote der Ebene $MNN''M''$ im Punkte N'', das in die Bildebene fällt. Die ganze Figur ist absichtlich nicht mit der Mindestzahl von Hilfslinien ausgeführt, einmal, um auf nützliche Kontrollen aufmerksam zu machen, dann aber, weil es wünschenswert ist, mehrere Konstruktionen desselben Punktes zu kennen, da oft die eine oder die andere praktisch versagt.

12. Die Figuren 201 und 202 zeigen, wie das Schrägbild eines Punktes P aus seiner Orthogonalprojektion P'' gewonnen wird, wenn noch die Umlegung seines Tafelabstandes in der Richtung der z-Achse

oder in der Richtung senkrecht zum Bilde der y-Achse gegeben ist. In Figur 205 ist dieses Verfahren in seiner allgemeinen Form zu erkennen: Von einem Punkte M ist das Bild M_s, die Orthogonalprojektion M'' und ihre Umlegung $M''\overline{M}$ in irgend einer Richtung gegeben; diese Angabe fixiert natürlich die Projektionsrichtung. Um dann einen beliebigen Punkt S von bekanntem Tafelabstande y und bekannter Orthogonalprojektion S'' darzustellen, zieht man $S''\overline{S}$ parallel zu $M''\overline{M}$ und gleich y; die Parallelen durch S'' und $\overline{S}$ zu $M''M_s$ und $\overline{M}M_s$ treffen sich dann in S_s.

§ 79. **Affinität.**

1. Das Gemeinsame in der Lösungsmethode der Aufgaben § 78, Nr. 7—11 tritt noch mehr hervor, wenn wir sie zusammenfassen und verallgemeinern durch folgende Aufgabe:

Eine beliebige Ebene η sei gegeben durch die Bilder U, V_s, W ihrer Schnittpunkte U, V, W mit den Koordinatenachsen; es sei entweder das Bild einer in η liegenden Figur aus ihrer wirklichen Gestalt abzuleiten, oder umgekehrt aus dem Bilde der Figur ihre wahre Gestalt zu ermitteln.

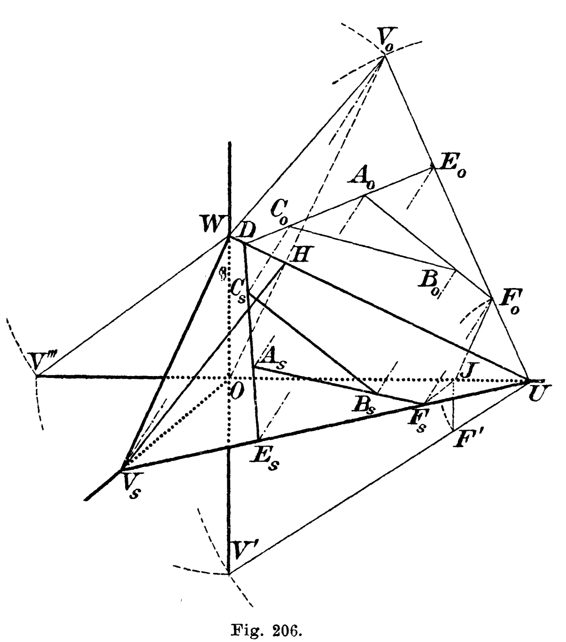


Fig. 206.

Der erste Schritt zur Lösung bei allen Aufgaben dieser Art besteht darin, daß man die Ebene um ihre Spur in die Bildebene dreht.

Unter Spur einer Ebene ohne näheren Zusatz verstehen wir ihre Schnittlinie mit der Bildebene, hier also die Gerade WU. Zur Umlegung des Dreiecks UVW eignen sich folgende beiden Konstruktionen:

I. Man legt V um. (Fig. 206.) Zu diesem Zwecke fällt man $OH \perp WU$ und zieht V_sH. Dann ist $VH \perp UW$. Nach der Drehung von η um UW wird also HV

auf die Gerade OH zu liegen kommen. Der Endpunkt der umgelegten Strecke HV heiße V_0. Er liegt also auf OH, und zwar im Abstande $WV_0 = WV'''$ von W, wenn V''' bei Umklappung der yz-Ebene um z in die Bildebene die Endlage von V ist, also $OV''' = OV'$.

II. Man legt einen Punkt F von UV um (Fig. 206). Zu diesem Zwecke zieht man $F_sJ \| OV_s$, $JF' \perp OU$, $F_sF' \| V_sV'$, wodurch F' bestimmt ist, $JF_0 \perp WU$, $UF_0 = UF'$, wodurch F_0 als Umlegung von F festgelegt ist. Je näher F_s bei V_s liegt, um so genauer wird natürlich die ganze Figur.

2. Nach dieser Vorbereitung stützt sich die weitere Behandlung der Aufgabe auf die einfache Tatsache, daß jede Umklappung sich durch eine Parallelprojektion ersetzen läßt. Ganz allgemein gilt nämlich der in der darstellenden Geometrie häufig angewandte Satz:

Werden zwei Ebenen α und β durch Umklappung aufeinander eindeutig bezogen, indem man die Punkte paarweise einander zuordnet, die nach Drehung einer dieser Ebenen um die gemeinsame Schnittgerade bis zum Zusammenfallen mit der anderen Ebene einander bedecken würden, so kann diese Beziehung auch durch Parallelprojektion jeder dieser Ebenen auf die andere vermittelt werden, und zwar steht die Projektionsrichtung senkrecht auf der Halbierungsebene des Ebenenwinkels, den α bei der Drehung durchläuft. Sind $A, B, C, \ldots$ irgend welche Punkte von α, die nach der Umklappung auf die Punkte $A_0, B_0, C_0, \ldots$ von β fallen, so ist $AA_0 \| BB_0 \| CC_0 \| \ldots$, und diese Parallelen sind die Projektionsstrahlen.

3. Im vorliegenden Falle seien $A, B, C, \ldots$ Punkte der Ebene η; $A_s, B_s, C_s, \ldots$ ihre Bilder, $A_0, B_0, C_0, \ldots$ ihre Umklappungen. Da nun die Geraden AA_0, BB_0, $CC_0, \ldots$ parallel laufen und ihre Schrägbilder auch parallel sein müssen, so ist

$$A_sA_0 \| B_sB_0 \| C_sC_0 \| \ldots,$$

und diese Richtung ist durch V_sV_0 oder F_sF_0 gegeben. Daher können die Punkte $A_0, B_0, C_0, \ldots$ unmittelbar aus $A_s, B_s, C_s, \ldots$ abgeleitet werden, und umgekehrt. Dazu wird man möglichst ihre Verbindungsgeraden übertragen. In Figur 206 sind z. B. die Punkte A_s, B_s, C_s so angenommen, daß A_sC_s die Gerade WU in D, die Gerade UV_s in E_s trifft, während A_sB_s mit UV_s den Punkt F_s gemein hat. Bei der Umklappung bleibt D liegen, E_s geht, da $EE_0 \| AA_0 \| \ldots$ ist, in einen Punkt E_0 auf UV_0 über, für den $E_sE_0 \| A_sA_0 \| V_sV_0$ ist. Dadurch ist DE_0 bestimmt, und auf dieser Geraden werden A_0, C_0 mittels der

Parallelen durch A_s, C_s zu $V_s V_0$ gefunden. Ebenso liegt B_0 auf der Geraden $A_0 F_0$ und auf der Parallele durch B_s zu $V_s V_0$.

Betrachtet man umgekehrt A_0, B_0, C_0, ... als die Punkte der gegebenen Figur, die also in ihrer wahren Gestalt vorliegt, so findet man nach dieser Verfahrungsweise die Bildpunkte A_s, B_s, C_s, ... Unsere Aufgabe ist damit allgemein gelöst.

4. Die Beziehung zwischen den Punkten A_s, B_s, C_s, ... und A_0, B_0, C_0, ... der Bildebene ist ein Beispiel für eine wichtige eindeutige Punktverwandtschaft, die Affinität, die wir eingehender untersuchen wollen. Diese Verwandtschaft läßt sofort folgende Eigenschaften erkennen:

I. Jedem Punkte A_s der (Bild-) Ebene ist ein und nur ein Punkt A_0 dieser Ebene als affiner Punkt zugeordnet;

II. beschreibt A_s in der Ebene eine Gerade a_s, so durchläuft der affine Punkt ebenfalls eine Gerade, die zu a_s affine Gerade a_0;

III. die Verbindungsstrahlen der Punkte der Ebene mit ihren affinen Punkten sind parallel: $A_s A_0 \parallel B_s B_0 \parallel C_s C_0 \parallel \ldots$; diese Strahlen heißen Affinitätsstrahlen, ihre Richtung Affinitätsrichtung;

IV. es gibt Punkte, die zu sich selbst affin sind; diese erfüllen eine Gerade, die Affinitätsachse,

im vorliegenden Falle die Gerade UW. Die Eigenschaft IV ist eine Folge von I, II und III. Denn jedes Dreieck $A_s B_s C_s$ steht zu dem affinen $A_0 B_0 C_0$ in der Beziehung, daß die Geraden $A_s A_0$, $B_s B_0$, $C_s C_0$ (nach III) parallel sind; folglich schneiden sich die Geraden $A_s B_s$ und $A_0 B_0$, $B_s C_s$ und $B_0 C_0$, $C_s A_s$ und $C_0 A_0$ auf Grund des Satzes von Desargues in einer Geraden. Diese drei Punkte sind zu sich selbst affin und folglich auch die Gerade, auf der sie liegen. Andere zu sich selbst affine Punkte als die der Affinitätsachse kann es nicht geben, denn jede durch einen solchen Punkt gehende Gerade wäre, weil sie auch die Affinitätsachse in einem zu sich selbst affinen Punkte träfe, zu sich selbst affin; es entspräche daher jeder ihrer Punkte sich selbst, und das würde von allen Punkten der Ebene gelten. Wenn also eine Affinität nicht in der Identität der Ebene mit sich selbst besteht, liegen die zu sich selbst affinen Punkte auf einer Geraden, der Affinitätsachse; dabei soll die Affinität[1]) ganz allgemein als eine Punktverwandtschaft in der Ebene mit den Eigenschaften I, II, III definiert sein, aus denen wir alle bisherigen Schlüsse gezogen haben.

1) Genauer Affinität bei affiner Lage, da es eine noch umfassendere gibt als die des Textes, von der wir jedoch keinen Gebrauch machen werden.

5. Durch Annahme der Affinitätsachse x und eines Paares entsprechender Punkte A und A_1 außerhalb dieser Achse ist eine Affinität vollkommen bestimmt.

Die Affinitätsrichtung ist dann nämlich die von AA_1 (Fig. 207), und wenn B ein weiterer Punkt der Ebene ist, so liegt der dazu affine Punkt B_1 erstens auf dem durch B (parallel zu AA_1) gehenden Affinitätsstrahle; zweitens auf der zu AB homologen Geraden durch A_1, welche die Affinitätsachse in demselben Punkte W trifft wie AB. Dadurch ist B_1 festgelegt. Von einem dritten Punkte C ausgehend haben wir für den affinen Punkt C_1 gleich drei geometrische Örter:

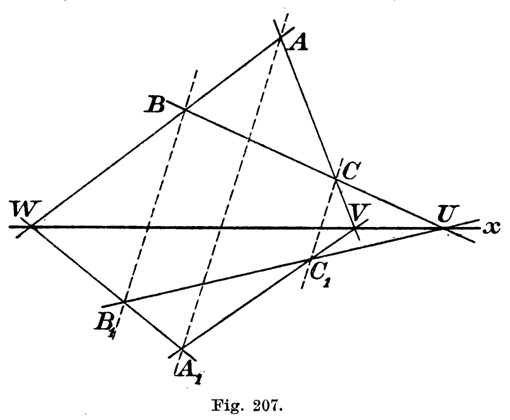


Fig. 207.

1. die Gerade A_1V, die zur Geraden AC affin ist und sie auf der Affinitätsachse x in V trifft; ebenso
2. die Gerade B_1U, die zur Geraden BC affin ist und sie auf der Affinitätsachse x in U trifft; schließlich
3. den durch C gehenden Affinitätsstrahl.

Durch 1. und 2. allein schon ist C_1 bestimmt, und durch diesen Punkt geht 3. von selbst, d. h. ohne einschränkende Annahme über x, A, A_1, B und C, auf Grund des Satzes von Desargues.

6. Bei der Affinität entspricht dem Schnittpunkte zweier Geraden (nach II.) der Schnittpunkt der affinen Geraden; zu parallelen Geraden sind also immer wieder parallele Geraden affin, zu einem Parallelogramm wieder ein Parallelogramm. Das kann zur Erleichterung des Konstruierens dienen: Sind zu einer größeren Anzahl von Punkten A, B, C, ... die affinen zu konstruieren, so nimmt man eine oder zwei Geraden h, k zur Hilfe, die möglichst alle mit zu übertragenden Verbindungsgeraden dieser Punkte treffen, sucht h_1, k_1 und konstruiert zu jenen Schnittpunkten von h, k mit den Verbindungsgeraden die affinen Punkte auf h_1, k_1. Häufig genügt zu diesem Zwecke eine einzige Hilfsgerade h zusammen mit der Affinitätsachse, und mit Vorteil wird man h zur Achse parallel annehmen. Welche von allen diesen Methoden im einzelnen Falle sich am meisten empfiehlt, das zu entscheiden ist Sache des

praktischen geometrischen Blicks, der durch viele Übung erworben werden kann.

7. Vor einem leicht möglichen Irrtum sei hier ausdrücklich gewarnt: die Affinität ordnet zwar jedem Punkte P der Ebene einen affinen Punkt P_1 zu (Fig. 208), ähnlich wie auch die Kreisverwandtschaft (Inversion) jedem Punkte einen inversen zuweist. Aber die Affinität ist keine wechselseitige Verwandtschaft wie die Inversion, zu P_1 ist nicht notwendig P affin.

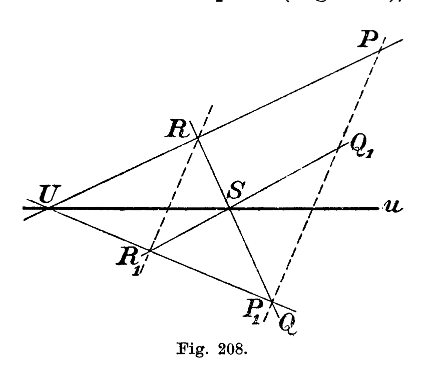


Fig. 208.

Ist etwa U ein Punkt der Affinitätsachse u, so ist zu UP die Gerade UP_1 affin, zu einem Punkte R von UP der Punkt R_1 von UP_1, der auf dem Affinitätsstrahle durch R liegt. Fassen wir jetzt P_1 als Punkt Q auf, dessen affiner Punkt Q_1 zu bestimmen ist, so braucht man nur QR mit der Affinitätsachse zum Schnitt zu bringen (in S) und den Schnittpunkt mit R_1 zu verbinden. Auf dieser Geraden sowie auf PP_1 liegt Q_1.

Wenn Q_1 mit P zusammenfällt, so halbiert die Affinitätsachse u (nach Bd. II, § 5, 1.) die Strecken RR_1 und PP_1. Die Affinität ist stets und nur dann wechselseitig, wenn die Affinitätsachse den Abstand zweier und damit aller zusammengehörigen Punkte halbiert.

Es ist zur Vermeidung des genannten Irrtums und zu Erhöhung der Anschaulichkeit zweckmäßig, sich die Ebene der Affinität η durch Aufeinanderlegung zweier verschiedener Ebenen entstanden zu denken, von denen eine die Punkte $P, Q, R, \ldots$, die andere die dazu affinen enthält. Man spricht dann von zwei in der Ebene η liegenden ebenen Systemen oder kurz Systemen Σ und Σ_1, die zueinander in der Beziehung der Affinität stehen, und sagt, zu den Punkten P, Q, R von Σ seien die Punkte P_1, Q_1, R_1 von Σ_1 affin. Faßt man aber (Fig. 208) P_1 als Punkt von Σ auf, so ist Q_1 zu ihm affin.

8. Bei der Affinität finden wichtige Beziehungen metrischer Natur statt, die in der darstellenden Geometrie oft mit Nutzen angewandt werden.

Sind (Fig. 209) A_1 und C_1 zu A und C affin, so treffen sich die Geraden AC und A_1C_1 in einem Punkte S der Affinitätsachse u, der auch im Unendlichen liegen kann; indem wir mit M und N die Schnittpunkte der Affinitätsachse u mit AA_1 und CC_1 bezeichnen, haben wir:

(1) $$AM : A_1M = CN : C_1N = r,$$

wo r eine Konstante der Affinität, und zwar die charakteristische Affinitätskonstante ist, da durch Angabe dieser Konstanten, der Achse und der Richtung, die Affinität bestimmt ist. Auf AA_1 nehmen wir noch B und B_1 so an, daß $BC \| u \| B_1C_1$ wird; dann ist B_1 zu B affin und

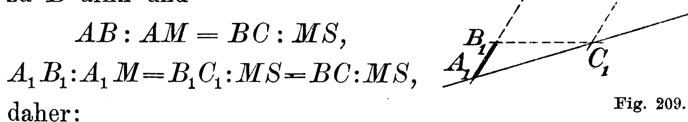


Fig. 209.

$$AB : AM = BC : MS,$$
$$A_1B_1 : A_1M = B_1C_1 : MS = BC : MS,$$

daher:

(2) $$AB : A_1B_1 = AM : A_1M_1 = r.$$

Läßt man B mit M, also C mit S und auch B_1 mit M zusammenfallen, so geht Formel (2) in (1) über; beide Formeln beweisen also den Satz:

Bei der Affinität ist das Verhältnis einer Strecke eines Affinitätsstrahles zur affinen Strecke gleich der Affinitätskonstanten.

Die Affinität ist also immer nur dann eine wechselseitige (involutorische) Punktverwandtschaft, wenn ihre Konstante den Wert 1 hat (vgl. 7.).

9. Wir betrachten jetzt ein Dreieck ABC und das dazu affine $A_1B_1C_1$ (Fig. 210); ABC ergänzen wir zu einem Parallelogramm $ABCD$, worauf auch $A_1B_1C_1D_1$ ein solches ist. Die Parallelen BC und AD sowie B_1C_1 und A_1D_1 bestimmen im allgemeinen ein Parallelogramm $PQRS$, von dem die Ecken P und R auf der Affinitätsachse u liegen. Eine Ausnahme erleidet dieser Satz nur, wenn die genannten Parallelen auch zu u parallel sind. Jetzt finden zwischen den Inhalten der genannten Figuren folgende Beziehungen statt:

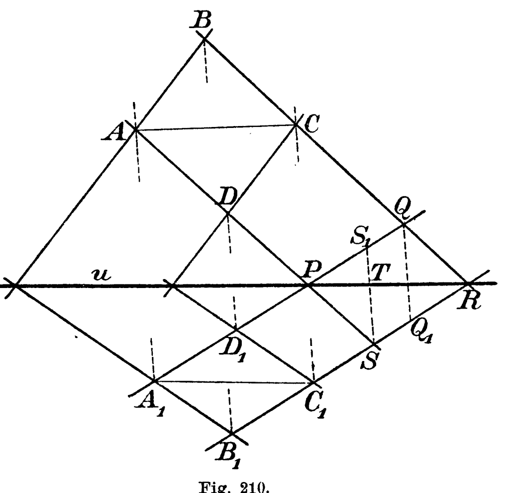


Fig. 210.

(3) $$ABCD : PQRS = AD : PS = A_1D_1 : PS_1,$$

(4) $$A_1B_1C_1D_1 : PQRS = A_1D_1 : PQ,$$

da Parallelogramme mit gleicher Höhe sich verhalten wie die Grundlinien. Aus (3) und (4) folgt:

$$ABCD : A_1B_1C_1D_1 = PQ : PS_1 = RS : PS_1,$$

und wenn T den Schnittpunkt von SS_1 mit u bezeichnet, ist:

$$RS : PS_1 = ST : S_1T,$$

mithin:

$$ABC : A_1B_1C_1 = ABCD : A_1B_1C_1D_1 = ST : S_1T,$$

d. h.: Das Verhältnis einer Fläche zu ihrer affinen Fläche ist konstant, nämlich gleich der Affinitätskonstante.

Das ist zunächst von Dreiecken bewiesen, wobei der oben erwähnte Ausnahmefall leicht noch zu erledigen ist, dann von allen geradlinig begrenzten Figuren, da sie sich in Dreiecke zerlegen lassen, und endlich auch von krummlinig begrenzten Flächen, da sie sich durch umgeschriebene und eingeschriebene Polygone in unbegrenzter Annäherung ersetzen lassen.

10. Aus der Metrik des Winkels wollen wir nur die Frage nach denjenigen rechten Winkeln aufwerfen, deren affin entsprechende Winkel ebenfalls rechte sind. Ist UPV (Fig. 211) ein Winkel, dessen Schenkel die Affinitätsachse w in U und V treffen, so ist, wenn P_1 den zu P affinen Punkt bezeichnet, UP_1V der affine Winkel. Sind nun diese Winkel beide einem rechten gleich, so liegen die Punkte U, V, P, P_1 auf einem Kreise, der von w halbiert

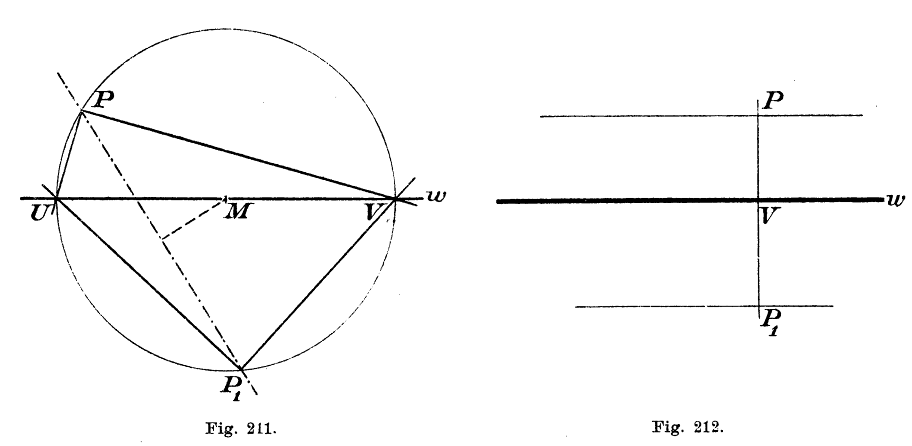


Fig. 211. Fig. 212.

wird. Dieser Kreis ist aber durch w, P und P_1 bestimmt, da sein Zentrum M auf dem Mittellote von PP_1 liegen muß, und zwar eindeutig bestimmt, wenn dieses Lot nicht mit w identisch ist; in diesem Ausnahmefalle liegen P und P_1 zu w symmetrisch, und die

Affinität ist dann eine axiale Symmetrie, bei der jeder Winkel dem entsprechenden gleich ist. Wenn hingegen PP_1 zwar auf w senkrecht steht, aber P und P_1 nicht zu w symmetrisch liegen (Fig. 212), so artet der Kreis der Figur 211 in die Gerade PP_1 aus, V ist der Schnittpunkt von PP_1 mit w, U ist der unendlich ferne Punkt von w, und der gesuchte rechte Winkel mit dem Scheitel P ist also derjenige, dessen einer Schenkel auf w senkrecht steht.

Alles zusammenfassend haben wir den Satz:

> Vom Falle der axialen Symmetrie abgesehen ist jeder Punkt der Ebene der Scheitel eines einzigen rechten Winkels, der dem affinen gleich ist,

und die Konstruktion dieses Winkels ist aus Figur 211 zu entnehmen. Dieser Satz bedarf noch des Beweises für den Fall, daß P auf der Affinitätsachse w liegt, wo unsere Konstruktion versagt. Da aber parallelen Geraden immer wieder parallele Geraden entsprechen, so können wir feststellen:

Die rechten Winkel, die ihren affinen gleich sind, liegen zueinander parallel.

Daher gilt der vorige Satz auch in dem erwähnten Falle.

11. Bisher haben wir nur die affinen Bilder des Punktes und der Geraden untersucht. Um zu krummen Linien die affinen zu finden, nimmt man auf ihnen hinlänglich viel Punkte an und sucht die dazu affinen. Die Tangenten einer Kurve gehen durch Affinität in die Tangenten der affinen Kurve über. Diese punktweise Übertragung einer Kurve wird immer dann eintreten müssen, wenn ihr Bildungsgesetz unbekannt oder zu kompliziert ist, um für die Konstruktion daraus Nutzen zu ziehen. Dagegen lohnt es sich, das affine Bild des Kreises eingehender zu untersuchen, weil sich dabei einfache Konstruktionen ergeben. Diesem Gegenstande sei der nächste Paragraph gewidmet, dann kehren wir wieder zum Darstellungsproblem zurück, um die gewonnene Erkenntnis anzuwenden.

§ 80. Die Ellipse als affines Bild des Kreises.

1. Sehr viele Aufgaben der darstellenden Geometrie führen auf die Konstruktion der zu einem Kreise affinen Kurve. Diese Kurve ist, wie wir bereits verraten wollen, eine Ellipse. Um im folgenden jedoch möglichst elementar vorgehen zu können, wollen wir umgekehrt jenes affine Bild des Kreises als Ellipse definieren und bei der Herleitung konstruktiv wichtiger Eigenschaften der Ellipse ausschließlich diese Definition verwenden, bis sich ihre Gleichwertigkeit mit den

bekannten Definitionen ergibt. Es sei also das affine Bild ε eines Kreises k zu untersuchen; bei der Affinität gehöre k zu dem ebenen Systeme Σ', dessen Punkte einen Akzent erhalten, ε dagegen zu dem Systeme Σ, dessen Punkte keine Marke bekommen. Die Affinitätsachse sei w. Da halbierte Strecken durch Affinität wieder in halbierte Strecken übergehen, so folgt:

Die Ellipse hat einen und nur einen Mittelpunkt, d. h. einen Punkt, der alle durch ihn gehenden Sehnen halbiert. Sie ist eine geschlossene Kurve, die von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten wird und durch einen Punkt höchstens zwei Tangenten sendet. Durch jeden Punkt der Kurve geht eine einzige Tangente derselben, nämlich die Tangente dieses Punktes.

Die Sehnen durch den Mittelpunkt heißen Durchmesser. Die zu zwei aufeinander senkrechten Kreisdurchmessern affinen Durchmesser der Ellipse heißen zueinander konjugiert. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser; dieser ist konjugiert zu dem unter jenen Sehnen enthaltenen Durchmesser. Die Eigenschaft zweier Durchmesser, zueinander konjugiert zu sein, hängt demnach nicht von der benutzten Affinität ab, da die Mittelpunkte jener Sehnen durch die Kurven selbst bestimmt sind. Von zwei konjugierten Durchmessern halbiert jeder die zum anderen parallelen Sehnen. Die Tangenten im Endpunkte eines Durchmessers sind zum konjugierten Durchmesser parallel.

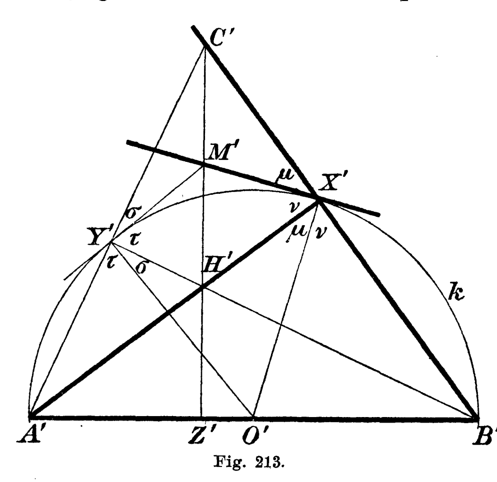


Fig. 213.

2. Von dem Kreise k (Fig. 213) sei der Durchmesser $A'B'$ und ein Punkt X' gegeben. Wir nehmen dann auf $B'X'$ einen Punkt C' an, verbinden C' mit A' und konstruieren die drei Höhen $A'X'$, $B'Y'$, $C'Z'$ sowie ihren Schnittpunkt H'. Dann geht der Kreis k durch Y' und X'. Da die Tangenten von k in X' und Y' auf $O'X'$ und $O'Y'$ senkrecht stehen, so sind die vier Winkel bei X' einander paarweise gleich, ebenso bei Y', was in der Figur ersichtlich gemacht ist, und in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken

$A'X'B'$ und $C'X'H'$ sind die Gerade $O'X'$ und die Tangente in X' homolog,

$A'Y'B'$ und $H'Y'C'$ sind die Gerade $O'Y'$ und die Tangente in Y' homolog.

Da aber $O'X'$ bezw. $O'Y'$ die Gerade $A'B'$ halbiert, so müssen jene Tangenten durch den Mittelpunkt M' von $C'H'$ gehen. Daraus ergibt sich eine auf die Ellipse leicht zu übertragende Linealkonstruktion des Kreises:

Wenn der Durchmesser $A'B'$ und ein weiterer Punkt X' eines Kreises k gegeben sind, so nehme man auf $B'X'$ einen Punkt C' an, fälle $C'Z' \perp A'B'$ und bestimme den Schnittpunkt H' von $C'Z'$ und $A'X'$. Ist M' die Mitte von $H'C'$, so ist $M'X'$ die Tangente von k in X'. Ferner schneiden sich die Geraden $B'H'$ und $A'C'$ in einem Kreispunkte Y', von dem $Y'M'$ die Tangente ist. Die bei dieser Konstruktion nicht variierenden Geraden sind in der Figur kräftig ausgezogen.

Bei dieser Konstruktion ist nur einmal ein Lot gefällt worden: $C'Z' \perp A'B'$. Dafür kann man auch sagen, $C'Z'$ habe die Richtung des zu $A'B'$ konjugierten Durchmessers. So ausgesprochen überträgt sich diese Konstruktion durch Affinität auf die Ellipse und ergibt uns folgende

3. Fundamentalkonstruktion der Ellipse; fundamental ist gemeint vom Standpunkte unserer Theorie aus.

Von einer Ellipse ε seien gegeben: ein Durchmesser AB, die Richtung r des dazu konjugierten Durchmessers sowie ein dritter Ellipsenpunkt X.

1. Konstruktion der Tangente in X (Fig. 214): Man nimmt auf BX einen Punkt C an, zieht $CZ \parallel r$ und bringt diese Gerade mit AX (in H) zum Schnitt; ist M die Mitte von HC, so ist MX die Tangente.

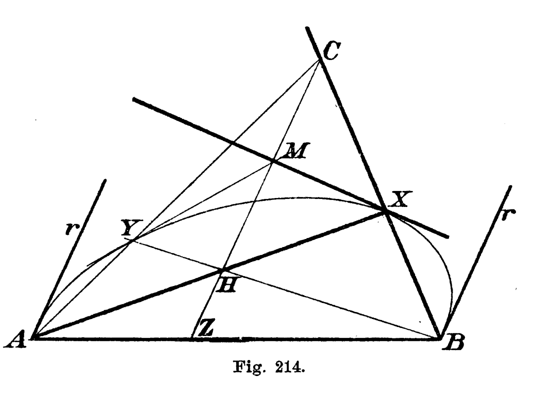


Fig. 214.

2. Konstruktion weiterer Ellipsenpunkte samt ihren Tangenten. Die Geraden BH und AC treffen sich in einem Punkte Y der Ellipse, dessen Tangente YM ist. Die bei

dieser Konstruktion nicht variierenden Geraden sind in der Figur kräftig ausgezogen.

Läßt man C auf BX wandern, so bewegt sich M auf der Tangente von X, der Punkt H auf AX und Y durchläuft die Ellipse; diese ist also durch die als gegeben angenommenen Stücke vollkommen bestimmt. Daher gilt der Satz:

Wenn von einer Ellipse zwei konjugierte Durchmesser der Größe und Lage nach gegeben sind, so ist die Ellipse eindeutig bestimmt.

Denn damit sind ein Durchmesser, die konjugierte Durchmesserrichtung und ein weiterer Punkt der Ellipse gegeben, nämlich einer der Endpunkte des konjugierten Durchmessers.

Jede Parallelprojektion einer Ellipse und jede zu ihr affine Kurve ist wieder eine Ellipse.

Denn jene abgeleitete Kurve ε kann durch die Fundamentalkonstruktion bestimmt werden, weil diese sich durch Parallelprojektion oder Affinität von der Ellipse ε_1 auf die abgeleitete Kurve ε überträgt; jede durch diese Konstruktion erhaltene Kurve ist aber eine Ellipse, d. h. als affines Bild eines Kreises auffaßbar, denn man braucht in Figur 214 nur AB als Affinitätsachse aufzufassen, auf dem Mittellote von AB einen Punkt X' so anzunehmen, daß $OX' = OA$ ist, und dem Punkte X den Punkt X' zuzuordnen. Die zur Ellipse ε affine Kurve wird dann ebenfalls durch die Fundamentalkonstruktion erhalten und ist ein Kreis, wie sich leicht aus Figur 213 ergibt.

3. Aus dem letzten Hauptsatze ergibt sich eine zweite Konstruktion einer Ellipse ε, von der zwei konjugierte Durchmesser AB und CD nach Lage und Größe gegeben sind (Fig. 215).

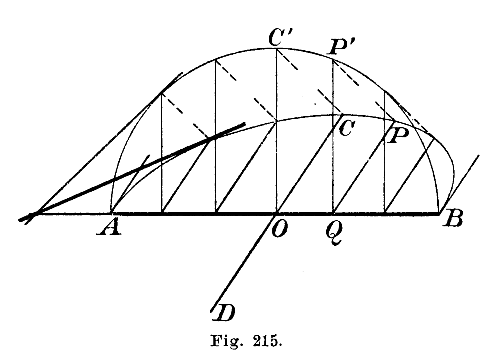


Fig. 215.

Ist O der Mittelpunkt, so errichtet man $OC' \perp OA$, macht $OC' = OA$ und ordnet in einer Affinität mit der Achse AB dem Punkte C den Punkt C' zu. Die zu ε affine Ellipse ist dann der Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius OA. Zu jedem Punkte P' des Kreises gehört dann ein Punkt P der Ellipse, der auf dem durch P' (parallel zu $C'C$) gehenden Affinitätsstrahle durch die Ge-

rade PQ bestimmt wird, die durch den Fußpunkt des von P' auf AB gefällten Lotes parallel zu OC gezogen wird.

Unter den Paaren konjugierter Durchmesser einer Ellipse, die kein Kreis ist, befindet sich nach dem Satze über die rechten Winkel § 79, 10. ein einziges, dessen Durchmesser aufeinander senkrecht stehen; sie werden die Achsen der Ellipse genannt. Nach 1. ist die Ellipse zu jeder der beiden Achsen symmetrisch. Sind die Achsen einer Ellipse einander gleich, so liefert die Fundamentalkonstruktion einen Kreis; wenn also die Ellipse kein Kreis ist, so ist eine der zwei Achsen größer als die andere und wird Hauptachse genannt, während die kleinere als Nebenachse bezeichnet wird.

Ist eine Ellipse kein Kreis, so sind die Achsen ihre einzigen Symmetrieachsen.

Denn ist die Gerade u eine Symmetrieachse der Ellipse, so halbiert u die auf u senkrechten Sehnen, darunter auch den zu u senkrechten Durchmesser v, ist also ein Durchmesser und zu v konjugiert. Es gibt aber nur ein Paar konjugierter Durchmesser, die aufeinander senkrecht stehen.

4. Durch Anwendung der soeben angegebenen Ellipsenkonstruktion auf die beiden Achsen findet man eine neue besonders einfache Konstruktion der Ellipse (Fig. 216).

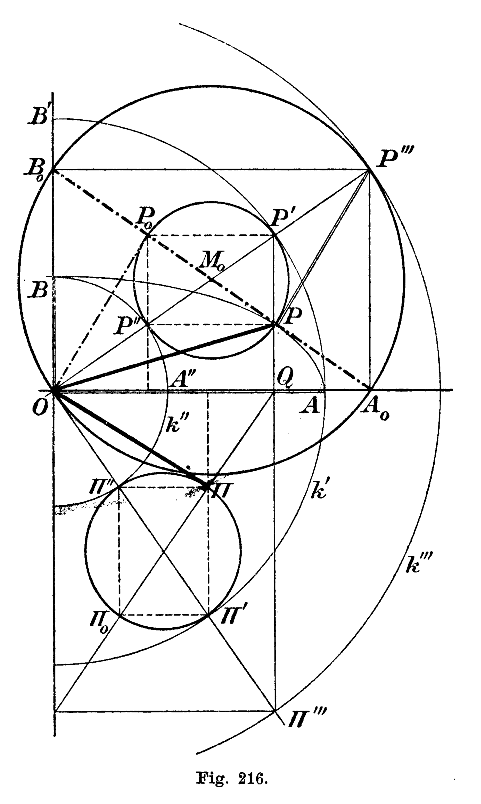


Fig. 216.

Es seien OB und OA die beiden Halbachsen, OA die größere; um O konstruieren wir die Kreise k' und k'' mit den Radien OA und OB. Dann ist die Ellipse ε

affin zu dem Kreise k' in der Affinität mit der Achse AO, wobei B zu B' affin ist,

affin zu dem Kreise k'' in der Affinität mit der Achse BO, wobei A zu A'' affin ist,

wenn A'' den Schnittpunkt von k'' mit OA bezeichnet. Zu einem Punkte P der Ellipse sei in der ersten Affinität der Punkt P' von k'

affin, in der zweiten der Punkt P'' von k''. Dann ist also $P'P$ zu $B'B$ parallel, zu OA senkrecht; der Fußpunkt dieses Lotes sei Q. Dann ist nach § 79, 8.:

$$PP' : PQ = BB' : BO = P''P' : P''O,$$

indem $BB' = P''P'$, $BO = P''O$ ist. Daher liegt P'' auf OP'.

Um also eine Ellipse aus den beiden Halbachsen OA und OB zu bestimmen, konstruiert man die Kreise k' und k'' um das Ellipsenzentrum O mit diesen Halbachsen als Radien, bringt eine Gerade durch O mit den Kreisen in P' und P'' zum Schnitt und zieht durch P' die Parallele zu OB, durch P'' die zu OA. Der Schnittpunkt P dieser Parallelen ist ein Ellipsenpunkt. Eine zu jener Geraden OP' senkrechte Gerade $O\Pi'$ liefert entsprechend auf k', k'' und ε die Punkte Π', Π'' und Π, und es ist dann $O\Pi$ konjugiert zu OP. Sind P''' und Π''' die Schnittpunkte der Halbstrahlen OP' und $O\Pi'$ mit dem Kreise k''', der O zum Mittelpunkte und die Summe $OA + OB$ zum Radius hat, so ist $P'''P$ die Normale der Ellipse in P', $\Pi'''\Pi$ die Normale in Π, und es ist $P'''P = O\Pi$, $\Pi'''\Pi = OP$.

Der letzte Satz wird so bewiesen: Wegen $P'P'' = \Pi''\Pi'$ und Übereinstimmung in den Winkeln ist $P'PP'' \cong \Pi''\Pi\Pi'$, also $\sphericalangle PP''O = \Pi'''\Pi'\Pi$, $PP'' = \Pi'\Pi$ und ferner ist $\Pi'''\Pi' = OP''$. Daher ist $OP''P \cong \Pi'''\Pi\Pi'$, also ist $\Pi'''\Pi$ gleich der Strecke OP und steht, da $O\Pi''' \perp OP'$ ist, auf ihr senkrecht; $\Pi\Pi'''$ steht daher in Π auf der Tangentenrichtung OP dieses Punktes senkrecht, ist also in der Tat die Normale.

5. Wir können jetzt beweisen, daß die als affines Bild des Kreises definierte Ellipse die Brennpunkteigenschaften hat, durch die man meist die Ellipse definiert. Ist uns eine Ellipse ε als affines Bild eines Kreises gegeben, so konstruieren wir vor allem die Achsen. Ihre halben Längen seien a und b, $b < a$. Durch diese ist die Ellipse der Gestalt nach vollkommen bestimmt. Mit b als Radius konstruieren wir einen Rotationszylinder (Fig. 217), so daß also eine zur Rotationsachse senkrechte Ebene den Zylinder in einem Kreise $\varkappa$ vom Radius b trifft. Auf der Rotationsachse nehmen wir einen Punkt O an, legen durch die Achse eine Ebene η, die den Zylinder in zwei Erzeugenden p, q trifft und bestimmen auf p einen Punkt A, so daß $OA = a$ ist. Die durch OA gehende Normalebene auf η trifft dann den Zylinder in einer Kurve ε', die (durch die Erzeugenden des Zylinders) als Parallelprojektion des Kreises $\varkappa$ erscheint. Nach 2. ist ε' also eine Ellipse (die durch die Fundamentalkonstruk-

tion erhalten werden kann), und da sie zur Ebene η symmetrisch liegt, so ist die Gerade OA eine Symmetrieachse und damit Achse der Ellipse, OA ihre halbe Länge. Die zu OA senkrechte Halbachse ist daher, als Normale von η, gleich dem Radius b des Zylinders. Die Ellipse ε' hat also dieselben Achsen wie ε, ist also zu ε kongruent. Eine mit ε kongruente Ellipse ist somit als Schnitt eines Rotationszylinders dargestellt.

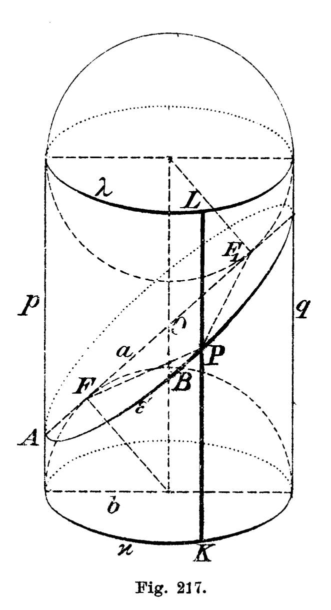


Fig. 217.

Jetzt legen wir in den Zylinder die beiden Dandelinschen[1]) Kugeln, d. h. Kugeln mit dem Radius b, die die Ebene der Ellipse in F und F_1 auf OA berühren. Diese Kugeln berühren den Zylinder in zwei Kreisen $\varkappa$ und λ. Ist P irgend ein Punkt von ε', so verbinden wir ihn mit F und F_1 und ziehen die durch ihn gehende Erzeugende des Zylinders, die $\varkappa$ und λ in K und L treffe. Dann sind PF und PK als Tangenten an die eine Kugel einander gleich, ebenso PF_1 und PL; daher:

$$PF + PF_1 = PK + PL = KL = \text{const.},$$

wo KL der von P unabhängige Abstand der Mittelpunkte von $\varkappa$ und λ ist. Damit sind F und F_1 als Brennpunkte von ε' erwiesen, die Definition der Ellipse als affines Bild des Kreises ist also mit der bekannten Definition äquivalent, wonach die Ellipse der Ort der Punkte ist, deren Abstände von zwei festen Punkten eine konstante Summe haben.

6. Aus der Figur 216 sind leicht noch fruchtbare Gedanken herauszuholen, weshalb wir sie noch einmal vornehmen wollen (Fig. 218 a. f. S.). Es war bereits festgestellt worden, daß

$$P'''P \perp O\Pi$$

ist. Sei jetzt M_0 der Mittelpunkt von $P'P''$ und damit von OP'''. Auf M_0P tragen wir $M_0P_0 = M_0P$ so ab, daß M_0 in der Mitte zwischen P_0 und P liegt. Dann sind die Dreiecke PM_0P''' und P_0M_0O nach dem 1. Kongruenzsatze kongruent, daher

1) Dandelin, 1794—1847, lebte in Lüttich und Namur, zuletzt belgischer Ingenieuroberst.

$$OP_0 \;\#\; PP''',$$

also

$$OP_0 \perp O\Pi \quad \text{und} \quad = O\Pi.$$

Die Gerade P_0P treffe OB und OA in B_0 und A_0. Da die Strecken PP_0 und $P'P''$ einander halbieren und $P''P \perp PP'$, so ist $P_0P'PP''$ ein Rechteck. Dieses ist zu $B_0P'''A_0O$ ähnlich gelegen, daher ist auch $B_0P'''A_0O$ ein Rechteck,

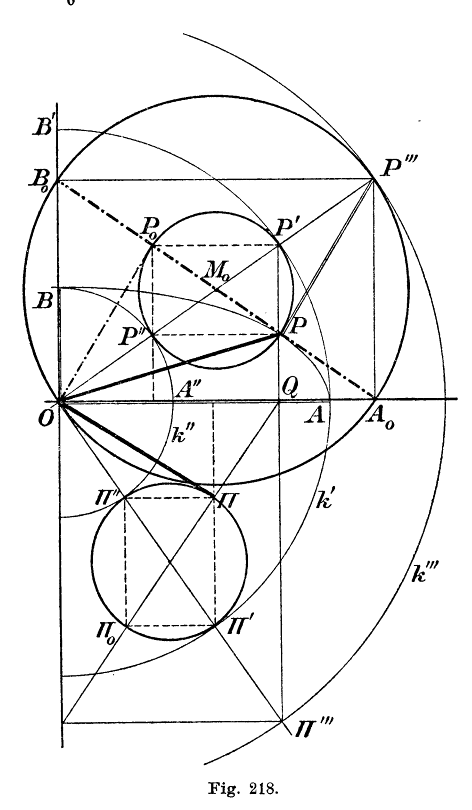


Fig. 218.

$$A_0B_0 = OP''' = OA + OB,$$
$$B_0P_0 = OP'' = OB,$$
$$P_0A_0 = OA.$$

Das kann man verwerten zu folgender

Achsenkonstruktion, wenn zwei konjugierte Halbmesser $O\Pi$ und OP nach Größe und Lage gegeben sind:

Man errichtet in O auf $O\Pi$ das Lot und trägt darauf $OP_0 = O\Pi$ ab. Um den Mittelpunkt M_0 von PP_0 als Zentrum lege man den Kreis, der durch O geht; sind A_0 und B_0 seine Schnittpunkte mit PP_0, so sind OA_0 und OB_0 die Achsen der Ellipse der Lage nach. Auf OA_0 trage man $OA = P_0A_0$ ab, auf OB_0 ebenso $OB = P_0B_0$. Dann sind OA und OB die Halbachsen nach Lage und Größe.

Die zu dieser Konstruktion nötigen Geraden und Kreise sind in der Figur durch kräftigeren Strich hervorgehoben. Muß eine Ellipse aus anderen Gründen als affines Bild eines Kreises konstruiert werden, so wird man die Achsen mittels dieser Affinität (nach § 79, 10.) oft schneller finden.

§ 81. **Anwendungen.**

1. Der Neunpunktekreis. Die Fundamentalkonstruktion in § 80 stützt sich auf eine Eigenschaft des Dreiecks, die wir um ihres planimetrischen Interesses wegen noch etwas weiter verfolgen wollen.

Im Anschluß an Figur 213 war festgestellt worden, daß der Kreis mit der Dreiecksseite $A'B'$ als Durchmesser die beiden anderen Seiten in zwei Punkten X' und Y' trifft, deren Tangenten durch den Mittelpunkt M' des „oberen Abschnittes“ der zu $A'B'$ gehörigen Höhe $C'Z'$ gehen. Dabei soll als oberer Höhenabschnitt immer die Strecke zwischen dem Höhenpunkte und der Ecke des Dreiecks gelten. Da nun, wenn O' den Mittelpunkt von $A'B'$ bezeichnet, die Winkel $O'X'M'$, $O'Y'M'$ und $O'Z'M'$ rechte sind, so liegen die Punkte O', X', Y', Z' auf einem Kreise; dieser ist aber durch die drei Höhenpunkte X', Y', Z' schon bestimmt und muß, wie er durch die Mitte einer Seite und eines oberen Höhenabschnittes geht, so auch durch die anderen gehen. Daraus folgt:

Satz 1. Die drei Höhenfußpunkte eines Dreiecks, die drei Mitten seiner Seiten und die drei Mitten seiner oberen Höhenabschnitte liegen auf einem Kreise, dem Feuerbachschen[1]) oder Neunpunktekreise.

2. Metrische Eigenschaften der Ellipse. Die Affinität ist ein wichtiges Übertragungsprinzip der darstellenden Geometrie. Wir wollen, um die Art seiner Anwendung zu zeigen, noch einige metrische Eigenschaften der Ellipse vom Kreis her herübernehmen. (Vgl. Bd. II, § 80.)

Sind a und b die große und die kleine Halbachse der Ellipse ε in Figur 218, so verhält sich ihr Flächeninhalt ε zu dem des Kreises k', zu dem sie affin ist, wie die Strecke OB des Affinitätsstrahles BB' zu der affinen Strecke OB' (§ 79, 9.):

$$\varepsilon : k' = OB : OB' = b : a, \quad \varepsilon = \frac{k'b}{a} = \frac{a^2\pi b}{a} = ab\pi.$$

Satz 2. Die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist $ab\pi$.

Von dem Satze über die Flächeninhalte affiner Figuren wollen wir noch eine Anwendung auf die Parallelogramme machen, die eine Ellipse in den Endpunkten konjugierter Durchmesser berühren. Ihnen entsprechen am Kreise die umgeschriebenen Quadrate; diese sind einander gleich. Das Verhältnis jedes solchen Quadrates zu dem affinen Parallelogramm ist gleich der Affinitätskonstante: also sind auch die Parallelogramme einander gleich.

Satz 3. Die Parallelogramme, deren Seiten eine Ellipse in den Endpunkten konjugierter Durchmesser berühren, sind inhaltsgleich.

---

1) Karl Wilhelm Feuerbach, 1800—1834, Sohn des berühmten Kriminalisten Anselm F., Bruder des Philosophen Ludwig und des Archäologen Anselm F., Oheim des Malers Anselm F.

In Figur 218 ist das aus $\Pi O P$ zu ergänzende Parallelogramm ein Viertel eines jener umgeschriebenen, also gleich dem aus den Halbachsen $OA = a$ und $OB = b$ zu ergänzenden Rechteck ab, also

$$OP \cdot O\Pi \sin PO\Pi = ab.$$

In dem Dreieck OPP''' ist andererseits $OP''' = a + b$, $PP''' = O\Pi$, $\sphericalangle\, OPP''' = \sphericalangle\, PO\Pi + 90^0$, also nach dem Kosinussatze:

$$(a+b)^2 = OP^2 + O\Pi^2 - 2\,OP \cdot O\Pi \cos(PO\Pi + 90^0),$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = OP^2 + O\Pi^2 + 2\,OP \cdot O\Pi \sin PO\Pi = OP^2 + O\Pi^2 + 2ab,$$

$$a^2 + b^2 = OP^2 + O\Pi^2,$$

woraus folgt:

Satz 4. Die Summe der Quadrate konjugierter Halbmesser ist konstant, nämlich gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen.

Analytisch sind diese Sätze in § 80 des II. Bandes bewiesen. Auch der Satz in Nr. 2 ebenda kann mittels der Affinität leicht vom Kreise auf die Ellipse übertragen werden, wenn man in Figur 226 l. c. den Kreis über AA' als Durchmesser anlegt, in O auf OA' das Lot $OB_0 = OA'$ errichtet und in einer Affinität mit der Achse AA' dem Punkte B den Punkt B_0 zuordnet. —

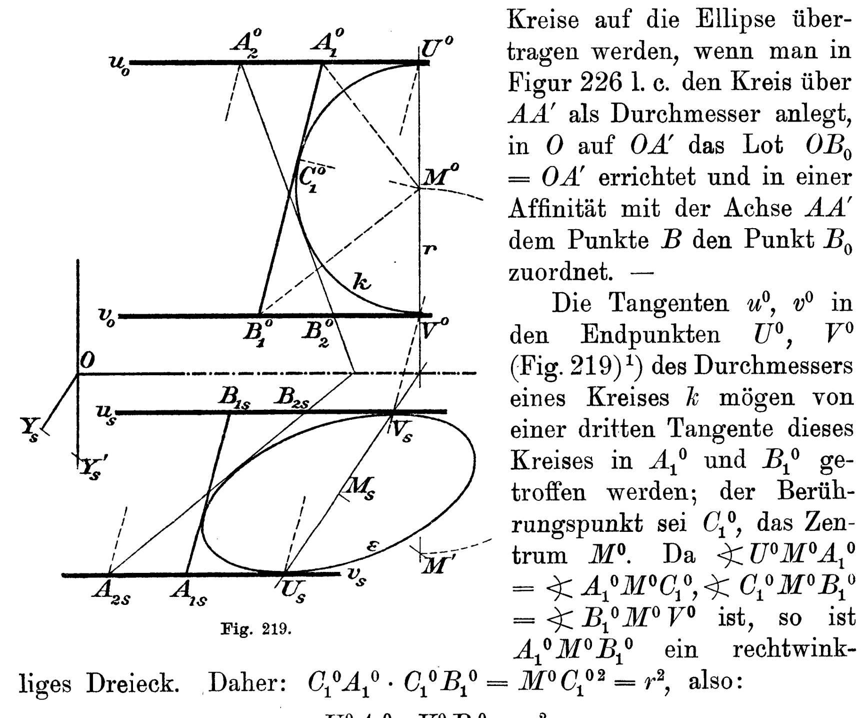


Fig. 219.

Die Tangenten u^0, v^0 in den Endpunkten U^0, V^0 (Fig. 219)[1]) des Durchmessers eines Kreises k mögen von einer dritten Tangente dieses Kreises in $A_1{}^0$ und $B_1{}^0$ getroffen werden; der Berührungspunkt sei $C_1{}^0$, das Zentrum M^0. Da $\sphericalangle\, U^0M^0A_1{}^0 = \sphericalangle\, A_1{}^0M^0C_1{}^0$, $\sphericalangle\, C_1{}^0M^0B_1{}^0 = \sphericalangle\, B_1{}^0M^0V^0$ ist, so ist $A_1{}^0M^0B_1{}^0$ ein rechtwinkliges Dreieck. Daher: $C_1{}^0A_1{}^0 \cdot C_1{}^0B_1{}^0 = M^0C_1{}^{02} = r^2$, also:

$$U^0A_1{}^0 \cdot V^0B_1{}^0 = r^2.$$

1) Die Bezeichnungen der Figur sind so gewählt, daß sie noch einem anderen Zwecke dienen können.

Sind $A_2{}^0$ und $B_2{}^0$ die Schnittpunkte einer anderen Tangente mit u^0 und v^0, so ist ebenso:

$$U^0A_2{}^0 \cdot V^0B_2{}^0 = r^2,$$

also:

$$\frac{U^0A_1{}^0}{U^0A_2{}^0} \cdot \frac{V^0B_1{}^0}{V^0B_2{}^0} = 1.$$

Dem Kreise entspricht affin eine Ellipse ε mit zwei (parallelen) Tangenten u_s, v_s in den Endpunkten eines Durchmesser U_sV_s, die von einer dritten und vierten Tangente in A_{1s} und B_{1s} bezw. A_{2s} B_{2s} getroffen werden. Da

$$U^0A_1{}^0 : U^0A_2{}^0 = U_sA_{1s} : U_sA_{2s},$$
$$V^0B_1{}^0 : V^0B_2{}^0 = V_sB_{1s} : V_sB_{2s},$$

so ist

$$\frac{U_sA_{1s}}{U_sA_{2s}} \cdot \frac{V_sB_{1s}}{V_sB_{2s}} = 1,$$

also

$$U_sA_{1s} \quad V_sB_{1s} = U_sA_{2s} \cdot V_sB_{2s}.$$

Daher der Satz:

Satz 5. Auf je zwei parallelen Tangenten einer Ellipse werden durch die Berührungspunkte und durch die Schnittpunkte mit einer dritten Tangente zwei Strecken begrenzt, deren Produkt bei allen Lagen der dritten Tangente konstant ist.

Ein schöner Satz über die Ellipse läßt sich aus der Figur des Ankreises der Seite AB eines Dreiecks ABC ableiten, wenn man im Mittelpunkte O dieses Ankreises auf OC die Senkrechte errichtet und mit CA und CB in U und V zum Schnitt bringt (Fig. 220). Da die Dreiecke AOU und OBV wegen Übereinstimmung in den Winkeln einander ähnlich sind, so ist:

$$UA : UO = OV : BV,$$
$$UA \cdot VB = OU \cdot OV = OU^2;$$

Fig. 220.

also ist das Produkt $UA \cdot VB$ für alle Lagen der Tangente AB dasselbe. Wir konstruieren jetzt zu A, B, C die zentrisch sym-

metrischen Punkte A_0, B_0, C_0 bezüglich O als Symmetriezentrum. Dann ist $A_0B_0 \| AB$, $UB_0 = VB$, also:

$$UA \quad UB_0 = OU^2 = \text{const.}$$

bei allen Lagen der Tangenten AB und A_0B_0. Daher der

Satz 6. Auf den zwei von einem Punkte ausgehenden Tangenten einer Ellipse werden durch diesen Punkt und durch zwei veränderliche parallele Tangenten zwei Strecken begrenzt, deren Produkt für alle Lagen der parallelen Tangenten dasselbe ist;

wiederum ist nämlich das Verhältnis zweier solcher Produkte gleich 1. Aus $UA \cdot VB = OU^2$ folgt ebenso:

Satz 7. Wenn man von einem Punkte C an eine Ellipse die Tangenten legt und mit dem zu OC konjugierten Durchmesser in U und V zum Schnitt bringt, so werden auf ihnen durch U und V sowie durch eine veränderliche Tangente zwei Strecken UA und VB begrenzt, deren Produkt für alle Lagen der veränderlichen Tangente dasselbe ist.

3. Die wahre Länge einer durch Schrägbild und Orthogonalprojektion (auf die Bildebene) gegebenen Strecke.

Die Schrägbilder der Endpunkte seien A_s, B_s (Fig. 221), ihre Orthogonalprojektionen auf die xz-Ebene A'', B''. Man wird die Ebene $ABB''A''$ um $A''B''$ in die Bildebene umlegen, oder, was noch etwas kürzer ist, durch B die Gerade $BC \# A''B''$ ziehen und das rechtwinklige Dreieck ACB um BC drehen, bis es zur Bildebene parallel wird. Das Schrägbild der so umgelegten Strecke gibt dann ihre wahre Länge an. Es ist $C_sB_s \# A''B''$. Sei wieder, wie in Figur 219, zur Festlegung der Projektionsrichtung ein Punkt Y der y-Achse durch Bild Y_s und Umlegung OY' von OY auf die z-Achse gegeben. Die Parallelen durch C_s und A_s zu OY' und Y_sY' treffen sich in einem Punkte A^* derart, daß C_sA^* die wahre Länge von C_sA_s ist. Jetzt hat man nur noch auf B_sC_s in C_s das Lot $C_s\bar{A} = C_sA^*$ zu errichten. Dann

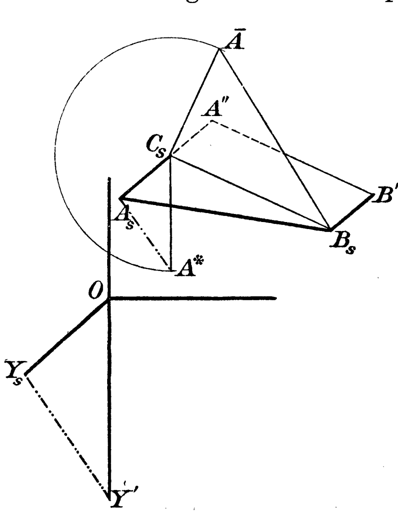


Fig. 221.

ist $B_s\bar{A}$, als Bild der zur xz-Ebene parallel gedrehten Strecke B_sA_s, die wahre Länge von BA.

4. Von einem Punkte P auf eine Ebene η das Lot zu fällen. P sei gegeben durch sein Bild P_s und seine Orthogonalprojektion P'' auf die Bildebene xz; die Ebene η durch die Bilder e_2 und e_{1s} ihrer Schnittlinien e_2 und e_1 mit der xy-Ebene (Fig. 222). Das gesuchte Lot liegt in jeder durch P gehenden Normalebene von η, also auch in derjenigen, die auf η und xz zugleich senkrecht steht. Diese Ebene ν steht dann senkrecht auf der Schnittlinie e_2 von η und xz und enthält die Gerade PP'', da diese auf xz normal steht. Daher schneidet ν die xz-Ebene in einer durch P'' gehenden Geraden, die auf e_2 senkrecht steht. Der erste Schritt zur Konstruktion wird also der sein, von P'' auf e_2 das Lot zu fällen; seine Schnittpunkte mit e_2 und mit der x-Achse seien A und C''. Durch die Geraden PP'' und $P''C''$ ist die Ebene ν festgelegt; zur Erhöhung der Anschaulichkeit haben wir sie in Figur 222 durch ein Rechteck $DP''C''C$ begrenzt dargestellt, dessen Ecke C auf e_1 liegt; $C''C_s$ ist parallel zu D_sP'', also zu OY_s. Die Gerade D_sC_s ist also zur Konstruktion nicht notwendig. Diese Ebene ν legen wir nun um die Gerade $P''C''$ auf die Bildebene. Dabei kommt CC'' in die Lage $C^0C'' \perp C''P''$, wo C^0C'' die wahre Länge von $C''C_s$ ist. Man zieht also durch C'' und C_s die Parallelen zu OY' und Y_sY', die sich in C' treffen, und trägt auf dem in C'' auf $C''P''$ errichteten Lote $C''C^0 = C''C'$ ab. Diese Umlegung von ν kann aber nach § 79, 2. durch eine Parallelprojektion in der Richtung C^0C ersetzt werden; zwischen den Bildern der Punkte von ν und ihren Umlegungen besteht also eine Affinität mit $C''P''$ als Achse und C_s, C^0 als homologen Punkten. Daher

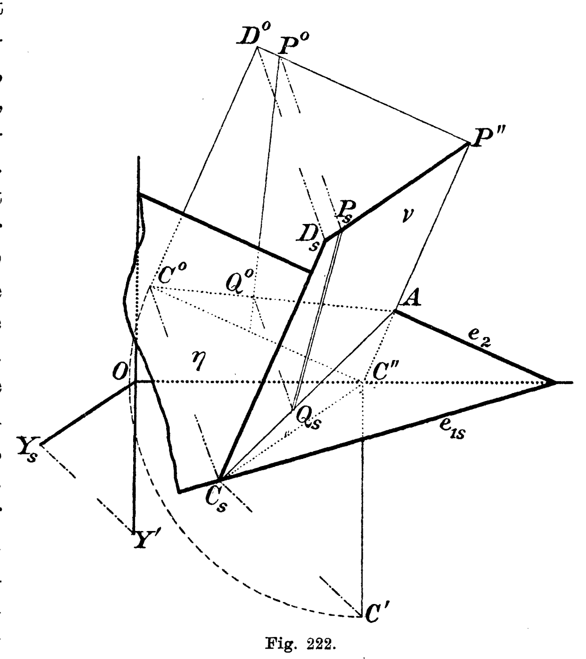


Fig. 222.

findet man die Umlegung $P''P^0$ von $P''P$, indem man durch P'' zu $C''C^0$, sowie durch P_s zu C_sC^0 die Parallele zieht; der Schnittpunkt ist P^0. Die Gerade AC^0 ist die Umlegung der Schnittlinie von ν mit η. Fällt man also $P^0Q^0 \perp C^0A$, so ist P^0Q^0 das umgelegte Lot auf ν. Daher ist Q_s der Schnittpunkt von AC_s mit der durch Q^0 zu C^0C_s gezogenen Parallele, und P_sQ_s ist das Bild des gesuchten Lotes, P^0Q^0 seine wahre Länge. Der gesperrt gedruckte Teil des Textes enthält die endgültige Konstruktion.

5. Einen Kreis der xy-Ebene darzustellen (Fig. 219). Der Mittelpunkt M ist gegeben durch sein Bild M_s, der Radius sei r. In Figur 219 ist die xy-Ebene um die x-Achse nach oben gedreht, bis zum Zusammenfallen mit der Bildebene; man könnte natürlich auch nach unten drehen, wie in Figur 203. Der weitere Verlauf der Konstruktion ist aus der Figur hinreichend zu ersehen, die übrigens, zu anderen Zwecken entworfen, viel mehr Hilfslinien aufweist, als nötig sind; die zu den beiden Koordinatenachsen parallelen konjugierten Durchmesser hätte man direkt bestimmen und aus ihnen die Achsen konstruieren können.

Neu gegen die Figuren 203, 205 ist in Figur 219 die Umklappung der xy-Ebene nach oben, die ersichtlich den Vorzug hat, den für das Bild dienenden Raum nicht mit zuviel Hilfslinien zu überdecken. Ein anderes ebenso praktisches wie anschauliches Drehungsverfahren werden wir in der folgenden Aufgabe kennen lernen, das allerdings schon in Figur 221 verwendet worden ist, dort aber nicht so recht hervortritt.

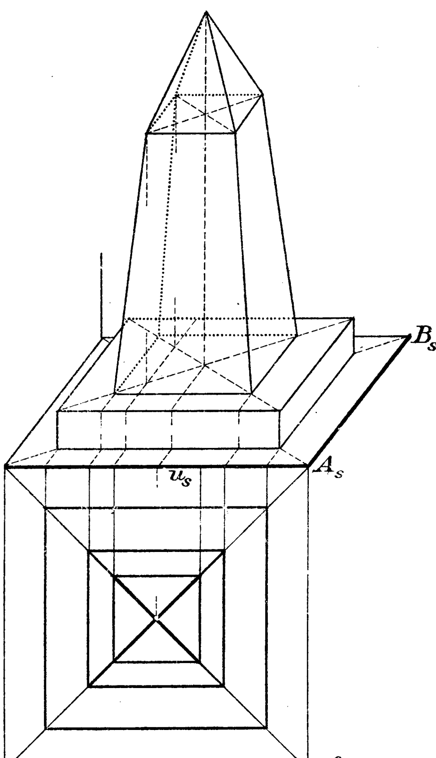


Fig. 223.

6. Darstellung eines ebenflächigen Körpers (Fig. 223). Die bestimmenden Eckpunkte sind auf die xy-Ebene gelotet und die Gesamtheit dieser Projektionen — wir werden sie im nächsten Abschnitte als Grundriß kennen lernen — ist gegeben. Um den

für das Bild dienenden Raum von den Hilfslinien frei zu halten, ist die xy-Ebene quadratisch begrenzt und um die vordere, zur x-Achse parallele Quadratseite u gedreht, bis sie zur Bildebene parallel wird. Die gedrehte xy-Ebene erscheint dann bildlich in ihrer wahren Gestalt. Im übrigen spricht die Figur 223 für sich. Zwischen dem Bilde der xy-Ebene und dem der Umdrehung besteht Affinität mit u_s als Achse und B^0B_s als Richtung.

7. Darstellung der Kugel. Während das Schrägbild eines ebenflächigen Körpers einfach seine Kanten und Ecken wiedergibt, zwischen die man seine Ebenen sich hineindenkt, muß bei einem krummflächigen Körper, z. B. bei der Kugel, erst schärfer definiert werden, was ihr Bild eigentlich leisten soll. Bezüglich eines solchen Körpers, z. B. einer Kugel k, zerfallen die Projektionsstrahlen (deren Richtung wir fest angenommen denken) in drei Gruppen: in schneidende, berührende und nichtschneidende. Die berührenden bilden die Grenze zwischen den schneidenden und nichtschneidenden, ihr Schnitt mit der Bildebene wird also dort die Punkte, welche Kugelpunkte projizieren, von denen trennen, die es nicht tun. Könnte ein Auge aus dem unendlich fernen Punkte der Projektionsstrahlen längs diesen blicken, so würden die schneidenden Projektionsstrahlen ihm Seheindrücke vom Körper vermitteln, die nichtschneidenden nicht, und die berührenden würden die Grenze bilden, sie würden die vom Körper herrührenden Seheindrücke von denen der Umgebung scheiden. Diese berührenden Strahlen folgen aufeinander stetig (wenn der Körper es ist, was wir voraussetzen) und berühren den Körper längs einer Kurve oder mehrerer Kurven u, deren Gesamtheit der Umriß des Körpers für den gewählten Sehpunkt genannt wird. Der Umriß scheidet also für das Auge die vom Körper herrührenden Seheindrücke von denen der Umgebung. Die Projektion dieses wahren Umrisses heißt der scheinbare, immer in bezug auf den gewählten Sehpunkt verstanden.

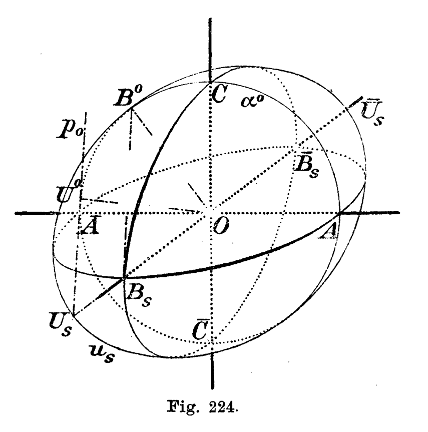


Fig. 224.

Die Kugel k möge den Nullpunkt O des Koordinatensystems zum Zentrum haben; die Projektionsrichtung YY_s sei durch Y_s und die Umlegung OY' von OY auf die z-Achse gegeben wie in Fig. 221; in Fig. 224 sind der Deutlichkeit halber diese Bestimmungsstücke weggelassen. Die den Umriß erzeugenden Projektionsstrahlen umhüllen die Kugel längs des auf der Projektionsrichtung YY_s senkrechten Großkreises, bilden

also einen zur Bildebene schräg stehenden Rotationszylinder mit der Achse YY_s. Der scheinbare Umriß der Kugel, nämlich der im Bilde, ist die Schnittkurve dieses Zylinders mit der Bildebene, also eine Ellipse (was z. B. die Figur der Dandelinschen Kugeln im Zylinder, Figur 217, beweist). Diese soll jetzt dargestellt werden. Die Schnittpunkte der Kugel mit den Achsen x, y, z seien A, B, C, und B_s das Bild von B. Dieses kann bereits konstruiert werden. Dann ist auch BB_s ein Projektionsstrahl, der von dem zu BB_s senkrechten Großkreise in einem Punkte U getroffen werde. Wir legen die Ebene BOB_s mitsamt allen in ihr liegenden Projektionsstrahlen um OB_s in die Bildebene. Dazu ziehen wir $OB^0 \perp OB_s$ und machen OB^0 gleich dem Radius r der Kugel. Der in der Ebene BOB_s liegende Kugelkreis α geht durch die Umlegung in einen Kreis α^0 mit O als Zentrum und r als Radius über, den wir konstruieren. Zieht man eine zu B^0B_s parallele Tangente p_0 an diesen Kreis α^0, und ist U^0 ihr Berührungspunkt, so ist p_0 die Umlegung eines die Kugel berührenden Projektionsstrahles p mit dem Berührungspunkte U, von dem U_0 die Umlegung ist. Der Schnittpunkt U_s von p und also auch von p^0 mit OB_s ist daher ein Punkt der (scheinbaren) Umrißellipse u_s. Diese ist die Projektion des Großkreises u, dessen Ebene durch OB^0 und durch U geht, wobei α^0 samt B^0 als Schnittkreis und Schnittpunkt der Kugel mit der Bildebene aufzufassen sind. Da nun durch Parallelprojektion aufeinander senkrechte Durchmesser von u in konjugierte Durchmesser von u_s übergehen, so sind OB^0 und OB_s konjugierte Halbmesser von u_s, und, weil sie aufeinander senkrecht stehen, die Halbachsen. Dadurch ist u_s bestimmt. Von Interesse ist noch, daß B_s ein Brennpunkt der Ellipse u_s ist. Denn es ist $OU^0U_s \cong B^0OB_s$, daher $B^0B_s = OU_s$ (vgl. Bd. II, § 66).

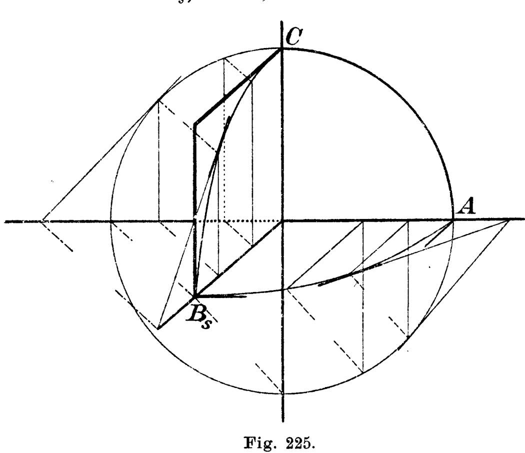


Fig. 225.

8. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit sind in Figur 224 noch die drei Schnittkreise der Kugel mit den Koordinatenebenen abgebildet. Davon erscheint der in der xz-Ebene liegende in seiner wahren Gestalt, die beiden anderen stellen sich als Ellipsen dar, die zu jenem Kreise affin sind; für die Bildellipse

des Kreises in der xy-Ebene ist OA die Affinitätsachse, OA und OB_s sind konjugierte Halbmesser, aus denen in Figur 224 durch Konstruktion der Achsen und der Krümmungskreise in ihren Endpunkten (vgl. Bd. II, § 81) die Ellipse erhalten wurde; doch sind diese Nebenkonstruktionen in die Figur nicht aufgenommen worden. Ebenso sind OC und OB_s konjugierte Halbmesser der Ellipse, die den Kreis in der xz-Ebene abbildet. In Figur 225 sind von diesen Ellipsen die Tangenten in A, B_s und C sowie in dazwischen liegenden Punkten konstruiert unter Benutzung der Affinität. Solche leicht zu ziehende Tangenten wird man auch bei der Konstruktion der Ellipse aus den Hauptachsen gern mit verwerten.

9. Der erste Eindruck der Figur 224 ist befremdend und zeigt eine Schattenseite aller streng mathematisch konstruierten Bilder: nämlich ihre Abhängigkeit vom gewählten Projektionszentrum. Man lege die Figur flach hin auf den Tisch, errichte in O auf dem Blatte in Gedanken das Lot $OB = OB_s$, halte einen Bleistift in der Richtung B_sB und blicke allein mit dem rechten Auge aus etwa 60—80 cm Entfernung in der Richtung dieses Stiftes so, daß er in seine obere Begrenzung zusammengeschrumpft erscheint, und sofort wird die Figur mit täuschender Plastik eine Kugel darzustellen scheinen. Die Umrißellipse erscheint dabei bereits als Kreis, obwohl sie auf den Anblick aus viel größerer Entfernung berechnet ist. Diese Vorschrift gilt für alle Schrägbilder.

Will man sich dieser kleinen Mühe nicht unterziehen, so kann man sich mit dem ungewohnten Anblick der Figur auch durch die Erwägung aussöhnen, daß ein Schrägbild als Schattenbild bei direkter Sonnenbeleuchtung aufgefaßt werden kann: die von der Sonne ankommenden Lichtstrahlen sind praktisch so gut wie parallel, erzeugen also einen zylindrischen Schattenraum hinter der Kugel, dessen Schnitt mit einer zur Lichtrichtung geneigten Ebene eine Ellipse ist.

§ 82. Technik der darstellenden Geometrie.

1. Während die zeichnerischen Konstruktionen der Planimetrie meist nur zur Verifizierung begrifflich als möglich erkannter Konstruktionen dienen, und die stereometrischen Konstruktionen fast nur in der Anschauung ausgeführt werden, ist die zeichnende Konstruktion in der darstellenden Geometrie Selbstzweck. Die begriffliche Konstruktion ist in mancher Beziehung genauer, vielfach aber ungenauer als die praktische. Genauer ist sie, wenn sie eine Ellipse, deren Halbachsen 5 cm und 5,001 cm betragen, noch von einem Kreise unterscheidet, während die genaueste Zeichnung die Kurve nur als

Kreis wiedergibt; ein mit dem Zirkel gezeichneter sogenannter Kreis stellt nicht nur begriffliche Kreise, sondern auch begriffliche Ellipsen, deren Achsenverhältnis nahezu Eins ist, dar. Eine Sinuslinie von 0,001 mm Wellenhöhe ist begrifflich durchaus keine gerade Linie, zeichnerisch ist sie von einer solchen schlechterdings nicht zu unterscheiden. Aus diesem Versagen begrifflicher Unterscheidungen entspringt für die praktisch-zeichnerische Geometrie der große Vorteil, Kurven mit komplizierten Bildungsgesetzen aus Kurvenstücken einfacherer Erzeugung zusammensetzen zu können, vor allem aus Kreisbögen. Wie man die Krümmungskreise einer Ellipse an den vier Scheiteln findet, ist in Bd. II, § 81, 11. gezeigt worden. Wenn man in die zwischen diesen Kreisbögen bestehenden Lücken noch je einen Punkt mit Tangente einschaltet, so läßt sich die Ellipse meist bequem herstellen. Häufig findet man zu diesen Krümmungskreisbögen und den eingeschalteten Punkten einen passenden Ellipsenquadranten auf einem Kurvenlineal. Zu empfehlen sind die Burmesterschen Kurvenlineale, weil diese aus Stücken häufig vorkommender Kurven zusammengesetzt sind, während viele andere Kurvenlineale aus Phantasiekurven hergestellt sind. Allzusehr darf man sich von Kurvenlinealen nicht abhängig machen, mit dem Zirkel gelingt nach einiger Übung eine Ellipse ebenso rasch.

2. Genauer ist die praktische Geometrie als die begriffliche überall, wo es sich um das exakte Festlegen von Punkten und Linien handelt. Begrifflich ist eine Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt, praktisch nur, wenn diese Punkte nicht gar zu nahe beieinander oder zu weit entfernt liegen.

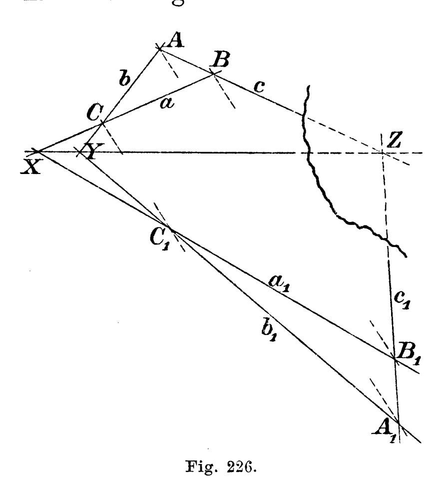


Fig. 226.

I. Liegen die zu verbindenden Punkte X und Y zu nahe beieinander und sind sie als Schnittpunkte von Geraden a, a_1 und b, b_1 gegeben, so erweist sich oft der Desarguessche Satz als nützlich (Fig. 226). Man fügt noch eine Gerade c hinzu, die nicht durch die Punkte X, Y oder den Schnittpunkt C von a und b, noch durch den Schnittpunkt C_1 von a_1 und b_1 geht und die die gesuchte Gerade XY (nach Augenmaß) in einem zur Konstruktion bequemen Punkte Z trifft. Die drei Geraden a, b, c bestimmen dann ein Dreieck A, B, C; die Parallelen

durch A und B zu CC_1 treffen dann a_1 und b_1 in zwei Punkten A_1 und B_1, so daß die Geraden A_1B_1 und AB sich auf XY in Z treffen.

II. Sind umgekehrt X und Z zu verbinden und fällt Z außerhalb des Zeichenblattes, so zeigt dieselbe Figur, wie ein dritter Punkt Y der Geraden einzuschalten ist, falls X und Z als Schnittpunkte von a, a_1 und c, c_1 gegeben sind.

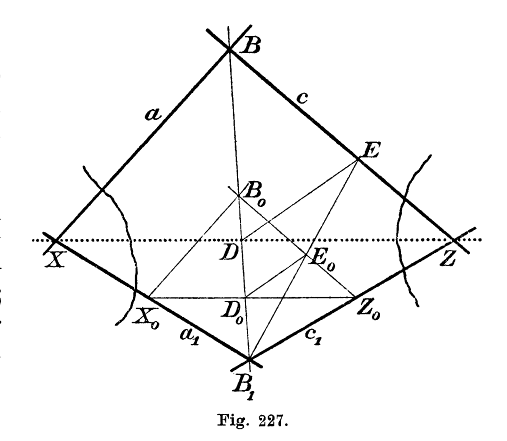


Fig. 227.

III. Wiederum seien X und Z als Schnittpunkte von a, a_1 und von c, c_1 gegeben; beide Punkte mögen aber außerhalb des Zeichenblattes liegen (Fig. 227). Sind die Schnittpunkte B und B_1 von a, c und von a_1, c_1 zugänglich, so ziehe man BB_1, nehme darauf B_0 so an, daß — nach Augenmaß beurteilt — die Parallelen durch B_0 zu a und zu c die Geraden a_1 bezw. c_1 in den Punkten X_0 und Z_0 treffen, die zugänglich sind. Dann ist X_0Z_0 zu XZ parallel, da $X_0B_0Z_0B_1$ zu $XBZB_1$ ähnlich und ähnlich gelegen ist. Es gilt jetzt nur, den zum Schnittpunkt D_0 von X_0Z_0 mit B_1B_0 homologen Punkt D zu finden. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch B_1 irgend eine Gerade, die B_0Z_0 und BZ in zugänglichen Punkten E_0 und E treffe, und ziehen $ED \parallel E_0D_0$. Diese Gerade trifft BB_1 in D, und die Parallele durch D zu X_0Z_0 ist dann die gesuchte Verbindungslinie von X und Y. Wäre wenigstens X zugänglich gewesen, so hätte man $XZ \parallel X_0Z_0$ ohne Benutzung von D finden können.

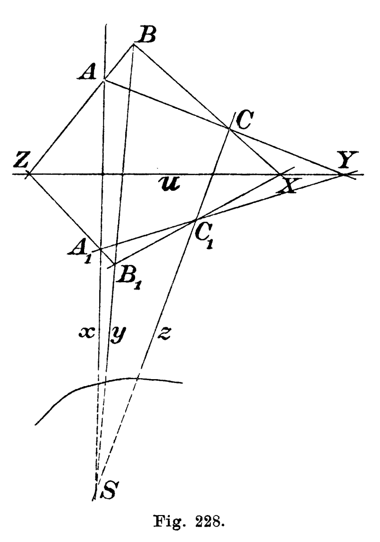


Fig. 228.

Die Figur 226 des Desarguesschen Satzes kann natürlich auch auf den Fall der Unzugänglichkeit von X und Z angewandt werden, wenn für die Wahl von A noch außerhalb $XBZB_1$ passender Platz vorhanden ist; in Figur 227 ist angenommen, daß außerhalb des Vierecks $XBZB_1$ kein Platz mehr ist.

3. I. Wenn zwei Geraden x und y sich unter zu spitzem Winkel schneiden, ist der Schnittpunkt S praktisch nicht hinreichend bestimmt. Auch hier führt der Desarguessche Satz zum Ziel (Fig. 228): Man nimmt auf x zwei Punkte A und A_1, auf y ebenso B und B_1 an, bringt AB mit A_1B_1 in Z zum Schnitt, legt durch Z eine Gerade u, nimmt darauf X und Y an, bringt AY mit BX in C, sowie A_1Y mit B_1X in C_1 zum Schnitt. Dann geht auch CC_1 durch S.

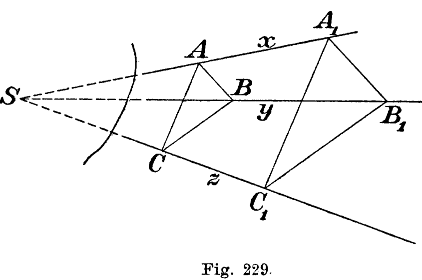


Fig. 229.

II. Diese Konstruktion löst auch die Aufgabe, nach dem unzugänglichen Schnittpunkte S zweier Geraden x, y eine dritte Gerade z durch einen Punkt C zu legen. Bequem ist es dabei, die Gerade XYZ ins Unendliche fallen zu lassen, man erhält dann zwei ähnliche und ähnlich gelegene Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ (Fig. 229).[1]

4. Diese Hilfskonstruktionen mögen als Beispiele genügen. In vielen Fällen wird man die Spezialfälle der Sätze von Pascal in Bd. II, § 17, 2. verwerten können. Wichtiger sind aber häufig die Aushilfen, die sich aus der speziellen Natur der Aufgabe selber ableiten lassen, weshalb es gut ist, sich immer mit mehreren Lösungen derselben Aufgabe vertraut zu machen. Außerdem ist es beim praktischen Zeichnen infolge der unvermeidlichen Ungenauigkeiten nötig, leicht auszuführende Kontrollen sich nicht entgehen zu lassen. — Eine Konstruktion wird um so genauer ausfallen, je einfacher sie ist. Es hat sich in der letzten Zeit unter Anregung von Lemoine ein gewisser Sport, die sog. Geometrographie, herausgebildet, bekannte geometrische Aufgaben mit der geringsten möglichen Zahl von Hilfslinien zu lösen. Abgesehen davon, daß diese Methode auf praktisch bequeme Lage der Punkte und Geraden keine Rücksicht nimmt, leidet sie an dem Nachteil, an leichter Verständlichkeit so viel einzubüßen, als sie an Kürze gewinnt. Kürze ist nicht Einfachheit. Der praktische Zeichner wird mit einer durchsichtigen, aber umständlichen Konstruktion, die er rein mechanisch, ohne viel Nach-

1) Inzwischen ist das schätzenswerte Büchlein von P. Zühlke, „Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen" (Leipzig 1906) erschienen, das auch die Literatur zusammenstellt.

Vgl. ferner E. Haentzschel, Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., V, 3 (1906) „über die Genauigkeit geometrischer Konstruktionen" (mit Literaturangaben).

denken ausführt, häufig schneller und sicherer zum Ziele kommen, als mit einer kurzen, die mehr Nachdenken erfordert und sich nicht bequem dem Gedächtnis einprägt. Auch scheint die Geometrographie für die Bedürfnisse des praktischen Zeichnens von ihrem Erfinder überhaupt nicht bestimmt zu sein, da sie nicht berücksichtigt, daß, wie wir gleich sehen werden, das Ziehen von Parallelen und Loten in der darstellenden Geometrie infolge der Benutzung der Winkellineale zu den Elementaroperationen gehört, ähnlich wie das Ziehen von Kreisen. Aus diesen Gründen hat die Geometrographie in unserem Buche keine Aufnahme gefunden, obwohl ihre Konstruktionen sehr interessant sind.

5. Einige Angaben über die Technik des geometrischen Zeichnens werden nicht unerwünscht sein. Als allgemeiner Grundsatz möge gelten:

Der Mann, der recht zu wirken denkt,
Muß auf das beste Werkzeug halten.

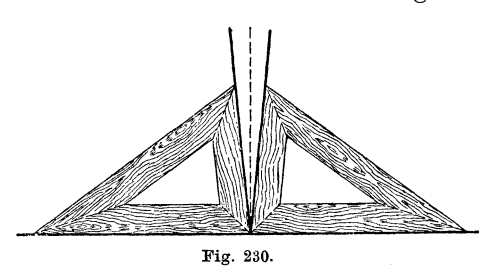
Ganz besonders muß das Reißzeug gut sein. Schlechte Ziehfedern erschöpfen durch ihr häufiges Versagen schließlich die größte Geduld und sind außerdem sehr zeitraubend. Unbedingt erforderlich sind: Ein guter, nicht zu großer (etwa 10 cm) Einsatzzirkel mit Nadelspitzen, Bleistift- und Reißfedereinsatz; der Zirkel darf nicht federn, d. h. er muß jede ihm erteilte Sperrung beibehalten, ohne nachzugeben. Ferner eine Handreißfeder mit dünnen, elastischen Wangen, nicht allzu schwer. Sehr erwünscht ist noch ein Halter zum Einstecken der Reißfeder des Zirkels, wodurch man eine zweite Handreißfeder erhält. Nächstdem empfiehlt sich die Anschaffung eines größeren (etwa 14 cm) Zirkels mit Nadelspitzen, Bleistift- und Reißfedereinsatz und Verlängerungsstange, wobei ebenfalls ein Halter zum Anstecken der Reißfeder zweckmäßig ist, indem er den Bestand der verfügbaren Handreißfedern auf drei erhöht; dann eines Greifzirkels (etwa 10 cm lang ohne Einsätze). Seltener braucht man den Nullzirkel. Wird noch eine feinere Reißfeder zugefügt, so ist weitgehenden Bedürfnissen Rechnung getragen. Punktierrädchen und dergleichen sind dem Anfänger mehr schädlich als nützlich, weil sie ziemlich grob arbeiten, leicht schmieren und eine gewisse Scheu großziehen, mit der Ziehfeder in der Hand zu punktieren, was bei Kurven ohnehin immer geschehen muß. — Empfehlenswerte Fabrikate sind die von Riefler und von Otto Richter.[1])

1) Das ist so gemeint, daß der Verfasser Reißzeuge dieser Firmen seit Jahren benutzt und damit sehr zufrieden ist; anderen, ihm unbekannten Fabrikaten, deren es gewiß viele geben wird, soll damit nicht zu nahe getreten werden.



6. Zu größeren Zeichnungen braucht man ein Reißbrett. Ist es nicht allzu groß, so läßt es sich auf eine halb ausgezogene Tischschublade aufsetzen und leicht geneigt hinlegen, was die große Annehmlichkeit bietet, daß man beim Zeichnen gerade sitzen kann und sich nicht allzu sehr über das Brett beugen muß. Zur Befestigung des Zeichenpapiers, das hart sein muß und die Tuschstriche nicht darf auslaufen lassen, dienen Reißstifte. Das nasse Aufziehen des Bogens hat den Nachteil, daß er nachher, beim Abschneiden, oft mit hörbarem Ruck zusammenschrumpft und sich merklich verzerrt; als Vorzug wird von vielen Zeichnern aber das glatte, straffe Aufliegen des Blattes und das Fehlen der Reißstifte empfunden, die beim Gebrauch der Reißschiene stören können; notwendig ist das Aufziehen nur, wenn man mit Tusche oder Aquarellfarben kolorieren will. Das Verfahren des Aufziehens besteht darin, daß man den Bogen mittels eines sauberen, nur zu diesem Zwecke dienenden Schwammes auf der Rückseite gleichmäßig mit kaltem Wasser befeuchtet bis auf den Rand, den Rand des Reißbrettes etwa 1—2 cm breit mit Gummi arabicum bestreicht und den Bogen auflegt. Beim Trocknen gehen alle Falten heraus. — Für kleinere Zeichnungen genügt ein Zeichenblock oder ein loses Blatt auf passender Unterlage; nur muß man dann auf die Reißschiene verzichten. Unbedingt erforderlich ist diese bei Zeichnungen der darstellenden Geometrie im engeren Sinne, d. h. beim Grund- oder Aufrißverfahren, das wir im nächsten Abschnitt werden kennen lernen. Um sich nicht auf die „rechten“ Winkel der Reißbrettecken und der Reißschiene verlassen zu müssen, empfiehlt es sich, die Reißschiene ausschließlich zum Zeichnen von „Horizontalen“ (quer vor dem Zeichner) zu verwenden, wobei der Stützarm der Schiene links am Brett liegt; das hat den Vorteil, daß die unbeschäftigte linke Hand in jedem Augenblick die Stütze fest andrücken kann, während die rechte ungestört zeichnet.

7. Notwendiger wie die Reißschiene sind zwei Winkellineale, d. h. zwei hölzerne rechtwinkelige Dreiecke, von denen eines, das leichtere, zweckmäßigerweise gleichschenkelig ist. Bei einem von ihnen, etwa dem leichteren, kleineren, muß man sich auf die Rechtwinkeligkeit verlassen können; zu diesem Zwecke wird es geprüft nach einem Verfahren, das aus der (absichtlich übertriebenen) Figur 230 wohl unmittelbar verständlich ist und das den etwa vorhandenen Fehler verdoppelt, also um so besser erkennen läßt.


Fig. 230.

Die zum Konstruieren dienenden Bleistifte sollen recht hart sein, sie geben dann schärfere Striche und bleiben länger spitz. Das Spitzen des Holzes erfolgt mit dem Messer, der Graphitstift selbst wird am bequemsten mit einer kleinen Feile geschärft, die man sich zu diesem Zwecke hält; sehr praktisch und für Zeichensäle empfehlenswert sind die Bleistift-Spitzmaschinen von Guhl und Harbeck in Hamburg.

8. Zum Ausziehen der Zeichnung sich chinesische Tusche erst anzureiben, ist wohl nicht nötig. Die käufliche flüssige Tusche genügt vernünftigen Ansprüchen, während die angeriebene oft beim Überfahren mit dem nassen Pinsel ausläuft. Sie ist allerdings außerordentlich leichtflüssig; dafür hat die flüssige Tusche des Handels den Vorzug größeren Glanzes.

Zum Ausradieren von Bleistiftstrichen darf nur ganz weiches Gummi benutzt werden, das das Papier nicht angreift. Tuschstriche werden mittels des schärferen Tuschgummis beseitigt. Gute harte Zeichenpapiere können in dieser Hinsicht viel vertragen, ohne an Ansehnlichkeit zu verlieren, auf schlechtem Papier laufen nach dem Radieren die Striche der Ziehfedern aus. Vorsichtshalber wird man über radierte Stellen immer erst dünne Striche führen, sie trocknen lassen und ihnen erst dann die gewünschte Dicke geben. Das Radiermesser ist im allgemeinen nicht zu empfehlen. Einem geübten Zeichner gelingt es freilich, von einem zu dick geratenen Striche das überflüssige mittels des Messers abzuspalten und zu beseitigen, besonders wenn die Tusche etwas gummihaltig ist und sich infolgedessen krustenartig abheben läßt. — Ist eine Linie, die punktiert werden sollte, versehentlich ausgezogen worden, so läßt man sie gut trocknen und kratzt mit einer harten Radiernadel (Zirkelspitze) in die Linie feine Lücken im Abstand der beabsichtigten Punkte und radiert mit weichem Gummi nach. Dabei ist es nicht etwa nötig, mit der Nadel selbst schon die Punkte zu gestalten, das angeritzte Papier wird durch das Gummi stärker angegriffen und es entsteht eine ganz gute Punktkette, wenn man die Lücken recht klein nimmt. Andernfalls muß die Linie lieber ganz beseitigt werden.

9. Nun noch einige Bemerkungen über den Gebrauch der Zeichengeräte. Die beiden Dreieckslineale dienen zum Ziehen von Parallelen und Loten.

I. Soll zu einer Geraden v durch einen Punkt F die Parallele u gezogen werden, so legt man eine Kathete k des (kleineren) Dreiecks II genau an die Gerade v an (in Fig. 231 mit II′ bezeichnet), während das schwerere Dreieck I mit seiner Hypotenuse

an der von II liegt; nun hält man I fest und schiebt II an I entlang, bis k durch F geht, und zieht längs k die Gerade u. Das ist die Parallele.

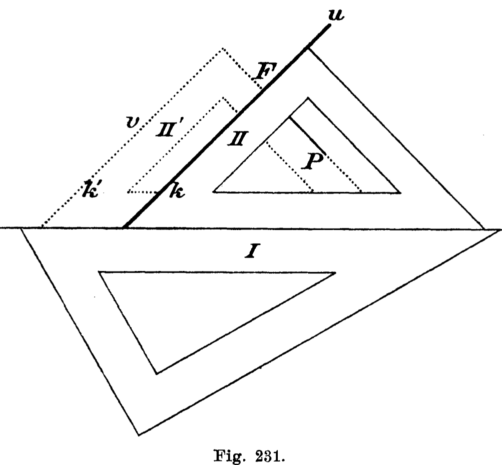


Fig. 231.

II. Um von einem Punkte P auf eine Gerade u das Lot zu fällen, legt man die eine Kathete von II an u an (Fig. 231), während die Hypotenuse von II fest an die von I gedrückt ist; nun schiebt man II längs I, bis die andere Kathete von II durch P geht; ihr entlang läuft dann das gesuchte Lot.

Mit zwei Linealen umzugehen, ist für den Anfang etwas unbequem; man muß sich aber daran gewöhnen, bei jeder Geraden, die man zieht, mit beiden Linealen vorzugehen — die dabei mit den Hypotenusen aneinander ruhen —, damit man jederzeit Parallelen und Lote zu diesen Geraden ohne weitere Vorbereitung ziehen kann. Damit das bei diesen Konstruktionen ruhende Lineal I sich nicht zu leicht verschiebt, ist es gut, II möglichst leicht zu wählen, und zwar möglichst gleichschenkelig, damit man gerade so lange Lote wie Parallelen ziehen kann.

Die Konstruktion des Lotes durch P gilt auch noch, wenn P auf der Geraden u liegt. Nicht zu empfehlen ist es in diesem Falle, die eine Kathete von II einfach an u zu legen, die andere durch P, und so das Lot ohne Verschiebung von II zu bestimmen; dieses Verfahren leidet an dem Nachteil, daß man beim Ausziehen mit der Reißfeder nicht bequem bei P herankommt. Außerdem sind die Ecken der Winkellineale durch den Gebrauch abgestumpft und ungenau.

10. Die erste Anlage einer Zeichnung erfolgt mit hartem, feingespitztem Bleistift in dünnen Strichen. Die Zirkelspitzen dürfen nicht zu tief eingestochen werden, das Ausweiten der Löcher ist zu vermeiden, weshalb man, so weit es geht, immer mit dem kleinsten, leichtesten Zirkel arbeitet. Ist diese Anlage fertig, so radiert man alles Unnötige mit weichem Gummi möglichst weg, die übrigen Linien werden so weit radiert, daß man sie eben noch sieht. Dann wird das Blatt sorgfältig gereinigt, wie denn die Reinlichkeit die wichtigste technische Vorbedingung für das Gelingen einer Zeichnung

ist; aus diesem Grunde ist es auch gut, besonders beim Ausziehen mit der Reißfeder, unter die Hand ein Löschblatt zu legen, das dann auch bei Unfällen sofort zur Hand ist. Unter einer warmen, feuchten Hand wölbt sich leicht das Papier und läßt die Tuschstriche auslaufen. Beim Ausziehen mit der Reißfeder kommen die dünnen Striche zuerst an die Reihe, weil die dicken leicht Ungenauigkeiten veranlassen, sie aber auch verdecken können. Überhaupt wird man mit den Linien, die sich am leichtesten anpassen lassen, am längsten warten. Kommen Versehen vor, so radiert man erst, wenn die Striche vollkommen trocken sind, weil dann das Papier am wenigsten angegriffen wird. Beim Füllen der Reißfeder muß die größte Reinlichkeit walten; das Tuschglas darf nie offen stehen. Enthält es nicht am Stöpsel ein Glasstäbchen zum Füllen der Feder, so tun kleine Streifchen aus Zeichenpapier denselben Dienst, bei jeder Füllung ein neues. Die Feder muß öfters gereinigt werden, besonders am Schluß der Arbeit. Beachtet man diese einfachen Regeln und ist die Reißfeder gut abgeschliffen, was ein Mechaniker zu besorgen hat, so wird das lästige Versagen der Feder kaum eintreten. Zieht man zum Füllen der Reißfeder eine Schreibfeder vor, so darf diese nicht in Tinte getaucht gewesen sein, weil sich sonst sofort Schmutz bildet.

Zwölfter Abschnitt.

Das Grund- und Aufrißverfahren.

§ 83. Erklärung des Verfahrens.

1. Die schräge Parallelprojektion ist zur unmittelbaren graphischen Festlegung räumlicher Objekte noch nicht einfach genug. Ganz von selbst haben sich uns in den vorangehenden Aufgaben zur primären Bestimmung eines Punktes P seine zwei Orthogonalprojektionen P' und P'' auf die xy-Ebene und auf die xz-Ebene aufgedrängt, während das Schrägbild erst sekundär aus diesen Angaben gewonnen wurde. Diese zwei Orthogonalprojektionen liefern unmittelbar die rechtwinkeligen Koordinaten von P, und wie bei rein metrischen Untersuchungen das Cartesische Koordinatensystem von allen das einfachste und ursprünglichste ist, so liegt die Orthogonalprojektion auf zwei Tafeln, der wir uns nun zuwenden, der ganzen darstellenden Geometrie zu grunde. Diese Darstellungsweise läßt sich durchaus elementar begründen. Dennoch bereitet sie dem Anfänger Schwierigkeiten, und zwar hauptsächlich wegen der Fülle von Einzelheiten und Kleinigkeiten, die man gründlich beherrschen muß, um mit Vorteil arbeiten zu können. Dieser Stofffülle wird man um so selbständiger gegenüberstehen, je schärfer man sich die allgemeinen Methoden klar macht, aus denen sie gewonnen wird. Diese sind: Bewegung des Objektes und Verlegung der Projektionstafeln, Umklappung der Geraden und Ebenen, sowie in regelmäßiger Verbindung damit die Affinität. Merkt man sich die Drehungen und Verschiebungen, die zur Lösung einer Aufgabe nötig sind, so kann man sich die Einzelheiten meistens selber ableiten. Dabei ist es gut, zunächst immer auf die allgemeinste Lösung auszugehen und sich hinterher erst zu fragen, welche spezielle Annahmen die Lösung am sparsamsten machen. Ferner ist es empfehlenswert, alle Figuren, auf die sich der Text stützt, von neuem zu zeichnen, weil die entstehende Figur sich besser einprägt und weniger verwirrt als die fertige mit ihren vielen Hilfslinien. Auch ist es notwendig,

weniger vorteilhafte Lagen der gegebenen Elemente anzunehmen, als die Demonstrationsfiguren aus didaktischen Gründen häufig enthalten; und vor allem muß man sich die Fundamentalaufgaben denkend, nicht mechanisch aneignen. Das Übrige tut reichliche Übung im praktischen Darstellen, womit das Studium ausführlicher Lehrbücher verknüpft werden kann.

Ausführliche Lehrbücher sind:

Rohn und Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 2 Bde.
Wiener, Chr., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 2 Bde.
Fiedler, W., Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3 Bde. (Vorkenntnisse aus der Geometrie der Lage erforderlich.)

Reich an Übungsmaterial aus allen Gebieten der Naturwissenschaften ist der Leitfaden der Projektionslehre von Müller und Preßler. Ein kleineres, aber gehaltvolles und durch sehr gute Figuren ausgezeichnetes Werk ist die darstellende Geometrie von M. Bernhard.

2. Die Orthogonalprojektion auf zwei Tafeln setzt zwei Bildebenen oder Tafeln Π_1 und Π_2 voraus, von denen die erste meist horizontal liegt und Grundrißebene genannt wird, während die zweite dazu senkrecht, also vertikal steht und den Aufriß enthält. Die Orthogonalprojektion auf eine Bildebene ist eine Parallelprojektion, deren Richtung auf dieser Ebene senkrecht ist. Den zwei Bildebenen Π_1 und Π_2 entsprechen also zwei Projektionsrichtungen, eine senkrecht zu Π_1 und daher parallel zu Π_2, eine senkrecht zu Π_2 und damit parallel zu Π_1. Festgelegt wird ein Punkt P durch Angabe seiner Orthogonalprojektionen P' und P'' auf Π_1 und Π_2 (Fig. 232a); das sind die Fußpunkte der Lote PP' und PP'', die von P auf die Tafeln Π_1 und Π_2 gefällt werden können. Aus diesen Projektionen, von denen

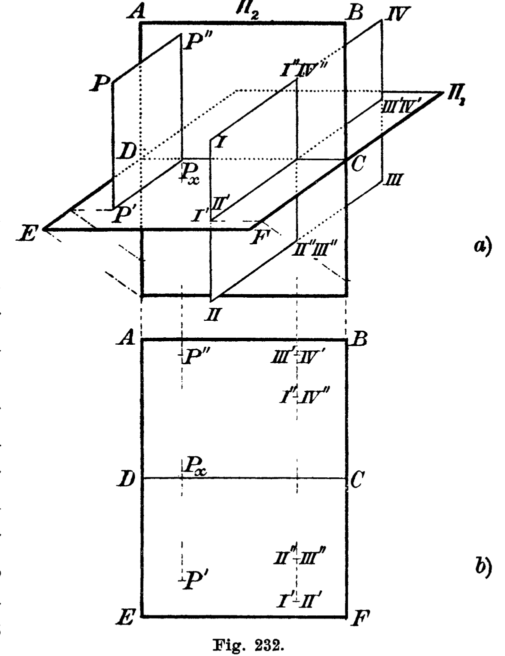


Fig. 232.

P' der Grundriß oder die erste Projektion, P'' der Aufriß oder die zweite Projektion von P heißt, findet man rückwärts wieder P

als Schnittpunkt des Lotes in P' auf Π_1 mit dem Lote in P'' auf Π_2. Daher heißt diese Darstellungsmethode auch Grund- und Aufrißverfahren.

Eine Gerade ist festgelegt durch Angabe der Grundrissse und Aufrisse von zwei ihrer Punkte; zur Fixierung einer Ebene muß man irgend drei ihrer Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, durch ihre Grundrisse und Aufrisse geben.

Betrachtet man Π_2 als xz-Ebene, Π_1 als xy-Ebene eines Koordinatensystems, so ersetzt P'' offenbar die Angabe der Koordinaten x und z, während P' die Koordinate y, sowie überflüssigerweise noch einmal x festlegt.

3. Das sind die Grundgedanken des Grund- und Aufrißverfahrens. Zu ihrer praktischen Ausführung sind noch einige Abänderungen und Vereinbarungen notwendig. Man will vor allem die ganze Konstruktion in einer einzigen Ebene vornehmen. Zu diesem Zwecke wird eine der beiden Ebenen um die gemeinsame Schnittlinie x von Π_1 und Π_2, die trennende Achse des Zweitafelsystems, auf die andere geklappt. Vorher muß bei jeder der beiden Ebenen willkürlich festgesetzt sein, welche ihrer beiden Seiten als Oberseite, die allein zum Zeichnen dient, gelten soll, und welche als Rückseite. Durch beide Ebenen wird der ganze Raum in vier Winkelräume oder Quadranten zerlegt, die folgendermaßen begrenzt sind:

I.	Quadrant:	Oberseite	von	Π_1	und	Oberseite	von	Π_2,
II.	„	Rückseite	„	Π_1	„	Oberseite	„	Π_2,
III.	„	Rückseite	„	Π_1	„	Rückseite	„	Π_2,
IV.	„	Oberseite	„	Π_1	„	Rückseite	„	Π_2.

Alle Urteile über vorn und hinten, oben und unten sind stets aufzufassen vom Standpunkte eines Beobachters im ersten Quadranten, der auf Π_1 steht und Π_2 anblickt.

Die Ausbreitung von Π_1 und Π_2 in eine einzige Ebene, die des Zeichenblattes oder Zeichenbrettes, erfolgt nun in der Weise, daß man entweder Π_2 festhält und die vordere Hälfte von Π_1 senkt, also die andere Hälfte hebt bis zum Zusammenfall beider Ebenen, oder indem man Π_1 festhält und die obere Hälfte von Π_2 nach hinten fallen, die untere also nach vorn steigen läßt. Das Ergebnis beider Verfahren ist dasselbe. Im allgemeinen sorgt man dafür, daß die darzustellenden Objekte in den ersten Quadranten zu liegen kommen, doch ist das Hinübergreifen in andere Quadranten nicht zu vermeiden. Dabei gilt zur Erhöhung der Deutlichkeit des Zeichnens die Regel, daß die beiden Zeichenebenen wie durchscheinende Flächen behandelt werden; dort, wo eine Ebene von der anderen überdeckt wird, zeichnet

man alle der ersten Ebene angehörigen Linien so, als schimmerten sie unter dem darüber gedachten Blatte durch.

Die Figur 232a zeigt die Projektionen eines Punktes P sowie von vier Punkten I, II, III, IV im Schrägbild, die auseinander durch Spiegelung an den beiden Tafeln hervorgehen; Figur 232b gibt das Endergebnis der Umklappung an. Ebenso ist in Figur 233a eine Gerade g dargestellt, und auf ihr drei Punkte A, B, C, die dem II., I. und IV. Quadranten angehören; Fig. 233b ist die Figur nach vollzogener Umklappung.

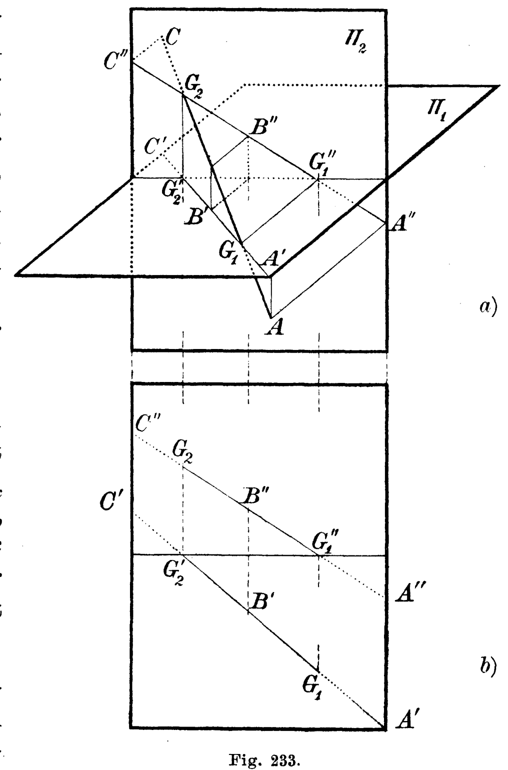


Fig. 233.

4. Die Normalebene durch P auf die Achse x trifft diese in einem Punkte P_x und enthält die Geraden $P''P_x$, $P'P_x$, die auf der Achse x senkrecht stehen und bei der Umklappung auf x senkrecht bleiben (Fig. 232a); daher:

Satz 1. Grund- und Aufriß eines Punktes liegen auf einem Lote zur x-Achse.

Umgekehrt können zwei Punkte P', P'' auf einem Lote zur x-Achse stets als Grundriß und Aufriß eines und nur eines Punktes P betrachtet werden,

den man als Schnittpunkt der Lote in P' und P'' auf Π_1 und Π_2 erhält, wenn man die Tafeln in ihre ursprüngliche Lage zurückdreht. Die Strecke $P''P_x$ (Fig. 232) ist gleich und parallel zu PP' und mißt daher den Abstand des Punktes P von der ersten Tafel, den sog. ersten Tafelabstand; ebenso ist $P'P_x \# PP''$ und mißt den zweiten Tafelabstand.

Satz 2. Der erste oder zweite Tafelabstand eines Punktes ist gleich dem Abstande seiner zweiten oder ersten Projektion von der Achse.

Die Lage in den verschiedenen Quadranten zeigt Figur 234; es liegt A im ersten, B im zweiten, C im dritten, D im vierten. Wieder ist, wie in Figur 232, angenommen, daß die entsprechenden Tafelabstände dieser Punkte absolut genommen gleich sind, nur liegen sie nicht in derselben Normalebene zu x, wie in Figur 232.

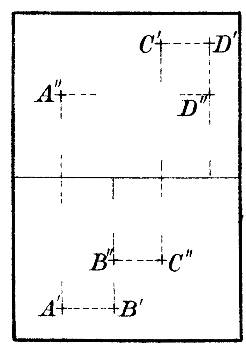


Fig. 234.

Satz 3. Die Punkte der Aufrißebene haben ihren Grundriß, die Punkte der Grundrißebene haben ihren Aufriß auf der trennenden Achse.

5. Diese Sätze reichen aus, um von einfachen Körpern den Grund- und Aufriß aufzunehmen. Besonders eignen sich dazu architektonische Gegenstände. Dabei gilt der Grundsatz, unsichtbare Linien entweder gar nicht oder nur punktiert wiederzugeben.

Satz 4. Hinsichtlich der Sichtbarkeit gilt die Regel, daß bei der Anlage des Grundrisses der Beschauer sich über der Ebene Π_1 und über dem Objekt befindet; der Aufriß wird von einem Beobachter von der Ebene Π_2 gesehen, der nach der Tafel Π_2 blickend den Gegenstand vor sich hat.

Dieser Grundsatz war schon bei den Schrägbildern stillschweigend benutzt worden (vergleiche Figur 223). Als Beispiele für das Grund- und Aufrißverfahren können etwa Figur 237 und 238 gelten.

Zur Erleichterung des Konstruierens können folgende Sätze dienen, die für jede Parallelprojektion gelten:

Satz 5. Strecken und ebene Figuren, die zu einer Tafel parallel sind, erscheinen in ihr in ihrer wirklichen Größe und Gestalt.

Satz 6. Strecken auf derselben oder auf parallelen Geraden erscheinen in der Orthogonalprojektion in demselben Verhältnisse wie in Wirklichkeit,

mit Ausnahme des Falles, daß sie auf der betreffenden Tafel senkrecht stehen, wobei alle Punkte der Strecke sich in den Spurpunkt projizieren.

Satz 7. Parallele Geraden haben in jeder Tafel, auf der sie nicht senkrecht stehen, parallele Projektionen.

Die Schnittgeraden e_1, e_2 einer Ebene η mit den Tafeln Π_1 und Π_2 heißen ihre Spuren, e_1 die erste, e_2 die zweite Spur.

Satz 8. Parallele Ebenen haben in jeder der Tafeln, zu der sie nicht parallel sind, parallele Spuren.

Wir werden noch darauf zurückkommen.

6. Während wir alle diese Sätze schon bei der schrägen Axonometrie kennen gelernt haben, ist Satz 9 für die Orthogonalprojektionen charakteristisch:

Satz 9. Wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels zu einer Tafel parallel, der andere zu ihr nicht gerade senkrecht ist, so ist die Orthogonalprojektion des rechten Winkels auf diese Tafel wieder ein rechter Winkel.

Zur Erleichterung des Beweises bemerken wir erst:

Satz 10a. Die Orthogonalprojektion eines Gegenstandes auf eine Tafel ändert sich weder in Lage noch Gestalt, wenn man den Gegenstand in der Richtung der Projektionsstrahlen parallel zu sich verschiebt; die Orthogonalprojektion auf die andere Tafel dagegen erleidet nur eine Verschiebung, keine Formänderung.

In § 78, 5. hatten wir diesen Satz so formuliert:

Satz 10b. Die Projektion eines Gegenstandes ändert sich nicht, wenn man die betreffende Projektionsebene parallel zu sich verschiebt,

was dann auch für Orthogonalprojektionen gilt.

Zu Satz 9 zurückkehrend dürfen wir den rechten Winkel parallel zu sich und in der Richtung der Projektionsstrahlen verschieben, bis der eine Schenkel a in der betreffenden Tafel liegt. Die den anderen Schenkel b projizierenden Strahlen liegen dann in einer zur Tafel senkrechten Ebene, die folglich auch auf a senkrecht ist und daher die Tafel in einer zu a senkrechten Geraden trifft; diese ist die Projektion von b.

Wegen Satz 7 läßt sich Satz 9 so verallgemeinern:

Satz 11. Wenn die eine von zwei sich rechtwinkelig schneidenden oder kreuzenden Geraden zu einer Tafel parallel ist, und die andere zu dieser Tafel nicht senkrecht steht, so sind auch die Orthogonalprojektionen der Geraden auf diese Tafel zueinander senkrecht.



Eine Normale einer Ebene η ist zu allen Geraden dieser Ebene senkrecht, also auch zu jeder Spur dieser Ebene. Daraus folgt:

Satz 12. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so steht der Grundriß der Geraden auf der ersten, der Aufriß auf der zweiten Spur der Ebene senkrecht,

vorausgesetzt natürlich, daß die Gerade nicht auf der betreffenden Tafel senkrecht steht oder die Ebene zu der Tafel parallel ist, wo der Satz dann nur für die andere Tafel gilt.

§ 84. **Bewegung parallel zu einer Tafel.**

1. Um die Darstellung des Punktes gründlich einzuüben, wollen wir die Gerade und Ebene zunächst nicht durch Spurpunkte oder Spurlinien festlegen, sondern allgemein durch Punkte, die auf ihnen liegen. Da ein Punkt durch seine beiden Orthogonalprojektionen stets eindeutig bestimmt ist, so wird auch eine Gerade durch die Projektion zweier ihrer Punkte, eine Ebene durch die Aufrisse und Grundrisse dreier ihrer Punkte, die nicht einer Geraden angehören, stets unzweideutig festgelegt. — Man wird nun mit dem Gedankenkreise und der Methode des Zweitafelsystems sehr rasch vertraut, wenn man einen leicht darstellbaren Körper, wie Würfel, Tetraeder, Pyramide, zuerst in möglichst bequemer Stellung zu den beiden Tafeln aufnimmt, darauf diesen Körper oder die Tafeln den verschiedenartigsten Bewegungen unterwirft und zusieht, wie sich Grund- und Aufriß dabei ändern. So sei denn unsere erste Aufgabe, einen auf Π_1 stehenden Würfel, von dem zwei Flächen parallel zu Π_2 sind, darzustellen. Die Eckpunkte der Grundfläche sind, da sie in der Bildebene Π_1 liegen, in diesen ihre eigenen Projektionen; sie mögen A', B', C', D' heißen. Auf

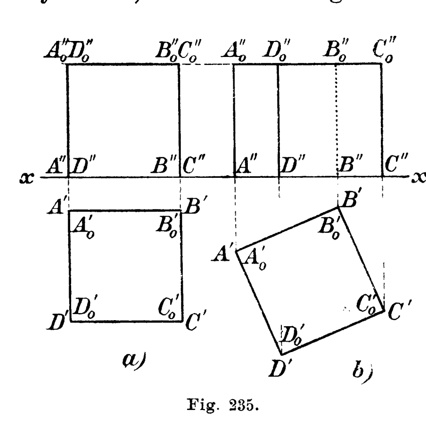


Fig. 235.

sie fallen die Grundrisse A_0', B_0', C_0', D_0' der oberen Grenzfläche A_0, B_0, C_0, D_0 des Würfels, wie in Figur 235a aus der Bezeichnung hervorgeht Die Aufrisse aller Punkte der Grundrißebene liegen (nach § 83, Satz 3) auf der trennenden Achse; daher fallen A'', B'', C'', D'' auf diese, und ist D'' mit A'' und C'' mit B''

identisch. Entsprechend verhalten sich die Aufrisse der vier oberen Ecken.

2. Verschiebung parallel zu einer Tafel. Die erste einfache Bewegung, die wir jetzt vornehmen wollen, soll in einer Verschiebung des Würfels auf seiner Unterlage Π_1 sein. Seine Grundfläche $A'B'C'D'$ möge aus der Lage Figur 235a in die Lage Figur 235b übergehen, wodurch natürlich der ganze Grundriß des Würfels in der neuen Lage gegeben ist. Allgemein läßt sich sagen:

Satz 1. Wenn man einen Körper parallel zu einer Tafel verschiebt, ändert seine Orthogonalprojektion auf diese Tafel höchstens die Lage in ihr, nicht aber die Gestalt.

Die Frage ist nun: Was geschieht mit dem Aufriß? Wenn ein Körper $\mathfrak{K}$ von irgend einer Lage $\mathfrak{K}_0$ aus sich auf alle erdenkliche Weisen so bewegt, daß die Abstände aller seiner Punkte von einer Tafel ihre Größe beibehalten, wenn er sich also parallel zu dieser Tafel bewegt, so bewegt sich jeder seiner Punkte P in einer zu dieser Tafel parallelen Ebene η. Lotet man also diesen Punkt in allen diesen Lagen immer auf die andere Projektionstafel Π, die zu jener senkrecht steht, so liegen alle diese Lote in der Ebene η, ihre Fußpunkte also in der Schnittlinie von η mit der Tafel Π, die zur trennenden Achse parallel ist. Es folgt:

Satz 2. Wenn man einen Körper parallel zu einer Tafel verschiebt, so beschreibt die Orthogonalprojektion jedes seiner Punkte auf die andere Tafel eine Parallele zur trennenden Achse.

Zu dem Grundriß in Figur 235b ist daher der Aufriß leicht zu finden. Es liegt nämlich z. B. der Punkt A_0'' der Figur 235b auf der Parallelen durch den Punkt A_0'' der Figur 235a zur trennenden Achse (Satz 2), und zugleich auf dem Lote von A_0'' auf diese Achse (§ 83, Satz 1). Damit ist dieses Beispiel erledigt.

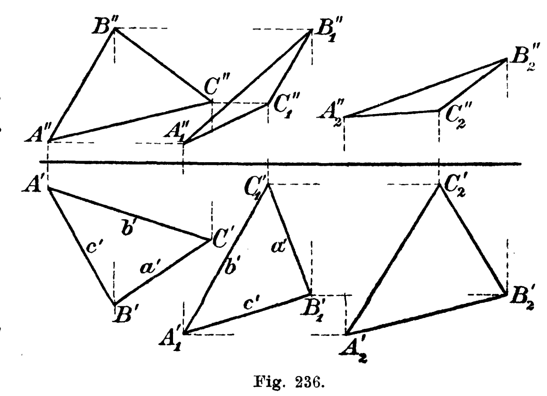


Fig. 236.

3. Die gewonnene Methode wenden wir sofort auf ein Dreieck ABC an, dessen Grund- und Aufriß wir uns, unter Berücksichtigung des Satzes 1 in § 83, willkürlich geben (Fig. 236). Das Dreieck werde parallel zu Π_1 so verschoben, daß sein Grundriß aus der

Lage $A'B'C'$ in die Lage $A_1'B_1'C_1'$ übergeht, wo $A_1'B_1'C_1' \simeq A'B'C'$. Man kann sich das etwa so denken, daß die Lote AA', BB', CC' auf der aus Karton ausgeschnittenen Bodenfläche $A'B'C'$ starr befestigt sind, so daß man diese aus der einen Lage in die andere auf Π_1 verschieben kann, wobei dann das Dreieck ABC selber mitgeht. Gesucht ist wieder der Aufriß. Für A_1'' hat man jetzt zwei Örter: erstens das Lot von A_1' auf die trennende Achse x (§ 83, Satz 1), zweitens die Parallele durch A'' zu dieser Achse (§ 84, Satz 2). So ist $A_1''B_1''C_1''$ bestimmt.

4. Dasselbe Dreieck soll auch einmal parallel zur zweiten Tafel verschoben werden und zwar von der Lage $A_1B_1C_1$ aus. Es sei etwa aus Karton ausgeschnitten, desgleichen das Dreieck $A_1''B_1''C_1''$, und es sollen Stützen von A_1, B_1, C_1 senkrecht auf $A_1''B_1''C_1''$ nach A_1'', B_1'', C_1'' gehen; wir verschieben dann $A_1''B_1''C_1''$ auf Π_2 in die Lage $A_2''B_2''C_2''$ (Fig. 236). Gesucht ist jetzt der Grundriß $A_2'B_2'C_2'$. Diesmal haben sich die Grundrisse auf Parallelen zu x bewegt (Satz 2), also liegt z. B. der Punkt A_2' auf der Parallele durch A_1' zu x und auf dem Lote aus A_2'' auf x. Ebenso findet man B_2', C_2'.

Ganz allgemein können wir demnach die Aufgabe lösen: Ein Körper, der durch Grund- und Aufriß gegeben ist, wird parallel zu einer Tafel so verschoben, daß seine Orthogonalprojektion auf dieselbe in eine neue, gegebene Lage übergeht; man soll dazu die Orthogonalprojektion auf die andere Tafel finden.

Ohne uns auf die Entstehung der Figur 237b aus 237a jetzt einzulassen, können wir z. B. den dort dargestellten Körper (einen

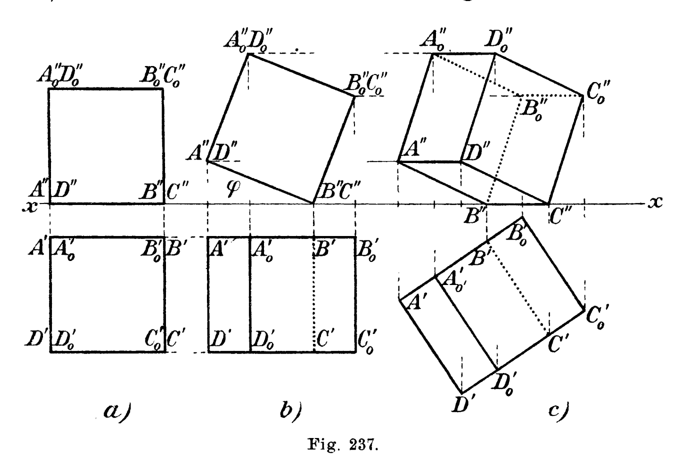


Fig. 237.

Würfel) parallel zu Π_1 so verschieben, daß der Grundriß aus der Lage b in die Lage c übergeht — beide Grundrisse sind also kon-

gruent — und nach dem Aufriß zu dem Grundriß c fragen. Es genügt, diesen für eine Ecke A_0'' entstehen zu lassen. Diese liegt auf der Parallelen zur Achse x durch den Punkt A_0'' der Lage b — nach Satz 2 — und auf dem Lote aus dem Punkte A_0' der Lage c auf die Achse x.

Ebenso ist in Figur 239, die wir später noch einmal vornehmen werden, ein Dreieck ABC durch Grundriß und Aufriß $A'B'C'$, $A''B''C''$ gegeben und parallel zur Tafel Π_1 verschoben, bis der Grundriß in die Lage $A_1'B_1'C_1'$ übergeht; man soll den Aufriß finden. Es liegt C_1'' auf dem Lote aus C_1' auf x und auf der Parallelen durch C'' zu x. Diese Beispiele zur Illustrierung des Verfahrens der Verschiebung parallel zu einer Tafel mögen genügen; weitere Anwendungen finden sich in vielen der folgenden Aufgaben.

5. Drehung um ein Tafellot. Ein wichtiger besonderer Fall der Parallelverschiebung eines Körpers zu einer Tafel ist seine Drehung um eine Gerade, die zu einer Tafel senkrecht steht, um ein Tafellot. In Figur 237a ist ein Würfel aufgenommen, der auf der Tafel Π_1 liegt und zwei Flächen parallel zu Π_2 hat. Dieser Würfel ist auf Π_1 und parallel zu Π_2 so verschoben worden, daß seine Kante $B'C'$ in die Lage $B'C'$ der Figur 237b gekommen ist, und nun hat man ihn um diese in Π_1 liegende, auf Π_2 senkrechte Kante $B'C'$ der Figur 237b gedreht, und zwar um einen Winkel φ.

Da der Körper bei dieser Verschiebung und auch bei der Drehung sich immer parallel zu Π_2 bewegt hat, so folgt aus Satz 1, daß sich sein Aufriß nur der Lage nach geändert haben kann, und diesen wollen wir zuerst ermitteln. Die Bodenfläche des Würfels geht durch die Gerade $B'C'$ der Figur 237b und bildet mit Π_1 den Winkel φ; da aber Π_2 zu Π_1 und der Bodenfläche senkrecht ist, so bilden auch die Schnittgeraden von Π_2 mit beiden Flächen miteinander diesen Winkel φ. Es ist also $A''B''$ (Fig. 237b) gegen x um den Winkel φ geneigt. Dadurch ist der Aufriß b festgelegt.

Vor der Drehung war der Grundriß in Figur 237b kongruent zu dem von Figur 237a an die Drehachse $B'C'$ der Figur 237b gelagert. Bei der Drehung nun beschreibt jeder Punkt des Würfels einen Kreis, dessen Ebene ε auf der Drehachse und daher auf Π_1 senkrecht sowie zu Π_2 parallel ist. Lotet man einen in Drehung befindlichen Punkt immer auf Π_1, so liegt dieses Lot immer in dieser Ebene ε, der Grundriß des Punktes beschreibt also eine Parallele zu x (Satz 2). Also liegt z. B. der Punkt A' der Figur 237b auf der Parallelen zu x durch den Punkt A' der Figur 237a, sowie auf dem Lot aus A'' auf die Achse x. Jetzt kann man den Grundriß in Figur 237b fertigstellen. Den Übergang von 237b in 237c haben wir schon in Nr. 4 besprochen.



6. Wenn sich ein Körper um ein Tafellot l dreht, so dreht sich seine Orthogonalprojektion ebenfalls um dieses Lot, wir können sie ja mit zu dem Körper rechnen und sie bleibt dann bei der Drehung in der Tafel, da diese auf l senkrecht steht. Durchläuft dabei e i n Punkt des Körpers den Drehwinkel φ, so beschreibt j e d e r Punkt des Körpers und der Orthogonalprojektion diesen Winkel; man sagt dann, der Körper und seine Projektion hätten diesen Winkel φ durchlaufen. Die Projektion insbesondere dreht sich um den Schnittpunkt von l mit der Tafel, also um den Spurpunkt von l.

Bei dieser Drehung verschiebt sich jeder Punkt des Körpers immer parallel zur Tafel; seine Projektion auf die andere Tafel ist daher nach Satz 2 zu beurteilen. Alles zusammenfassend läßt sich also über diese Drehung sagen:

Satz 3. Wenn sich ein Körper um ein Lot l zu einer Tafel dreht mit dem Drehwinkel φ, so dreht sich die Orthogonalprojektion des Körpers auf diese Tafel um den Spurpunkt des Lotes in ihr, und zwar ebenfalls um den Winkel φ. Die Orthogonalprojektion jedes Punktes des Körpers auf die andere Tafel bewegt sich dagegen auf einer Parallelen zur trennenden Achse.

Zur Anwendung dieses allgemeinen Satzes nehmen wir noch einmal den Würfel der Figur 237c vor. Wir geben uns eine in Π_1 auf Π_2 senkrechte Drehachse u (Fig. 238) und einen Drehwinkel ψ. Der Körper wird erst aus der Lage Figur 237c, die in Figur 238 als c wiederholt ist, parallel zu Π_2 und Π_1 verschoben, bis die Ecke C' auf u fällt, und dann um u durch den Winkel ψ gedreht. Dabei dreht sich der Aufriß, der bis dahin parallel zu dem von c gelegen war, um den Spurpunkt U_2 von u in der Tafel Π_2; in diesen Spurpunkt fällt auch C''. Der Aufriß des gedrehten Körpers ist also dem Aufrisse 238c kongruent, nur ist er um C'' um den Winkel ψ gedreht. Während der Parallelverschiebung des Körpers bewegten

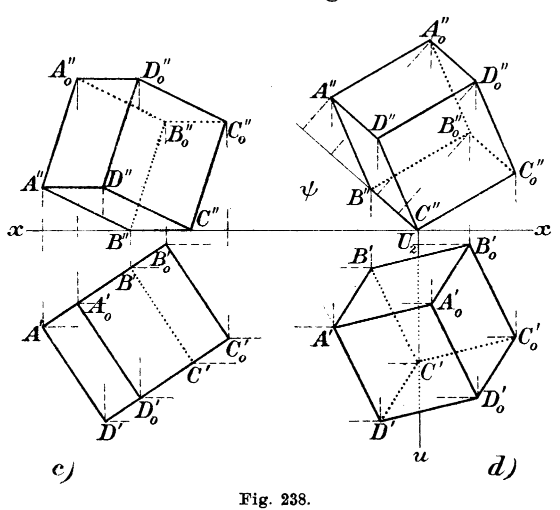


Fig. 238.

sich die Punkte des Grundrisses auf Parallelen zu x, während der Drehung ebenfalls, also auch während des ganzen Bewegungsvorganges. Daher liegt z. B. der Punkt A' in Figur 238d auf der Parallelen zur x-Achse durch den entsprechenden Punkt der Figur 238c und zugleich auf dem Lote aus A'' (Fig. 238d) auf x.

7. In Figur 239 gehen wir von einem Dreieck $A_0 B_0 C_0$ aus, dessen Ebene parallel zu Π_1 ist. Sein Grundriß $A_0' B_0' C_0'$ ist daher ein zu $A_0 B_0 C_0$ kongruentes Dreieck, sein Aufriß dagegen artet in drei Strecken einer Geraden aus: $A_0'' B_0'' C_0''$. In seiner Ebene, die also zu Π_2 senkrecht steht, ist eine Gerade u angenommen, die auf Π_2 senkrecht steht und diese Ebene in einem Punkte U_2 trifft. Um diese Gerade, deren Grundriß u' auf x senkrecht ist und durch U_2 geht, soll das Dreieck gedreht werden um einen gegebenen Winkel φ. Nach Satz 3 dreht sich dann einfach $A_0'' B_0'' C_0''$ um U_2 um diesen Drehwinkel. Die neue Lage $A'' B'' C''$ des Aufrisses kann daher unmittelbar angegeben werden. Die Punkte des Grundrisses bewegen sich nach Satz 3 auf Parallelen zu x, können also aus dem Aufriß abgeleitet werden (Satz 1, § 83).

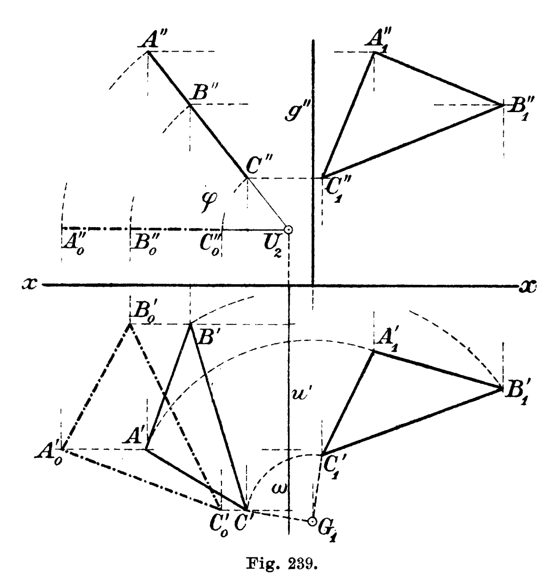


Fig. 239.

Jetzt nehmen wir eine neue Drehung vor, nämlich um eine Gerade g, die in G_1 auf Π_1 senkrecht steht. Der Drehwinkel ω sei gegeben. Dann erfährt einfach das Dreieck $A'B'C'$ eine Drehung um G_1 mit dem Drehwinkel ω. Die Endlage $A_1' B_1' C_1'$ des Grundrisses ist dadurch unmittelbar bestimmt. Die Punkte A_1'', B_1'', C_1'' im Aufrisse liegen dann auf den Parallelen zu x durch A'', B'', C'' (Satz 2) sowie aus den Loten aus A_1', B_1', C_1' auf x.

8. Länge und Tafelneigung einer Strecke. Eine nützliche Anwendung der Drehung um ein Tafellot machen wir auf eine Strecke AB, die durch die Grundrisse A', B' und die Aufrisse A'', B'' ihrer Endpunkte festgelegt ist (Fig. 240). Um nämlich die wahre Länge dieser Strecke zu finden, wird man die Strecke mitsamt der

sie auf Π_2 projizierenden Ebene $ABB''A''$ auf Π_2 verschieben, bis diese Ebene zu Π_1 parallel ist: der Grundriß der verschobenen Strecke, die nun zu Π_1 parallel liegt, ist dann ihrer Länge gleich. Diese Verschiebung kann etwa als Drehung um AA'' ausgeführt werden. AA'' ist ein Lot auf Π_2 in der Ebene $ABB''A''$; es kann aber auch jedes andere in dieser Ebene enthaltene zweite Tafellot verwandt werden. Bei der Drehung um AA'' dreht sich der Aufriß der Strecke um A'', bis er parallel zur trennenden Achse x wird: siehe $A''B_0''$ in Figur 240. Hingegen bewegt sich B' auf einer Parallelen zu x.

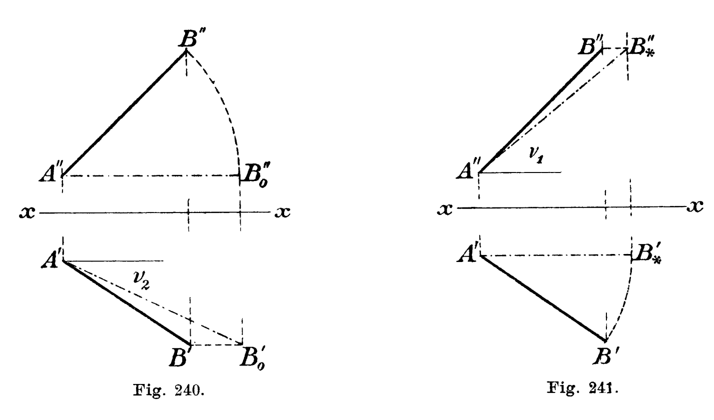


Fig. 240. Fig. 241.

9. In Figur 241 ist dieselbe Aufgabe durch Drehung um das erste Tafellot AA' gelöst: Man macht $A'B_*' \parallel x$ und $= A'B'$, legt durch B'' die Parallele, durch B_*' das Lot zur Achse x und verbindet den Schnittpunkt B_*'' beider Geraden mit A''. Dann ist $A''B_*''$ die wahre Länge von AB.

Unter dem Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene η versteht man den kleinsten Winkel, von dem ein Schenkel die Gerade ist, während der andere in der Ebene liegt. Dieser Neigungswinkel ist in der Normalebene zu η enthalten, die durch die Gerade geht. Die erste und die zweite Tafelneigung ν_1, ν_2 der Geraden AB, d. h. ihre Neigungen gegen die Ebenen Π_1, Π_2, werden daher gemessen in den Ebenen $ABB'A'$ und $ABB''A''$, die als erste und zweite projizierende Ebene der Geraden AB bezeichnet werden, weil sie die erste und zweite Projektion bestimmen. Es ist ν_1 gleich der Neigung von AB gegen $A'B'$, ν_2 gleich der von AB gegen $A''B''$. In Figur 241 ist $ABB'A'$ nach der Drehung zu Π_2 parallel, also ν_1 der Winkel zwischen $A''B_*''$ und der Achse x. Ebenso ist in Figur 240 der Winkel ν_2 gleich dem zwischen $A'B_0'$ und der Achse x.

10. Es lohnt sich der Mühe, einmal die beiden Konstruktionen der Figuren 240 und 241 in einer Figur zu vereinigen,

Figur 242, für deren Verständnis die Bemerkung entscheidend ist, daß $A''B_*'' = A'B_0'$ ist (als wahre Länge von AB). Man ersieht daraus sofort, daß durch ν_1, ν_2 und A', A'' die Projektionen h' und h'' der Geraden AB bestimmt sind, während natürlich B beliebig bleibt. Das ist aber die Lösung der Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt A', A'' eine Gerade mit den Tafelneigungen ν_1, ν_2 zu legen. Zur Lösung dieser Aufgabe zieht man durch A' und A'' die Parallelen zu x, trägt an der ersten in A' den Winkel ν_2, an der zweiten in A'' den Winkel ν_1 an, wobei diese Winkel verschiedene Lagen annehmen können, und trägt auf ihren gegen x geneigten Schenkeln vom Scheitel aus dieselbe Strecke $A'B_0' = A''B_*''$ ab, deren Länge beliebig ist. Das Lot aus B_*'' auf x bestimmt auf der Parallelen durch A' zu x den Punkt B_*'. Dann legt man um A' als Mittelpunkt den Kreis, der durch B_*' geht. Er wird von der Parallelen durch B_0' zu x in dem Punkte B' getroffen (der auch die Lage C' haben kann), und das Lot aus B' auf x trifft die durch B_*'' parallel zu x verlaufende Gerade in einem Punkte B'', derart, daß $A'B'$ oder h' und $A''B''$ oder h'' die beiden Risse der gesuchten Geraden sind; eine zweite Lösung k', k'' liegt symmetrisch zu $A'A''$.

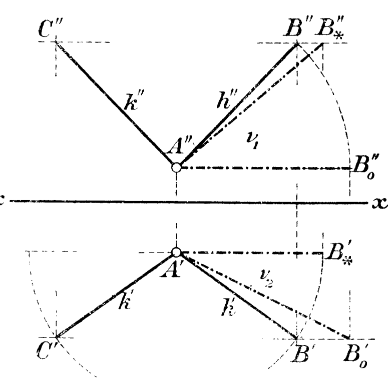


Fig. 242.

11. An die Figuren 240 und 241 knüpft sich noch die Lösung einer anderen Fundamentalaufgabe: Aus einem Punkte P', P'' auf die Gerade $A'B'$, $A''B''$ das Lot zu fällen. Man denkt sich die Punkte P, P', A, A', B, B' starr miteinander verbunden und dieses System um AA' gedreht, bis $A'B'$ in der Endlage $A'B_0'$ zu x parallel wird (Fig. 243). Hierbei beschreiben alle gedrehten Punkte denselben Winkel ω, der etwa durch den Bogen $\omega = \text{arc}\, B'B_0'$ gemessen wird. Diesen Winkel beschreibt auch P', so daß also seine Endlage P_0', wie aus Figur 243 zu ersehen ist, sich konstruieren läßt.

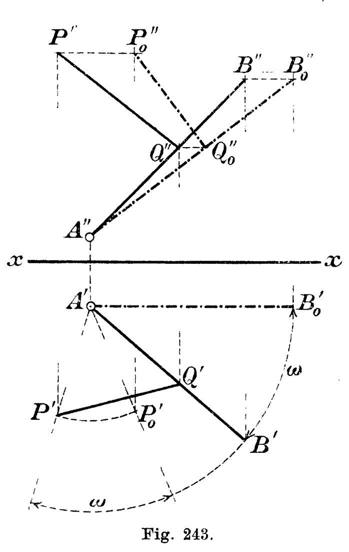


Fig. 243.

Die Punkte des Aufrisses beschreiben bei der Drehung Parallelen zu x, wodurch zunächst P_0'' auf dem Lote aus P_0' auf x bestimmt ist.

Nach dieser Drehung ist die den Rissen $A'B_0' \| x$, $A''B_0''$ entsprechende Gerade AB_0 zu Π_2 parallel, der Aufriß des mitgedrehten Lotes durch P_0'' steht daher nach Satz 11, § 83 auf $A''B_0''$ senkrecht und kann konstruiert werden: $P_0''Q_0'' \perp A''B_0''$, wo Q_0'' der Fußpunkt. Macht man jetzt die Drehung rückgängig, so daß P_0'' wieder auf P'' fällt, so bewegt sich Q_0'' parallel zu x, bis der Punkt auf $A''B''$ in die Anfangslage Q'' zurückkehrt, die wir gerade gesucht haben. Bestimmt man noch Q' als Schnittpunkt von $A'B'$ mit dem Lote aus Q'' auf x, so ist $P'Q'$, $P''Q''$ das gesuchte Lot.

§ 85. **Punkt, Gerade und Ebene.**

1. Um fertig gegebene ebenflächige Körper im Grund- und Aufrißverfahren darzustellen, reicht die vorausgegangene Betrachtung im wesentlichen aus; wenn es jedoch gilt, an diesen Gebilden geometrische Konstruktionen vorzunehmen oder sie durch solche zu erzeugen, dann müssen wir auf die Verknüpfung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen ausführlicher eingehen.

Zur Festlegung der Geraden und der Ebene haben wir bisher ein beliebiges in ihr gelegenes Punktepaar bezw. Dreieck benutzt. Dieses Verfahren hat den Vorzug der Allgemeinheit und der ausnahmslosen Gültigkeit; daneben wollen wir auch die speziellen Bestimmungsstücke, die Spuren, in Gebrauch nehmen, die unter Umständen mancherlei Vorteile bieten.

Satz 1. Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Projektionen auf den gleichnamigen Projektionen der Geraden liegen.

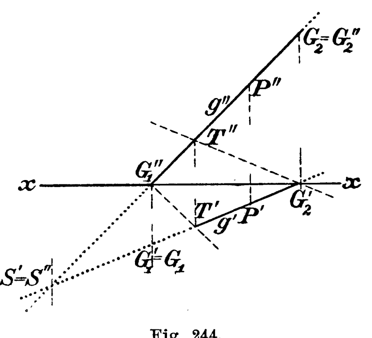


Fig. 244.

Ist also die Gerade g in Grundriß g' und Aufriß g'' gegeben, so bestimmt der Aufriß P'' jedes Punktes P der Geraden seinen Grundriß P' und umgekehrt der Grundriß den Aufriß (siehe Fig. 244).

Unter den Punkten der Geraden haben diejenigen ausgezeichnete Lage zu den zwei Tafeln, die der ersten oder der zweiten Tafel angehören, also der erste und der zweite Spurpunkt. Nach § 83, Satz 3 muß der Aufriß G_1'' des ersten Spurpunktes G_1 auf der trennenden Achse liegen, also in ihrem Schnittpunkte mit g'', der Grundriß G_2' des

zweiten Spurpunktes ebenso in ihrem Schnittpunkte mit g', wie wir schon in Figur 233 gesehen haben.

Wenn die Projektionen g', g'' von g nicht zueinander parallel sind, so gehört auch ihr Schnittpunkt zu den ausgezeichneten Punkten der Geraden (Fig. 244), denn er stellt einen Punkt S der Geraden dar, dessen Grundriß S' mit seinem Aufriß S'' zusammenfällt; dieser Punkt hat also von beiden Tafeln gleichen Abstand (§ 83, Satz 2), und liegt daher in einer der Ebenen, die die Winkel zwischen den Tafeln Π_1, Π_2 halbieren. Die eine Winkelhalbierende, die erste, geht durch den ersten und dritten Quadranten, die andere, die zweite, durch den zweiten und vierten. Werden aber die Tafeln Π_1, Π_2 in der üblichen Weise ausgebreitet, so liegen Grund- und Aufriß jedes Punktes der ersten Winkelhalbierenden zur trennenden Achse symmetrisch, während sie für jeden Punkt der zweiten Winkelhalbierenden zusammenfallen, und diese Eigenschaft kommt nur den genannten Punkten zu. Der Punkt S', S'' ist demnach der Schnittpunkt von g mit der zweiten Winkelhalbierenden. Der Schnittpunkt T von g mit der ersten Winkelhalbierenden, der übrigens kaum jemals verwendet wird, hat seine beiden Projektionen T', T'' zu x symmetrisch; wenn man also g'' und g' an x spiegelt, so ist T' der Schnittpunkt von g' mit dem Spiegelbilde von g'', T'' der Schnittpunkt von g'' mit dem Spiegelbilde von g'.

2. Sind zwei Geraden h und k durch ihre Projektionen h', h'' und k', k'' gegeben, so wird die Frage, ob sie sich schneiden, einfach entschieden, indem man den Schnittpunkt S' von h', k' sowie den Schnittpunkt S'' von h'', k'' bestimmt. Liegen S', S'' auf demselben Lote zur Achse x, so sind es die Projektionen des Schnittpunktes (Fig. 245); wenn nicht, so sind die Geraden windschief.

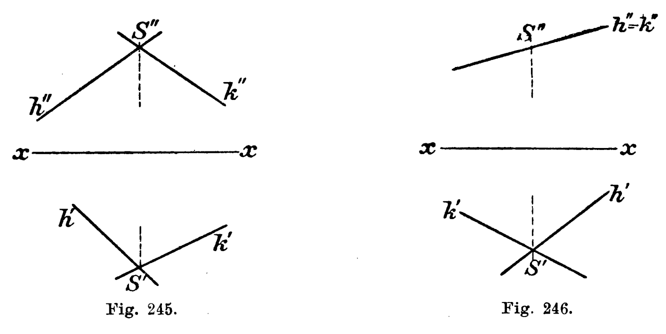


Fig. 245. Fig. 246.

Dieses Kriterium kann nur versagen, wenn die Punkte S', S'' nicht existieren. Das könnte nur eintreten, 1. wenn h' und k' oder

h'' und k'' parallel werden, wo wir jedoch vom projektiven Standpunkte aus den Geraden je einen unendlich fernen Schnittpunkt zuschreiben; liegt also S' im Unendlichen, so muß, damit der Fall des Schneidens eintritt, auch S'' im Unendlichen liegen, und dieses Kriterium reicht aus; 2. wenn h' mit k' oder h'' mit k'' zusammenfällt. Tritt zwischen einem Paare dieser Geraden Koinzidenz ein, so liegen h und k in derselben projizierenden Ebene, die durch jene zusammenliegenden Projektionen geht. Die Geraden schneiden sich dann immer, und falls die beiden anderen Projektionen sich in einem Punkte treffen, so ist dieser, wie im allgemeinen Falle, eine Projektion des Schnittpunktes (Fig. 246).

Es bleibt sonach noch der Fall übrig, daß h' mit k', h'' mit k'' zusammenfällt (Fig. 247); sollen dabei die Geraden h, k dennoch voneinander verschieden sein, so dürfen die durch h' und h'' gehenden beiden projizierenden Ebenen sich nicht schneiden, noch parallel sein, müssen also zusammenfallen. Dann liegen also h und k in einer Normalebene zur trennenden Achse x, und es steht die Gerade, auf der h', h'', k', k'' liegen, auf x senkrecht. In diesem Falle sind h und k durch diese Projektionen allein überhaupt nicht bestimmt, es müssen entweder noch die Spurpunkte, oder ganz allgemein zwei Punkte A, B von h und C, D von k gegeben sein (Fig. 247).

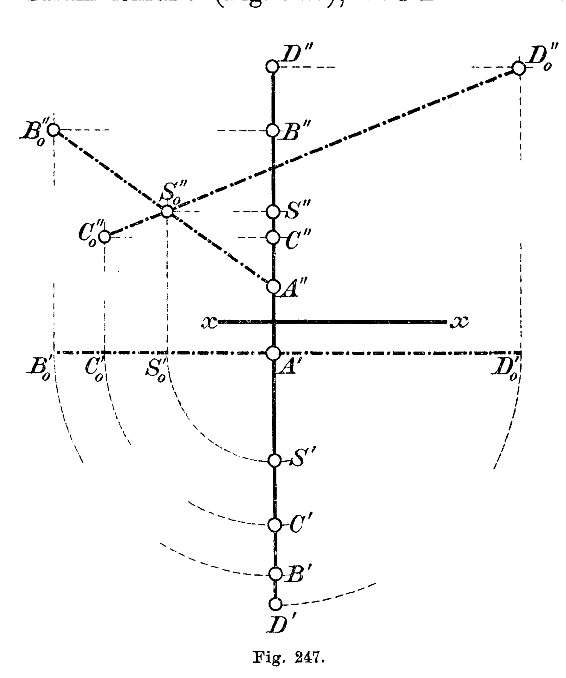


Fig. 247.

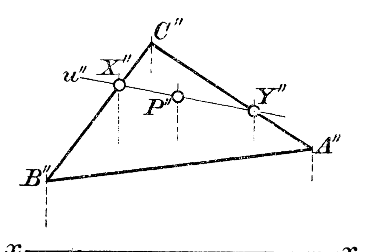
Alsdann dreht man die gemeinsame erste oder zweite projizierende Ebene dieser Strecken um ein in ihr liegendes Tafellot. In der Figur 247 ist die erste projizierende Ebene um AA' gedreht, und zwar gleich um 90^0, obwohl das an sich nicht notwendig wäre. In der neuen Lage A_0B_0 und C_0D_0 beider Geraden wird der Schnittpunkt S_0 bestimmt, und wenn darauf die Drehung rückgängig gemacht wird, geht S_0 in den gesuchten Punkt S über.

3. Eine Ebene η legt man graphisch unter anderm fest durch die

beiden Projektionen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ eines Bestimmungsdreiecks, d. h. eines in η gelegenen eigentlichen Dreiecks, dessen Ecken nicht einer Geraden angehören; wohl aber dürfen zwei Ecken im Unendlichen liegen.

Satz 2. Sind auch die Projektionen eines Bestimmungsdreiecks eigentliche Dreiecke, so läßt sich von jeder Geraden der Dreiecksebene η die eine Projektion aus der anderen ableiten.

Denn es muß z. B. der Grundriß u' der Geraden mindestens zwei Seiten des Dreiecks in voneinander verschiedenen Punkten X', Y' treffen (Fig. 248), und wenn man zu diesen Punkten die Aufrisse X'', Y'' auf den entsprechenden Seiten von $A''B''C''$ bestimmt, so muß u'' durch die voneinander verschiedenen Punkte X'', Y'' gehen, die daher u'' festlegen. Umgekehrt bestimmen die Punkte X'', Y'', wenn u'' zuerst gegeben ist, die Punkte X', Y' und damit u'. Liegt X' auf einer Seite des Dreiecks $A'B'C'$ unendlich fern, so muß natürlich auch X'' auf der entsprechenden Seite von $A''B''C''$ unendlich fern liegen.



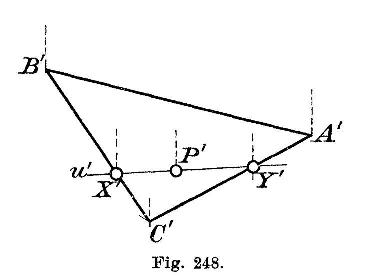


Fig. 248.

Wenn eine der Projektionen des Bestimmungsdreiecks in ein uneigentliches Dreieck ausartet, gilt der Satz 2 nicht mehr in vollem Umfange, wenn alle beide ausarten, überhaupt nicht mehr.

4. Satz 3. Sind die Projektionen eines eigentlichen Bestimmungsdreiecks einer Ebene eigentliche Dreiecke, so bestimmt von den Projektionen jedes Punktes der Ebene immer eine die andere.

Denn man braucht z. B. durch den Grundriß P' dieses Punktes nur eine Gerade u' zu legen (Fig. 248), die den Grundriß des Bestimmungsdreiecks in zwei verschiedenen Punkten X', Y' trifft, und zu X', Y' auf den entsprechenden Seiten im Aufriß die Aufrisse X'', Y'' zu bestimmen, so muß P'' auf $X''Y''$ liegen.

Jetzt können wir die Aufgabe lösen, den Schnittpunkt einer gegebenen Geraden g mit der Ebene eines Dreiecks ABC zu bestimmen.

Es seien $A'B'C'$ und $A''B''C''$ eigentliche Dreiecke (Fig. 249). Wir betrachten die eine projizierende Ebene von g, etwa die erste ε_1.

Sie enthält unendlich viel Geraden, und alle haben g' zur ersten Projektion. Unter diesen Geraden ist auch die Schnittgerade u von ε_1 mit der Dreiecksebene, und der Schnittpunkt von u mit g ist zugleich der Schnittpunkt S von g mit der Dreiecksebene, den wir suchen.

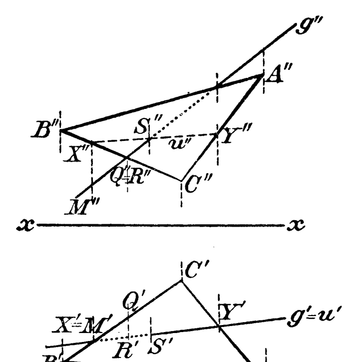


Fig. 249.

Zu u', das mit g' identisch ist, läßt sich u'' nach Satz 2 bestimmen; der Schnittpunkt von u'' mit g'' sei S''. Bestimmt man zu S'' den Grundriß S' auf g', so stellt S', S'' den gesuchten Punkt S dar. Der Fall, daß auch u'' mit g'' zusammenfällt, also S'' unbestimmt wird, kann bei eigentlichen Bestimmungsdreiecken $A'B'C'$, $A''B''C''$ nur eintreten, wenn g mit u identisch ist, also in der Ebene des Dreiecks liegt.

In den beiseite gelassenen Ausnahmefällen ist die Lösung so leicht, daß wir dabei nicht zu verweilen brauchen.

5. Dagegen sollen noch die Sichtbarkeitsverhältnisse in Figur 249 unter der Voraussetzung aufgeklärt werden, daß das Dreieck ABC aus dünnem, nur schwach durchsichtigen Karton ausgeschnitten ist (vgl. § 83, 3. und 5.). Im Grundriß wird für den über der Vorderseite von Π_1 in erheblicher Ferne sich befindenden Zuschauer das Dreieck immer einen Teil der Geraden g von dem Punkte S' an zu bedecken scheinen. Um zu entscheiden, welcher Teil bedeckt wird, gehen wir im Grundriß an die Stelle, wo g' die Seite $B'C'$ trifft (Fig. 249). Dieser Punkt werde, als Grundriß eines Punktes von g, mit M' bezeichnet, als Grundriß eines Punktes von BC mit X'. Im Aufriß zeigt sich dann bei unserer Anlage der Figur, daß X höher über Π_1 liegt als M, da X einen größeren ersten Tafelabstand als M aufweist. Der Zuschauer über Π_1 wird also X näher sehen als M, die Gerade g wird also bei $X' = M'$ scheinbar unter das Dreieck treten, und die Stelle $M'S'$ wird vom Dreieck bedeckt erscheinen. Da g bei S das Dreieck durchdringt, so muß von S' bis Y' und weiter die Gerade über das Dreieck treten. Damit ist der Grundriß erledigt.

Zur Beurteilung des Aufrisses muß man sich nach § 83 vor der Tafel im Unendlichen oder wenigstens in erheblicher Entfernung aufstellen. Es fragt sich dann, ob an der Stelle $Q'' = R''$ des Aufrisses, wo g'' die Gerade $B''C''$ trifft, die Gerade hinter das Dreieck tritt oder davor. Bezeichnet Q'' diese Stelle als Aufriß eines Punktes von BC, und R'' als Aufriß eines Punktes von g, so zeigt der

Grundriß, daß R' größeren ersten Tafelabstand hat als Q'. Der Punkt R der Geraden wird also den Punkt Q des Dreiecks verdecken, die Gerade liegt dort vor dem Dreieck und ist demnach auszuziehen bis nach S'', wo sie auf die andere Seite des Dreiecks übergeht und von ihm verdeckt wird. Dieses Beispiel zeigt das Verfahren, das bei Sichtbarkeitsfragen im allgemeinen immer zum Ziele führt.

6. Von den Geraden einer Ebene sind unter anderen diejenigen im Zweitafelsystem ausgezeichnet, die zur ersten oder zweiten Tafel parallel laufen, die ersten oder zweiten Tafelparallelen oder Hauptlinien. Durch jeden Punkt einer Ebene geht immer nur je eine Hauptlinie der beiden Arten, es müßte denn sein, daß sie zu einer Tafel parallel ist, wo sie dann unendlich viel zu ihr parallele Geraden enthält.

Satz 4. Eine erste Hauptlinie hat die zweite, eine zweite Hauptlinie hat die erste Projektion zur trennenden Achse parallel.

Nimmt man den zur Achse parallelen Riß einer Hauptlinie willkürlich an, so kann der andere nach 3. sofort konstruiert werden. Zu den Hauptlinien einer Ebene gehören ihre beiden Spurlinien, die Schnittgeraden der Ebene mit der Tafel, die dadurch ausgezeichnet sind, daß immer eine Projektion derselben auf der Achse x liegt. Auf den Spurlinien müssen natürlich die gleichnamigen Spurpunkte aller Geraden der Ebene liegen, und wenn eine Ebene durch ein Bestimmungsdreieck gegeben ist, so findet man die Spurlinien als Ort der Spurpunkte der Dreiecksseiten. Die Spurlinien treffen sich auf der Achse x, oder sie sind parallel.

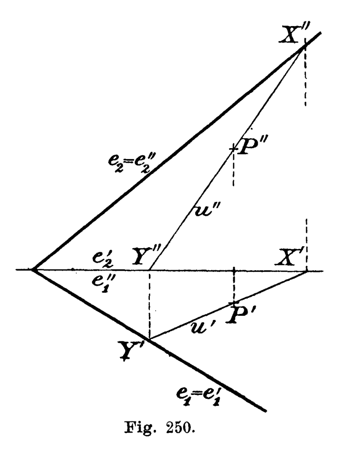


Fig. 250.

Ist eine Ebene η durch ihre Spurlinien e_1, e_2 gegeben, und außerdem von einer Geraden u dieser Ebene der Grundriß u', so geht die allgemeine Konstruktion des Aufrisses u'' von u, die aus Figur 248 zu ersehen ist, in die der Figur 250 über, wo die Geraden e_1 und e_2 die Rolle der Geraden CA und CB der Figur 248 übernehmen. Gleichzeitig zeigt diese Figur, wie man zum Grundriß eines Punktes P der Ebene den Aufriß findet und umgekehrt.

Läßt man in Figur 250 den Punkt X auf e_2 oder Y auf e_1 ins

Unendliche rücken, so geht u in eine erste Hauptlinie h_1 bezw. in eine zweite über, und die Konstruktion von P'' aus P' oder von P' aus P'' nimmt die einfachen, viel gebrauchten Formen Figur 251a

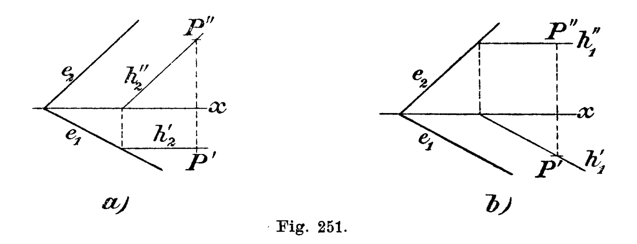


Fig. 251.

und 251b an. Alle diese Konstruktionen sind mittels eines Schrägbildes leicht direkt abzuleiten, wodurch sie sehr anschaulich werden.

7. Ihre wichtigste Anwendung finden die Hauptlinien bei Aufgaben über Parallelismus und Orthogonalität.

Satz 5. Parallele Ebenen haben parallele Hauptlinien (und Spuren, vgl. § 83, Satz 8), denn sie werden von jeder Ebene in parallelen Geraden geschnitten, also auch von den zu einer Tafel parallelen Ebenen.

Die Aufgabe, zu einer gegebenen Ebene φ durch einen gegebenen Punkt $\mathfrak{C}$ die Parallelebene zu legen, läßt sich ganz allgemein so lösen: Die Ebene φ sei durch die Risse der Ecken eines Bestimmungsdreiecks ABC gegeben (Fig. 252); für unseren Zweck genügen die Risse a', a'' und b', b'' der zwei Seiten a und b. Zieht man einfach durch $\mathfrak{C}''$ die Geraden $\mathfrak{a}''\|a''$, $\mathfrak{b}''\|b''$, durch $\mathfrak{C}'$ entsprechend $\mathfrak{a}'\|a'$, $\mathfrak{b}'\|b'$, so sind $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ die Projektionen zweier Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, die zu φ parallel sind, durch $\mathfrak{C}$ gehen und folglich die Parallelebene η zu φ festlegen. Man kann noch zur Erhöhung der Anschaulichkeit auf $\mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{b}''$ die Punkte $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$ so annehmen, daß $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''\|A''B''$ wird, und dazu auf $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ die Grundrisse $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ bestimmen. Es ist dann auch $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\|A'B'$. Das

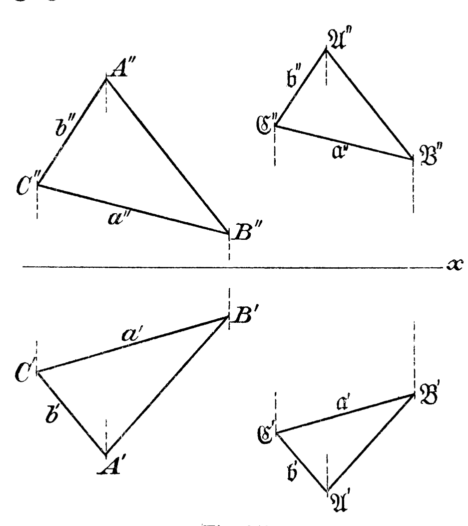


Fig. 252.

Bestimmungsdreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ von η ist daher dem Dreieck ABC ähnlich und zu ihm ähnlich gelegen.

Ein Spezialfall dieser Lösung ist die folgende, die φ durch die zwei Spuren f_1, f_2 gegeben sein läßt (Fig. 253). Das sind wieder zwei Geraden a, b, nur in sehr spezieller Lage: $f_1' = f_1$, $f_1'' = x$; $f_2' = x$, $f_2'' = f_2$, und wie in Figur 252 zieht man durch $\mathfrak{C}'$ die Parallelen zu den ersten Rissen f_1, x, durch $\mathfrak{C}''$ die Parallelen zu den Aufrissen x, f_2 dieser Geraden. Dadurch ist η festgelegt. Diese Parallelen sind Hauptlinien. Man erhält also die Spurlinien von η durch Kombination der Figuren 251, d. h. indem man durch die Spurpunkte jener Hauptlinien zu f_1 und f_2 die Parallelen e_1, e_2 zieht.

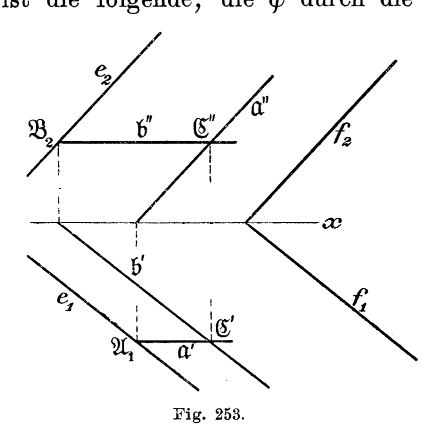


Fig. 253.

8. Wichtiger sind die Hauptlinien zur Lösung der Aufgabe: Aus einem Punkte P auf eine Ebene η das Lot zu fällen (Fig. 254). Dieses wird zu jeder Geraden dieser Ebene senkrecht sein, folglich auch zu ihren Hauptlinien. Nach § 83, Satz 9 und 11 steht daher die erste Projektion des Lotes auf der jeder ersten, die zweite Projektion auf der jeder zweiten Hauptlinie senkrecht.

Zur Ersparung von zwei Loten legen wir den Aufriß h'' einer ersten Hauptlinie h parallel zur Achse x durch A'', den Grundriß k' einer zweiten Hauptlinie k durch A' parallel zu x, bestimmen zum Schnittpunkt H'' von h'' mit $B''C''$ den Grundriß H' auf $B'C'$, ebenso zum Schnittpunkt K' von k' mit $B'C'$ den Aufriß K'' auf $B''C''$. Die Lote aus P' und P'' auf $A'K'$, $A''H''$ sind dann die Risse des gesuchten Lotes, dessen Schnittpunkt (S) mit der Dreiecksebene nach Figur 249 ermittelt wird.

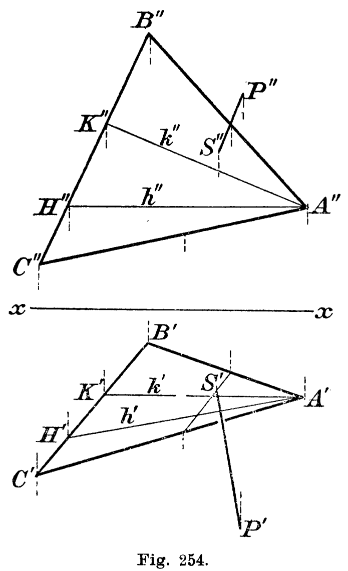


Fig. 254.

Sehr einfach muß diese Konstruktion natürlich werden, wenn die Richtung der Hauptlinien unmittelbar gegeben ist, z. B. durch die Spurlinien e_1, e_2 der Ebene. Die Projektionen l', l'' des Lotes sind dann einfach die aus P' auf e_1 und aus P'' auf e_2 gefällten Senkrechten (Fig. 255). Der Schnittpunkt S von l mit der Ebene η wird genau wie im allgemeinen Falle gefunden: Man betrachtet l' als Grundriß u' einer in η gelegenen Geraden und konstruiert zu den Schnittpunkten X', Y' von u' mit $e_1' = e_1$ und der Achse $x = e_2'$ die Aufrisse X'', Y'' auf $x = e_1''$ und $e_2 = e_2''$. Dann ist $X''Y''$ der Aufriß u'' von u, der l'' im Aufrisse S'' des Punktes S trifft. Es empfiehlt sich, die auf die Spurlinien gegründeten Projektionen auch einmal unmittelbar aus der Anschauung mittels eines Schrägbildes herzuleiten.

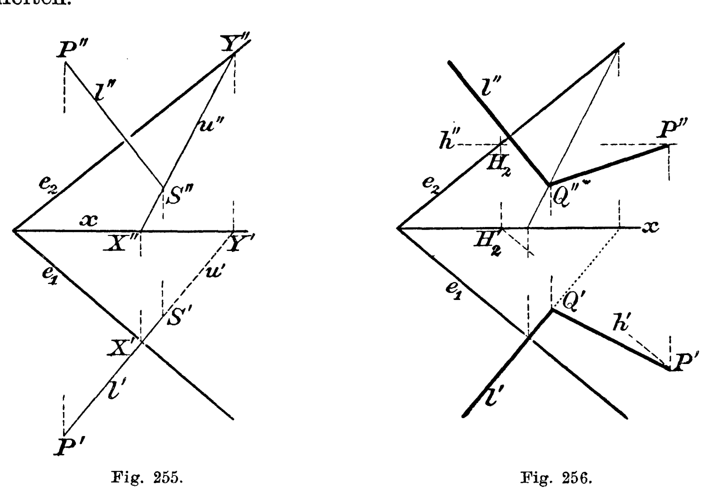


Fig. 255. Fig. 256.

9. Verbindet man Figur 255 mit Figur 253b (oder a), so erhält man eine Lösung der schon in § 84, 11. behandelten Aufgabe, aus einem gegebenen Punkte P auf eine gegebene Gerade l das Lot zu fällen. Zuerst wird man nämlich durch P die Normalebene auf l fällen, deren Spuren e_1, e_2 auf l' bezw. l'' senkrecht stehen müssen (Fig. 256). Von dieser Ebene kennt man die durch P gehenden beiden Hauptlinien; es genügt, etwa die erste h zu konstruieren: $h' \perp l'$ durch P'. Diese Gerade trifft die Achse x im Grundrisse H_2' des zweiten Spurpunktes H_2 von h; der erste liegt also auf dem Lote in H_2 zur Achse x und auf der Parallelen durch P'' zu x. Das Lot durch H_2 auf l'' ist dann die zweite Spur e_2 der Normalebene; durch den Schnittpunkt von e_2 mit x legt man $e_1 \perp l'$. Damit ist die Normalebene bestimmt. Ihr Schnittpunkt Q mit der Geraden l wird wie S in Figur 255 gefunden.

10. Die Schnittgerade zweier Ebenen ist bekannt, wenn man zwei ihrer Punkte angeben kann. Um also eine Ebene α mit einer Ebene β zum Schnitt zu bringen, wird man entweder zwei Geraden der einen Ebene mit der anderen Ebene zum Schnitt bringen, oder, falls gewisse Schnittpunkte unzugänglich werden, die Schnittgeraden von α und β mit einer oder zwei Hilfsebenen bestimmen und ihre Schnittpunkte konstruieren. Neue Methoden treten bei dieser Aufgabe nicht auf. Sind die Ebenen α und β durch ihre Spurlinien a_1, a_2 und b_1, b_2 gegeben, so ist der Schnittpunkt S_1 von a_1 und b_1 der erste, der Schnittpunkt S_2 von a_2 und b_2 der zweite Spurpunkt der Schnittgeraden.

In Figur 257 ist der besonders ungünstige Fall erledigt, daß diese Punkte S_1, S_2 unzugänglich sind. Man nimmt dann eine erste Hilfsebene parallel zur ersten Tafel an die also α und β in zwei Hauptlinien h, k schneidet. Ihre Aufrisse h'', k'' liegen auf der zweiten Spurlinie dieser Hilfsebene, die parallel zur trennenden Achse x verläuft und beliebig angenommen werden kann; nach Figur 251 werden dazu die Grundrisse h', k' konstruiert. Diese treffen sich in einem Punkte L', dem Grundriß des Schnittpunktes L von h und k. Sein Aufriß L'' liegt auf $h'' = k''$. — Ganz ebenso legen wir eine zweite Hilfsebene parallel zur zweiten Tafel an. Sie schneidet α und β in zwei zweiten Hauptlinien u, v, deren Grundrisse u', v' auf eine zu x parallele Gerade fallen. Diese können wir willkürlich annehmen. Die Aufrisse u'', v'' findet man dazu nach Figur 251. Ihr Schnittpunkt sei W''. Bestimmt man dazu den Grundriß W' auf $u' = v'$, so sind W', W'' die Projektionen des Schnittpunktes W von u und v, der den Ebenen α und β angehört. Durch L und W ist dann die Schnittgerade von α und β graphisch bestimmt.

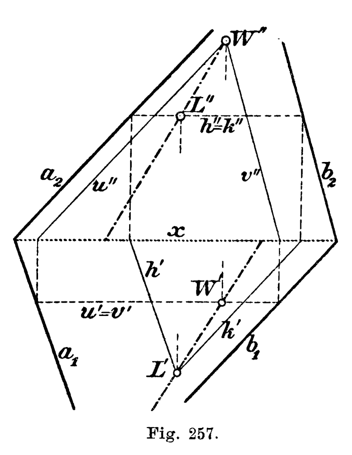


Fig. 257.

§ 86. Drehung und Tafelverschiebung.

1. Zum Gedankenkreise des § 84 zurückkehrend wollen wir jetzt etwas schwierigere Bewegungen untersuchen, und zwar zuerst die Drehung projizierender Ebenen um eine Spur. Diese Drehung gilt im allgemeinen den Gebilden, die in einer solchen Ebene liegen. Häufig ist es aber auch wünschenswert, einen beliebigen, mit einer

projizierenden Ebene starr verbundenen Körper an dieser Drehung teilnehmen zu lassen, wobei man sich diesen Körper auf diese Ebene senkrecht projiziert denkt. Das läuft daraus hinaus, daß man die Ebene als neue Zeichentafel betrachtet. Ganz allgemein handelt es sich also darum, eine Zeichentafel auf der anderen zu verschieben und zunächst einmal zuzusehen, wie sich dabei die Projektionen des Körpers verhalten. Die Drehung des Körpers soll dann unser nächstes Problem sein.

2. Verschiebung einer Tafel senkrecht zur anderen. Ein Würfel mit aufgesetzter Pyramide, der auf Π_1 ruht, sei in Π_1 und Π_2 dargestellt (Fig. 258). Die trennende Achse sei jetzt ausführlicher mit x_{12} bezeichnet. Wir halten nun Π_1 fest und verschieben Π_2, immer auf Π_1 senkrecht, in eine neue Lage Π_3, deren erste Spur x_{13} wir uns willkürlich vorschreiben können. Es sollen die Projektionen des Körpers in Bezug auf die Tafeln Π_1 und Π_3 dargestellt werden. Man kann die Sachlage auch einfach so auffassen, daß an Stelle von Π_2 eine neue, ebenfalls auf Π_1 senkrechte Projektionsebene Π_3 eingeführt werden soll, deren trennende Achse x_{13} sei. In Bezug auf die Tafeln Π_1, Π_3 soll dann der Körper dargestellt werden.

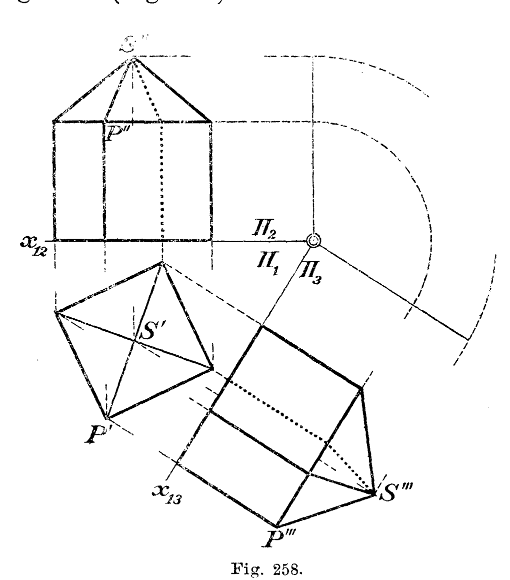


Fig. 258.

Bei der Verschiebung einer Tafel läßt man die andere nicht veränderte Tafel stets ihre Oberseite beibehalten. Dann ist zur Bestimmung der neuen Quadranteneinteilung des Raumes nur noch zu vereinbaren, welche Seite von Π_3 als Vorderseite gelten soll. Das sei geschehen. In der Figur macht man das ersichtlich, indem die Halbebene von Π_1 die dem ersten Quadranten des Systems Π_1, Π_3 angehört, in der Nähe von x_{13} die Marke Π_1 erhält. Nimmt man auf dieser Halbebene von Π_1 Stellung, so wird die obere Halbebene von Π_3 nach hinten umgelegt, fällt also auf die andere Halbebene von Π_1, die Marke Π_3 erhält, (Fig. 258). Diese mit Π_3 markierte Halbebene von Π_1 wendet uns also die Vorderseite von Π_3 zu, soweit diese dem ersten Quadranten des neuen Zweitafelsystems angehört.

Der Vollständigkeit halber ist in Figur 258 auch zu beiden Seiten von x_{12} durch die Beischriften Π_1, Π_2 angegeben worden, welche der beiden Halbebenen zu beiden Seiten von x_{12} die vordere Oberfläche von Π_1 oder die obere Vorderfläche von Π_2 darstellt.

3. Nach diesen Festsetzungen macht die Darstellung des Würfels nun keine Schwierigkeiten mehr. Die erste Projektion bleibt natürlich dieselbe, da der Würfel seine Lage zur ersten Tafel nicht geändert hat. Fassen wir irgend eine Würfelecke P ins Auge, so wird also ihre dritte Projektion P''' auf der durch P' auf x_{13} gefällten Senkrechten liegen. Da der erste Tafelabstand des Punktes P geblieben ist, der nach § 83, Satz 2 durch den Abstand des Punktes P'' von der Achse x_{12} gemessen wird, so muß auch P''' von x_{13} diesen Abstand haben, wodurch P''' auf der soeben gezogenen Senkrechten festgelegt ist, sobald wir wissen, nach welcher Seite von x_{13} der erste Tafelabstand abzutragen ist. Da gilt die einfache Regel, daß die dritte Projektion eines Punktes mit seiner ersten Projektion auf derselben Seite von x_{13} liegt oder nicht, je nachdem die zweite Projektion und die erste auf derselben Seite von x_{12} liegen oder nicht, denn diese Regel sichert uns nach den Ausführungen in § 83, 1. die Lage von P im richtigen Quadranten. Nach dieser Regel ist in Figur 258 der Würfel dargestellt. Denkt man sich umgekehrt die erste und dritte Projektion des Würfels als zuerst gegeben, so zeigt dieselbe Figur, wie man rückwärts die zweite Projektion erhält.

4. Drehung um eine Hauptlinie. In § 84 haben wir gesehen, wie sich die Drehung eines Körpers um ein zweites Tafellot graphisch ausnimmt. Die zweiten Tafellote gehören zu den ersten Hauptlinien, d. h. zu den Geraden, die mit der ersten Tafel parallel verlaufen. Jetzt wollen wir einen Körper, etwa einen Würfel, um eine beliebige erste Hauptlinie s, die nicht zugleich zu Π_2 senkrecht ist, drehen, und zwar sei der Drehwinkel ω sowie der Drehsinn vorgeschrieben. Von der Hauptlinie s seien die erste Projektion s' und der zweite Spurpunkt S_2 gegeben. Diese Aufgabe führt man auf den schon erledigten Fall zurück, indem man eine neue, zu s' senkrechte Ebene Π_3 an Stelle von Π_2 als Projektionsebene einführt, in dem Systeme Π_1, Π_3, in dem jetzt s ein drittes Tafellot ist, die Drehung ausführt und aus dem ersten und dritten Riß des gedrehten Körpers nach Nr. 3 den zweiten Riß rekonstruiert.

In Figur 258 ist x_{13} als beliebiges Lot auf s' angenommen. Den Gang der Konstruktion verfolgt man am besten an einem Punkte P, der mit dem Würfel starr verbunden an der Drehung teilnimmt. Aus P' und P'' findet man P''', indem man aus P' auf x_{13}



das Lot $P'P_{13}$ fällt und auf diesem den ersten Tafelabstand $P_{12}P''$ des Punktes P von P_{13} aus abträgt: $P_{13}P''' = P_{12}P''$; da P'' von P' durch x_{12} getrennt ist, so muß auch P''' von P' durch x_{13} getrennt angenommen werden, wodurch die Richtung bestimmt ist, in der die Strecke abzutragen ist. Die Drehachse s steht auf Π_3 senkrecht und trifft diese Ebene in einem dritten Spurpunkte S_3, der denselben ersten Tafelabstand S_3S_3' hat wie der zweite Spurpunkt S_2, also $S_3S_3' = S_2S_2'$. Zur Konstruktion von S_3 bestimmt man daher den Schnittpunkt S_3' von s' mit x_{13} und trägt auf s' die Strecke $S_3'S_3 = S_2'S_2$ ab, und zwar im vorliegenden Beispiele nach der mit Π_3 bezeichneten Seite von x_{13}, da S_2 auf der mit Π_2 bezeichneten Seite von x_{12} liegt. Bei der Drehung des Körpers und des Punktes P um s, deren Drehsinn auf der Vorderfläche von Π_3 etwa entgegengesetzt der Bewegung des Uhrzeigers sein soll, drehen sich alle Punkte um s und ihre dritten Projektionen um S_3, und zwar mit dem vorgeschriebenen Drehwinkel ω (§ 84, Satz 3). Macht man also $P_0'''S_3P''' = \omega$ und liegt S_3P_0''' links von S_3P''', so ist P_0''' die dritte Projektion des gedrehten Punktes P_0; die erste Projektion P_0' liegt nach § 84, Satz 3 auf der durch P' zu x_{13} gezogenen Parallele sowie auf dem Lote aus P_0''' auf x_{13}. Nachdem hiermit die Aufgabe im Systeme Π_1, Π_3 gelöst ist, gilt es nur noch, aus P_0', P_0''' den Aufriß P_0'' des Punktes P_0 im ursprünglichen Systeme Π_1, Π_2 zu finden. Zu diesem Zwecke fällt man $P_0'P_{12}^0 \perp x_{12}$ und trägt auf dieser Geraden $P_{12}^0P_0'' = P_0'''P_{13}^0$ in der Richtung ab, daß P_0'' von P_0' durch x_{12} getrennt wird oder nicht, je nachdem P_0''' von P_0' durch x_{13} getrennt wird oder nicht.

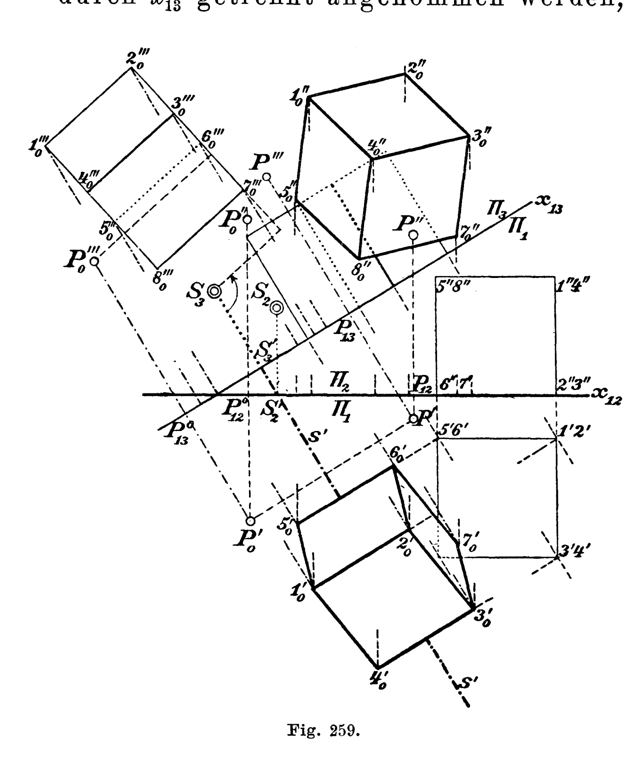


Fig. 259.

In dieser Weise verfährt man mit allen Eckpunkten des Würfels. Um eine Überladung der Figur mit Buchstaben zu vermeiden, sind die Ecken des Würfels in der dritten Projektion vor der Drehung ohne Benennung geblieben. Zur Einübung des Verfahrens tut man gut, alle acht Ecken des Würfels auf diesem Wege zu konstruieren. Praktisch würde ja die Konstruktion dreier von einer Ecke ausgehender Kanten ausreichen; die übrigen ergeben sich daraus durch Konstruktion von Parallelogrammen.

6. Aufgaben mit einer Hilfstafel. Die Einführung einer projizierenden Ebene als Hilfstafel wird sich überall da bewähren, wo eine Aufgabe bei spezieller Lage zu den Tafeln leicht lösbar ist und die Ebene der Hilfstafel mit dem darzustellenden geometrischen Gebilde in ausgezeichneter Weise verknüpft ist. Soll z. B. aus einem Punkte A auf eine durch ihre Spuren e_1, e_2 gegebene Ebene η das Lot gefällt und seine wahre Länge bestimmt werden (Fig. 260), so spielt sich die stereometrische Konstruktion des Lotes ganz in der durch A gehenden Ebene Π_3 ab, die auf e_1 senkrecht steht. Diese steht dann auf Π_1 und auf η senkrecht und schneidet η in einer Geraden u, auf die man von A aus das Lot zu fällen hat; dieses liegt also in Π_3. Diese Ebene werden wir daher als Hilfstafel Π_3 statt Π_2 einführen; ihre erste Spur x_{13} ist das Lot $A'F$ aus A' auf e_1; ihre zweite Spur x_{23} steht auf der trennenden Achse x_{12} von Π_1 und Π_2 senkrecht, und zwar wie immer in dem Punkte X, in dem x_{12} von der ersten Spur x_{13} getroffen wird. Klappt man nun Π_3 um x_{13} in die Tafel Π_1, so wird die mit Π_3 starr verbunden gedachte Gerade x_{23} in eine neue Lage $x_{23}''' \perp x_{13}$ kommen. Der Schnittpunkt S von x_{23} mit e_2, der in der Tafel Π_2 liegt, fällt dann als S''' auf x_{23}''', und zwar wird $XS''' = XS$. Daher ist $S'''F$ die dritte Projektion von u. Mit anderen Worten: Die Ebene Π_3 schneidet die Ebenen Π_1, Π_2 und η in den drei Seiten eines Dreiecks FXS, das wir um FX in die Tafel Π_1 umgelegt haben. In Π_3 liegt nun auch A, und zwar steht AA' auf der Drehachse XF senkrecht. Also erhält AA' durch die Umklappung die Lage $A'''A' \perp x_{13}$, wo $A'''A'$ gleich dem Abstande des Punktes A'' von x_{12} ist. Alles das hatten wir schon an Figur 258 kennen gelernt. Fällt man jetzt $A'''B''' \perp S'''F$,

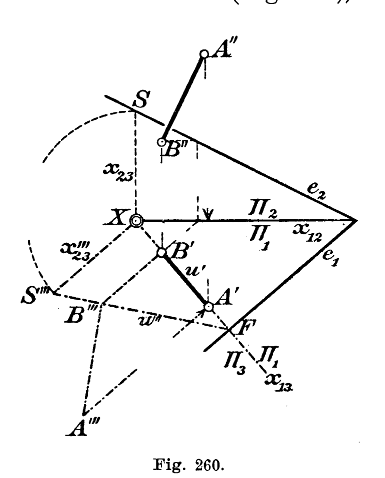


Fig. 260.

so ist $A'''B'''$ die Umlegung des Lotes und zugleich die Länge dieses Lotes in ihrer wirklichen Größe. Wir fällen nun $B'''B' \perp x_{13}$. Dann ist B' der Grundriß des Fußpunktes von BA, und der Aufriß B'' von B kann nun nach Figur 251b gefunden werden, indem man die Gerade $B'''B'$ als Grundriß einer ersten Hauptlinie durch B auffaßt, in dem Schnittpunkte von $B'''B'$ mit x_{12} auf x_{12} das Lot errichtet und durch seinen Schnittpunkt mit e_2 zu x_{12} die Parallele legt. Auf dieser muß B'' liegen. Im Falle des Versagens oder zur Kontrolle kann man auch aus F auf x_{12} das Lot fällen und seinen Fußpunkt mit S verbinden. Diese Gerade, der Aufriß u'' von u, ist ein zweiter Ort für B'' (vergl. Fig. 250).

7. In Figur 260 ist $S'''FX$ der Winkel, den die Ebene η mit Π_1 bildet, die sogenannte erste Tafelneigung der Ebene η. Für die Konstruktion der beiden Neigungswinkel einer Ebene η ergibt sich daraus folgendes Verfahren (Fig. 261). Von einem

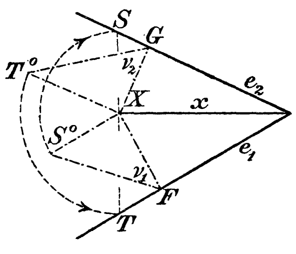


Fig. 261.

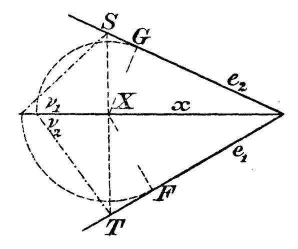


Fig. 262.

Punkte X der trennenden Achse x fällt man auf die Spuren e_1 und e_2 von η die Lote XF und XG und errichtet ferner in X auf x das Lot, das e_1, e_2 in T, S trifft. Macht man nun $S^0X \perp XF$ und $= XS$, sowie $T^0X \perp XG$ und $= XT$, so sind $\nu_1 = S^0FX$ und $\nu_2 = T^0GX$ die gesuchten Winkel.

Durch Drehung der Dreiecke S^0XF und T^0XG um X im Sinne der in der Figur angesetzten Pfeile entsteht die Figur 262, die auch offenbar unabhängig von Figur 261 ausführbar ist und somit eine zweite Lösung unserer Aufgabe darstellt.

8. Geometrisch ist mit dieser Aufgabe die folgende verwandt: Durch eine gegebene Gerade g eine Ebene von gegebener erster Tafelneigung ω zu legen (Fig. 263). Der Methode nach gehört die Aufgabe zu denen des § 84, ihre Lösung beruht auf der Drehung um ein Tafellot. Um nämlich überhaupt einmal eine Ebene von der gegebenen Tafelneigung in die Figur zu bringen, denken wir uns durch einen Punkt A von g eine Normalebene ν von Π_2 gelegt, die mit Π_1 den Winkel ω bildet. Die erste Spur n_1 von ν steht auf

der trennenden Achse x_{12} senkrecht und trifft sie in einem Punkte N, durch den die zweite Spur n_2 geht, die mit x_{12} den Winkel ω einschließt; nimmt man umgekehrt n_1 und n_2 mit diesen Eigenschaften an, so hat auch ν die richtige Tafelneigung, und wenn man zum Schnittpunkte A'' von g'' mit n_2 auf g' den Grundriß A' konstruiert, so geht ν auch durch den Punkt A von g. Von dieser einen richtig geneigten Ebene durch A gelangt man zu allen, indem man ν mit AA' starr verbunden denkt und um dieses erste Tafellot rotieren läßt. Dabei behält die Ebene ν immer ihre erste Tafelneigung ω bei, und ihre erste Spur dreht sich um A', umhüllt also den Kreis $\varkappa$ mit dem Mittelpunkte A', der n_1 berührt. Die ersten Spuren aller Ebenen durch A von gegebener erster Tafelneigung umhüllen demnach diesen Kreis.

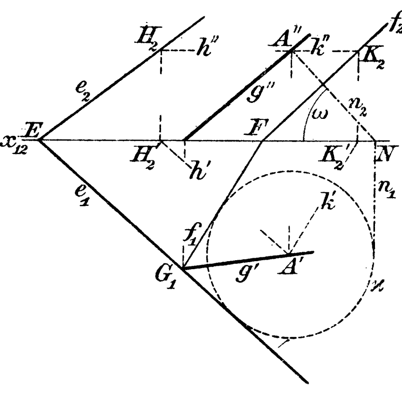


Fig. 263.

Die gesuchte Ebene η nun soll nicht nur durch A gehen, sondern durch g selber, was sicher der Fall ist, wenn sie durch noch einen Punkt von g geht. Als solchen wählt man etwa den ersten Spurpunkt G_1 von g. Durch diesen muß dann auch die erste Spur von η gehen (§ 85, 6.) und ist somit als Tangente aus G_1 an den Kreis in zwei mögliche Lagen e_1 und f_1 bestimmt. Es gibt daher zwei Ebenen η und φ von der verlangten Art. Um die zweite Spurlinie e_2 von η zu finden, legt man durch A' die Gerade $h' \| e_1$ und faßt sie als Grundriß einer ersten Hauptlinie durch A in η auf; ihr Aufriß h'' ist durch A'' parallel zu x_{12} zu ziehen. Auf ihm liegt der zweite Spurpunkt H_2. Durch diesen muß e_2 gehen und die erste Spur in ihrem Schnittpunkte E mit x_{12} treffen. Ebenso zieht man durch A' die Gerade $k' \| f_1$, bringt sie in K_2' mit x_{12} zum Schnitt, errichtet in K_2' auf x_{12} das Lot und ermittelt seinen Schnittpunkt K_2 mit der durch A'' zu x_{12} gezogenen Parallele $k'' = h''$. Dann ist FK_2 die zweite Spur f_2 von φ. Damit ist die Aufgabe gelöst.

9. Aufgaben mit Drehung um eine Hauptlinie. Ein Dreieck ABC ist durch seine Projektionen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gegeben; man soll seine wirkliche Gestalt ermitteln. Wäre das Dreieck zur zweiten Tafel parallel, so wäre es kongruent zu $A''B''C''$. Um diese Tatsache zu verwerten, dreht man das Dreieck um eine in seiner Ebene liegende zweite Hauptlinie h, deren Grundriß

$h' \parallel x$ beliebig angenommen werden kann, zur Ersparung eines Lotes etwa als Parallele zur trennenden Achse x durch eine Ecke A'. Doch wollen wir in Figur 264 auf diese Bequemlichkeit verzichten; h' trifft zwei Seiten $A'B'C'$ in X' und Y'; zu diesen Grundrissen bestimmt man die Aufrisse X'', Y'' in bekannter Weise, und ihre Verbindungslinie h'' ist der Aufriß von h. Bei der Drehung von ABC um h beschreibt jede Ecke des Dreiecks, zum Beispiel C, einen Kreis, dessen Ebene auf h und damit auf Π_2 senkrecht steht. Die Projektion C'' von C bewegt sich also auf einer zu h'' senkrechten Geraden der Zeichenebene. Es folgt allgemein:

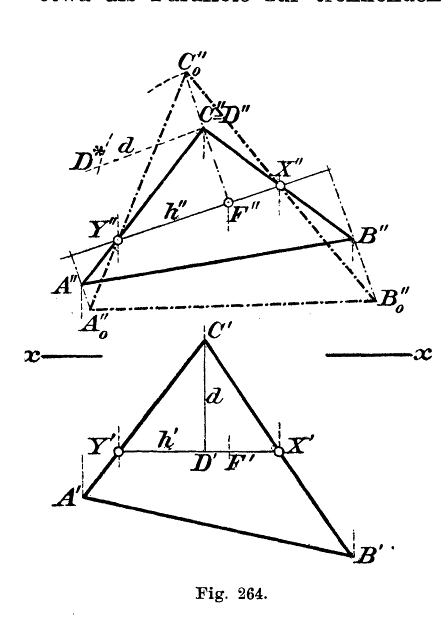


Fig. 264.

Dreht sich eine Ebene um eine ihrer ersten (oder zweiten) Hauptlinien, so bewegt sich die erste (zweite) Projektion jedes ihrer Punkte auf einem Lote zur Projektion dieser Hauptlinie. Man sieht sofort: Zwischen den ersten (zweiten) Projektionen der ursprünglichen und der gedrehten Figur besteht Affinität mit der Projektion der Hauptlinie als Affinitätsachse; die Affinitätsrichtung ist dazu senkrecht.

Es kommt demnach nur darauf an, von einem Eckpunkte, etwa C, die Endlage C_0'' der zweiten Projektion C'' zu finden. C'' bewegt sich auf dem Lote $C''F'' \perp h''$; hier ist F'' der Aufriß des Mittelpunkt des Kreises, auf dem sich C bewegt. Denken wir uns den Grundriß F' auf h' hinzu — zur Konstruktion ist er nicht nötig — und betrachten wir C'' als Aufriß D'' eines Punktes D, dessen Grundriß D' ebenfalls auf h' liegt, so zeigt der Grundriß, was auch geometrisch einleuchtet, daß das Dreieck CDF bei D einen rechten Winkel hat. Die eine Kathete CD, deren Endpunkte denselben ersten Tafelabstand haben, erscheint im Grundriß in ihrer wahren Größe, die andere DF im Aufriß. Daher können wir die Hypotenuse CF, den Radius des Drehkreises, finden, indem wir etwa in C'' auf $C''F''$ das Lot $C''D^* = C'D'$ errichten; $F''D^*$ ist dann der gesuchte Radius, mit dem wir um F'' den Kreis schlagen. Er trifft $F''C''$ in dem gesuchten Punkte C_0'', dem Aufriß des gedrehten Punktes.

Bis hierher ausgeführt löst diese Konstruktion zugleich die Aufgabe, die wahre Größe eines Winkels aus seinen Projektionen zu finden, denn $\sphericalangle X''C_0''Y''$ ist die wahre Größe von $\sphericalangle X''C''Y''$.

Nach der Bestimmung von C_0'' sind A_0'' und B_0'' leichter zu finden: Es liegt A_0'' auf $C_0''Y''$ und auf dem Lote aus A'' auf h''; ebenso B_0'' auf $C_0''X''$ und dem Lote aus B'' auf h''. Die Grundrisse A_0'', B_0'', C_0'' liegen natürlich auf h'.

Dieselbe Aufgabe ist in Figur 264 durch Drehung um eine erste Hauptlinie gelöst. Statt der Hauptlinien kann man selbstverständlich auch die Spuren verwenden.

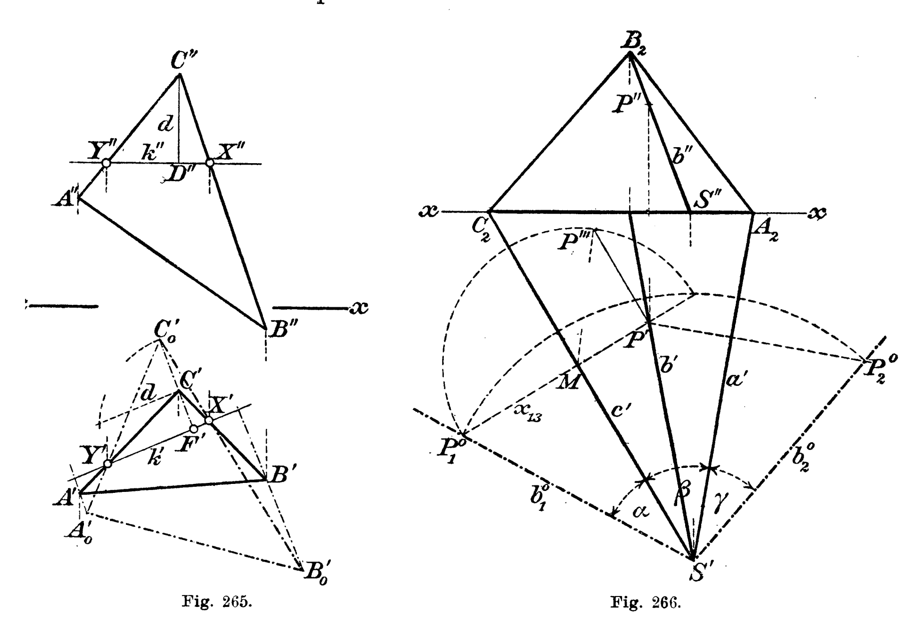


Fig. 265. Fig. 266.

10. Weitere Aufgaben, die durch Drehung um eine Hauptlinie zu lösen sind, werden uns im nächsten Paragraphen begegnen, wo die bei der Drehung immer auftretende Affinität untersucht werden soll. Jetzt wollen wir uns zum Schlusse noch mit einer Methode beschäftigen, die als Aufklappung bezeichnet werden könnte. Die zu drehende Ebene soll nämlich nicht in eine Tafel gedreht werden, sondern sie soll umgekehrt aus der Tafel herausgedreht und aufgerichtet werden. Das Verfahren kommt unter anderen bei folgender Aufgabe zur Anwendung:

Ein Dreikant aus seinen drei Flächenwinkeln α, β, γ zu konstruieren.

Die Winkelfläche β mit der Spitze S möge etwa in Π_1 liegend

angenommen werden. Wir legen gleich α und γ daran, so daß wir im Grundrisse von Figur 266 das Dreikant auseinandergebreitet liegen sehen; α und β stoßen längs c' aneinander, β und γ längs a'; die freien Schenkel $b_1{}^0$ und $b_2{}^0$ von α und γ werden, wenn wir α um c' und γ um a' in richtiger Weise drehen, zusammenfallen in die Kante b, auf deren Konstruktion alles ankommt. Zu dem Ende nehmen wir auf $b_1{}^0$ und $b_2{}^0$ die Punkte $P_1{}^0$ und $P_2{}^0$ in gleichem Abstande von S' an, so daß, wenn die Aufklappung von α und γ glückt, $P_1{}^0$ und $P_2{}^0$ in einem Punkte P von b zusammenfallen. Bei der Drehung von $P_1{}^0$ um S' beschreibt aber dieser Punkt einen Kreis, dessen Ebene auf c' senkrecht steht, seine erste Projektion bewegt sich also auf dem Lote aus $P_1{}^0$ auf c'. Ebenso bewegt sich der Grundriß des sich drehenden Punktes $P_2{}^0$ auf dem Lote aus seiner Anfangslage $P_2{}^0$ auf a'. Daher liegt P' im Schnittpunkte beider Lote. Durch P' geht b'. Der Grundriß von b ist damit gefunden.

Die zweiten Spurpunkte A_2 und C_2 von a und c liegen auf der Achse x_{12}. Ehe wir den zweiten Spurpunkt B_2 von b finden, müssen wir den Aufriß P'' von P' kennen, wozu uns die Kenntnis des ersten Tafelabstandes von P nötig ist. Um diesen zu finden, legen wir durch $x_{13} = P_1{}^0 P'$ die Normalebene auf Π_1 und benutzen sie als dritte Tafel Π_3 statt Π_2. In ihr bewegt sich der Punkt $P_1{}^0$ bei der vorhin beschriebenen Drehung, beschreibt also einen Kreis um den Schnittpunkt M von x_{13} mit c' als Zentrum und mit $MP_1{}^0$ als Radius. Diesen Kreis legen wir um in die Zeichenebene. Dann fällt auch PP' als Lot $P'''P'$ auf $P_1{}^0 P'$ in diese Ebene und kann konstruiert werden. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit dem Kreise ist P''', und $P'''P'$ ist der gesuchte erste Tafelabstand. In diesem Abstande von x_{12} liegt P''. Dann ist $S''P''$ der Aufriß b'' von b, und der zweite Spurpunkt B_2 von b kann nun ohne weiteres angegeben werden.

§ 87. Affinität im Zweitafelsystem.

1. Bis jetzt haben wir den Begriff der Affinität, von vorübergehenden Hinweisen abgesehen, mit Absicht unbenutzt gelassen, um die Ableitung des Grund- und Aufrißverfahrens möglichst elementar zu gestalten. Von nun an wollen wir jedoch die Kenntnis der Paragraphen 79 und 80 ausdrücklich voraussetzen, um uns die daraus fließenden Konstruktionsvorteile anzueignen. Es wird darauf ankommen, die wichtigsten Fälle des Vorkommens der Affinität hervorzuheben.

Schon in § 85, als wir die Beziehungen zwischen Grundriß und Aufriß von Punkten und geraden Linien, die in einer Ebene η liegen, untersuchten, hätte bemerkt werden können, daß diese Beziehung die definierenden Eigenschaften I, II, III der Affinität (§ 79, 4.) hat:

I. Von jedem Punkte der Ebene η ist die eine Projektion durch die andere eindeutig bestimmt;

II. beschreibt die eine Projektion eine Gerade, so tut es auch die andere;

III. die Geraden, die die beiden Projektionen je eines Punktes verbinden, sind zueinander parallel, nämlich senkrecht zur trennenden Achse x,

wobei nur vorauszusetzen ist, daß die Ebene nicht zu einer Tafel senkrecht steht, weil dann die Projektionen der Punkte in dieser Tafel auf die Spurlinie fallen.

Der Grundriß der Punkte der Ebene ist demnach zum Aufriß affin. Liegt der Grundriß A' eines Punktes A der Ebene η auf der Achse u dieser Affinität, so daß also A' mit A'' zusammenfällt, so gehört dieser Punkt nach § 85, 1. der Ebene an, die den Winkel des zweiten und vierten Quadranten halbiert. Da nur den Punkten dieser Ebene die Eigenschaft zukommt, daß ihr Grundriß und Aufriß identisch sind, so ist u der Schnitt von η mit dieser Halbierungsebene. Wir haben also den

Satz 1. Die Grundrisse und Aufrisse der Punkte einer zu keiner Tafel senkrechten Ebene bilden zwei affine Systeme; die Affinitätsachse ist die vereinigte erste und zweite Projektion des Schnittes der Ebene mit der Halbierungsebene des zweiten und vierten Quadranten.

2. Da jede Gerade der Ebene einen Punkt mit jener Winkelhalbierenden gemein hat, so ist die Affinitätsachse leicht zu finden.

Ist erstens die Ebene durch ein sie bestimmendes Dreieck ABC gegeben, so geht die Affinitätsachse durch die Schnittpunkte $X' = X''$, $Y' = Y''$, $Z' = Z''$, in denen sich $B'C'$ und $B''C''$, $C'A'$ und $C''A''$, $A'B'$ und $A''B''$ treffen. Man erkennt einen Spezialfall des Desarguesschen Satzes wieder. Wenn die Punkte X', Y', Z' unbequem liegen, so nimmt man beliebige Geraden der Ebene zur Hilfe, z. B. auch die Tafellinien.

Wird zweitens die Ebene durch ihre Spuren e_1, e_2 gegeben, dann genügt zur Festlegung der Affinitätsachse u eine einzige Hauptlinie; ihre Projektionen h_i', h_i'' ($i = 1$ oder 2) treffen sich in einem

Punkte $H_i = H_i' = H_i''$ von u; ein zweiter Punkt von u ist der Schnittpunkt E von e_1 und e_2, da auch von diesem Punkte die beiden Projektionen zusammenfallen. In Figur 267 sind die beiden Fälle $i = 1$ und $i = 2$ veranschaulicht.

Fig. 267.

3. Der Satz 1 wird überall mit Vorteil anzuwenden sein, wo aus der einen bekannten Projektion einer ebenen Figur die andere abgeleitet werden soll. Es sei z. B. die Schnittkurve einer Ebene η mit einem Kreiszylinder darzustellen, der auf der ersten Tafel senkrecht steht (Fig. 268). Der Zylinder ist durch Angabe der Lage seines Basiskreises $\varkappa$ in Π_1 festgelegt; von η seien die Spuren e_1 und e_2 gegeben. Die Schnittkurve von η mit dem Zylinder ist eine Ellipse ε, deren Grundriß ε' mit $\varkappa$ identisch ist. Es gilt, zu $\varepsilon' = \varkappa$ den Aufriß zu finden. Ohne Kenntnis der Affinität würde man einfach zu hinreichend viel Punkten $P', Q', \ldots$ von ε' nach Figur 250 oder 251 die Aufrisse suchen. Rascher führt aber die Kenntnis der Affinität zum Ziele; man kann nämlich unmittelbar die Achsen der Ellipse ε'' finden. Zu dem Ende bestimmen wir nach Figur 267 die Achse EH der Affinität zwischen Grundriß und Aufriß mittels einer zweiten Hauptlinie h, deren Grundriß h' wir durch den Mittelpunkt M'

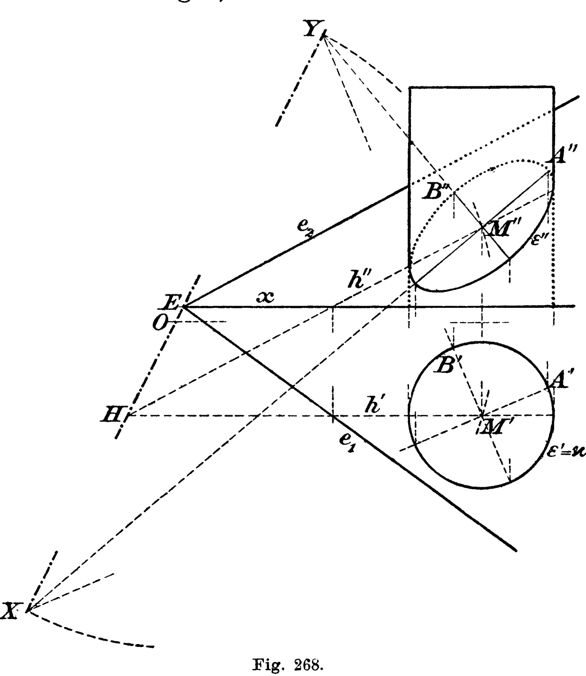


Fig. 268.

von $\varepsilon' = \varkappa$ legen. Zu M' nehmen wir den Aufriß M'' auf h'' an. Dann sind M', M'' die Projektionen des Schnittpunktes M der Zylinderachse mit η. Zugleich sind M' und M'' zwei zugeordnete Punkte in der

Affinität zwischen Grund- und Aufriß, also ist M'' der Mittelpunkt von ε''. Jedem Paare aufeinander senkrechter Durchmesser von ε' entspricht ein Paar konjugierter Durchmesser von ε'', und unter diesen befindet sich nach § 79, 10. eines, dessen Geraden aufeinander senkrecht stehen. Das sind dann die Achsen von ε''. Um diese zu finden, hat man nach § 79, 10. das Mittellot auf $M'M''$ mit EH in O zum Schnitt zu bringen und um O als Zentrum den Kreis mit dem Radius OM' zu legen. Er trifft EH in zwei Punkten X, Y, so daß $M'X$, $M'Y$ und die dazu affinen Geraden $M''X$, $M''Y$ aufeinander senkrecht stehen. Sind A' und B' je ein Schnittpunkt von ε' mit $M'X$ und mit $M'Y$, sowie A'' und B'' die dazu affinen Punkte auf $M''X$ und $M''Y$, so sind $M''A''$, $M''B''$ die gesuchten Halbachsen, aus denen die Ellipse ε'' in bekannter Weise mittels der Krümmungsradien gewonnen wird. Der weitere Verlauf der Konstruktion geht aus der Figur hervor.

4. Satz 2. Wenn zwei Ebenen η und η_0, die auf einer Tafel Π_i $(i = 1, 2)$ nicht senkrecht stehen, durch parallele Strahlen aufeinander bezogen sind, so sind die Orthogonalprojektionen der Punkte beider Ebenen auf die Tafel Π_i zueinander affin, und zwar mit der Projektion der Schnittgeraden von η und η_0 als Affinitätsachse.

Denn es entspricht I. dem Punkte A von η eindeutig ein Punkt A_0 von η_0 und umgekehrt, und das gilt auch von den Projektionen $A^{(i)}$, $A_0^{(i)}$ dieser Punkte auf Π_i. Beschreibt II. der Punkt A eine Gerade g in η, so beschreibt A_0 in η_0 ebenfalls eine Gerade g_0, weil der Strahl AA_0, wenn A sich auf g bewegt, eine Ebene beschreibt, die η_0 in g_0 trifft; wenn also $A^{(i)}$ in Π_i eine Gerade $g^{(i)}$ durchläuft, bewegt sich $A_0^{(i)}$ auf einer Geraden $g_0^{(i)}$. Da die Strahlen AA_0 für alle Lagen von A in η nach Voraussetzung dieselbe Richtung haben, so sind auch III. die Strahlen $A^{(i)}A_0^{(i)}$ in Π_i zueinander parallel. Die charakteristischen Bedingungen der Affinität sind in Π_i daher erfüllt, und da jeder Punkt A der Schnittgeraden s von η und η_0 in der eindeutigen Beziehung zwischen η und η_0 sich selbst zugeordnet ist, so ist es ebenso mit der Projektion dieses Punktes auf Π_i, die Gerade $s^{(i)}$ ist also Affinitätsachse, w. z. b. w.

Nun kann aber, wie wir in § 79, 2. gesehen haben, die durch Drehung einer Ebene η um eine in ihr liegende Gerade s erzielte eindeutige Beziehung zwischen der Anfangslage η und der Endlage η_0 dieser Ebene immer durch (schräge) Parallelprojektion von η auf η_0 erzeugt werden, wobei die Parallelstrahlen senkrecht stehen auf der Halbierungsebene des bei der Drehung von η durchlaufenen Ebenenwinkels. Wir haben dann also zwischen η und η_0 eine eindeutige



Beziehung, die durch parallele Strahlen vermittelt wird. Daher ist der Satz 2 anwendbar, und wir bekommen so den

Satz 3. Wenn man eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade s aus einer Anfangslage η in eine Endlage η_0 dreht, und η und η_0 auf der Tafel Π_i ($i = 1$ oder 2) nicht senkrecht stehen, so findet zwischen den i^{ten} Projektionen der Punkte von η und denen der Punkte von η_0 Affinität mit der i^{ten} Projektion von s als Affinitätsachse statt.

5. Da man unter den Voraussetzungen der Sätze 2 und 3 immer die Affinitätsachse angeben kann, so wird es nur darauf ankommen, noch zu einem Punkte den affinen zu finden. Wie das geschieht, wenn η_0 zu einer Tafel parallel läuft, ist in der Figur 264 an dem Punktepaare C'', C_0'' oder in Figur 265 an C', C_0' zu ersehen; vergleiche auch Figur 259. Dagegen wird man im allgemeinen Falle, wo s zu keiner Tafel eine ausgezeichnete Lage einnimmt, erst eine zu s parallele und auf Π_1 senkrechte Hilfstafel Π_3 einführen.

6. Der Satz 3 wird am meisten bei der Umlegung einer ebenen Figur um die erste oder zweite Spur der Ebene dieser Figur in die erste oder zweite Tafel angewandt, z. B. wenn die wahre Gestalt eines Dreiecks ABC aus den Projektionen der Eckpunkte ermittelt werden soll, wenn der Umkreis des Dreiecks ABC konstruiert werden soll, oder wenn die wahre Gestalt der Schnittellipse ε in Figur 268 zu bestimmen ist. Es genügt, wenn wir auf die letzte Aufgabe näher eingehen (Fig. 269). Wir wollen die Ebene η der Ellipse ε um ihre erste Spur e_1 in die Grundrißebene drehen. Dazu brauchen wir nur die Endlage M_0 von M' zu wissen. Der Punkt M der Ebene η liegt vertikal über M' auf einem ersten Tafellote, und zwar ist sein Abstand von M' gleich dem Abstande m des Punktes M'' von der trennenden Achse (§ 83, Satz 2). Bei der Drehung nun beschreibt M einen Kreis, dessen Ebene auf e_1,

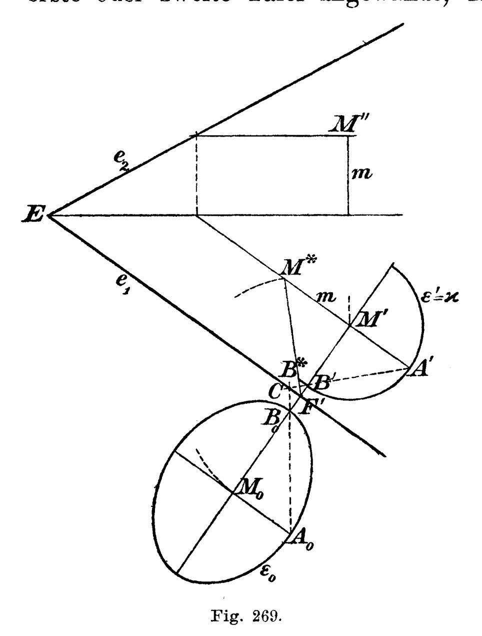


Fig. 269.

also auch auf Π_1 senkrecht steht; die erste Projektion von M beschreibt daher, wie wir beim Problem der Drehung um eine erste Hauptlinie ausführlich gezeigt haben, in Π_1 eine auf e_1 senkrechte Gerade $M'F' \perp e_1$, und auf dieser wird M' in die Lage M_0 kommen, so daß $M_0F' = F'M$ ist. Es kommt also darauf an, $F'M$ zu finden. Diese Strecke ist aber die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck $F'M'M$, das wir um $F'M'$ in die Ebene Π_1 umlegen wollen. Dann ist einfach in M' auf $F'M'$ das Lot zu errichten und darauf $M'M^*$ gleich dem ersten Tafelabstande m des Punktes M abzutragen; M^* ist die Umlegung von M, und $F'M^* = F'M$ die gesuchte Hypotenuse, die wir nun von F' aus auf $M'F'$ nach der Seite hin abtragen, nach der M durch die Drehung fallen soll.

Zufolge dem Satze 3 besteht jetzt zwischen den Grundrissen der Punkte von η und ihren Umlegungen, die wie M_0 den Index Null erhalten sollen, eine Affinität mit e_1 als Achse und M_0M' als Affinitätsrichtung. Diese ist zur Achse normal.

Die zwei konjugierten (d. h. also aufeinander senkrechten) Durchmesser des Kreises ε', von denen der eine zu e_1 parallel ist, gehen daher durch die Affinität wieder in zueinander senkrechte Durchmesser über, ergeben also die Achsen der umgelegten Ellipse ε_0. Wir ziehen daher einen zu e_1 parallelen Radius $M'A'$ von ε' und einen dazu senkrechten $M'B'$ und bringen $A'B'$ mit e_1 in C zum Schnitt. Dann machen wir $M_0A_0 \# M'A'$ und bringen A_0C mit M_0M' in B_0 zum Schnitt. Dann sind M_0A_0, M_0B_0 die Halbachsen der Ellipse ε_0, die nun mittels der Krümmungskreise in dem Scheitelpunkte leicht zu konstruieren ist. Die eine Halbachse, M_0A_0, ist gleich dem Radius r des Kreises ε'. Bringt man das Lot in B' auf $F'M'$ mit $F'M^*$ zum Schnitt in B^*, so ist $B^*M^* = B_0M_0$ die andere Halbachse, und da $\nu = \sphericalangle M'F'M^*$ die erste Tafelneigung der Ebene der Ellipse ist, so hat man

$$B^*M^* = r/\cos\nu,$$

d. h. ist eine Ebene unter dem Winkel ν gegen die Basis eines Kreiszylinders geneigt, so schneidet sie diesen in einer Ellipse, von der die eine Halbachse gleich dem Radius r des Zylinders, die andere gleich $r/\cos\nu$ ist.

Zur Konstruktion dieser Ellipse hätte es also der Umlegung von η nicht bedurft, die Konstruktion von B^*M^* gab schon die noch fehlende Halbachse.

7. Über die Darstellung des Kreises gibt es einen allgemeinen Satz, der auf der Tatsache beruht, daß die Parallelprojektionen aufeinander senkrechter Durchmesser des Kreises stets konjugierte Durchmesser der Projektion sind; nun denken wir uns durch den Mittel-



punkt M des Kreises eine Ebene parallel zur ersten (oder zweiten) Tafel gelegt. Sie trifft die Ebene des Kreises in einem Durchmesser, der zugleich erste Hauptlinie ist. Diese und der dazu senkrechte Durchmesser ergeben daher nach § 83, 9. durch die Orthogonalprojektion auf die erste Tafel zwei zueinander senkrechte konjugierte Durchmesser der Projektion, also die Achsen der Ellipse, und zwar projiziert sich der zur Tafel parallele Kreisdurchmesser d in seine natürliche Länge, der andere wird verkürzt und ist gleich $d \cos \nu_1$, wenn ν_1 die erste Tafelneigung der Kreisebene bezeichnet. Wir können also sagen:

Satz 4. Wenn die Ebene eines Kreises gegen eine Projektionstafel Π_i unter einem nicht rechten Winkel ν_i geneigt ist, so ist die Orthogonalprojektion des Kreises auf Π_i eine Ellipse $\varepsilon^{(i)}$, deren Hauptachse gleich dem Durchmesser d des Kreises und parallel zur Spur der Kreisebene in der Tafel Π_i ist, während die kleine Achse gleich $d \cos \nu_i$ ist.

Auf die Darstellung dieser Ellipse werden wir in anderem Zusammenhange in § 89 eingehen.

8. Dagegen sollen der Methode der affinen Metrik noch einige Worte gewidmet werden, da sie oft Konstruktionsvorteile gewährt. Es handelt sich da um folgendes:

Zu einer ebenen Figur $ABC\ldots$ sei eine affine $A_1B_1C_1\ldots$, zum Beispiel eine Orthogonalprojektion oder ein Schrägbild zu konstruieren, und man habe bereits von einer Maßfigur Φ derselben Ebene das Bild Φ_1 gefunden. Wie sieht man dann direkt im Bilde, ob die entsprechenden Originale rechte Winkel, Quadrate, Kreise u. s. w. sind? Das ist die Fragestellung, die dazu dienen soll, bei der verlangten Konstruktion möglichst wenig auf die Originale zurückzugreifen. Einige Beispiele werden das leicht klar machen.

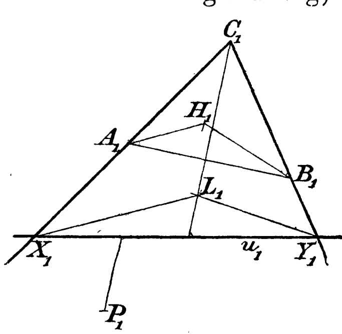


Fig. 270.

a) Die Maßfigur Φ sei ein Dreieck ABC mit seinen Höhen (Fig. 270). Es sei also das Bild $A_1B_1C_1$ des Dreiecks und H_1 des Höhenpunktes gegeben; ferner die Bilder P_1 und u_1 eines Punktes P sowie einer Geraden u, auf die aus P das Lot zu fällen ist. Um dieses direkt, ohne Benutzung des Originals bildlich darzustellen, bringt man u_1 mit den Seiten des Dreiecks, etwa mit A_1C_1 und B_1C_1 in X_1 und Y_1 zum Schnitt und zieht durch X_1, Y_1 die Parallelen zu

A_1H_1, B_1H_1, die sich in einem Punkte L_1 treffen. Dieser ist das Bild des Höhenpunktes des Originaldreiecks XYC, also ist C_1L_1 das Bild eines Lotes auf u_1; das Bild des gesuchten Lotes geht parallel zu C_1L_1 durch P_1.

b) Die Maßfigur sei ein Quadrat, ihr Bild $A_1B_1C_1D_1$ also ein Parallelogramm (Fig. 271). Wiederum kann man die Bilder von Loten direkt darstellen. Das Bild u_1 einer Geraden treffe etwa die Diagonale C_1A_1 und die Seite C_1B_1 in X_1 und Y_1. Dann zieht man durch X_1 und Y_1 die Parallelen zu A_1B_1 und B_1D_1 und bestimmt ihren Schnittpunkt S_1. Dieser ist dann das Bild des Höhenpunktes XYC, also ist C_1S_1 das Bild eines Lotes auf u. Soll ein Lot durch P gehen, so zieht man durch P_1 zu C_1S_1 die Parallele.

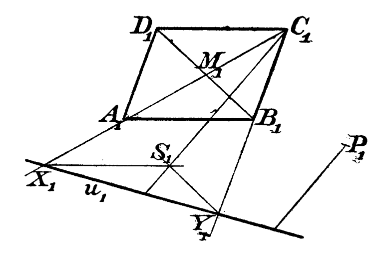


Fig. 271.

Eine andere Lösung ist von Steiner (vgl. Bd. II, § 5, S. 17) angegeben worden und beruht auf einer hübschen Eigenschaft des Quadrates (Fig. 272). Trägt man nämlich auf dem Umfange eines Quadrates $ABCD$ im selben Umlaufsinne eine beliebige Strecke $AX = BY = CZ = DT$ ab, so ist die Strecke XZ der Strecke YT

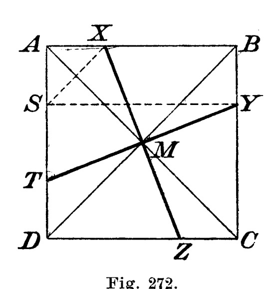


Fig. 272.

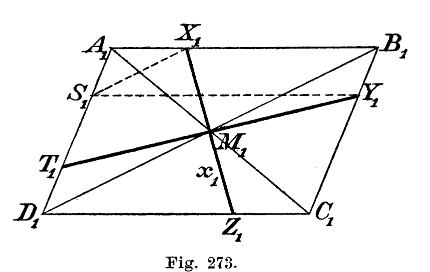


Fig. 273.

gleich und steht auf ihr senkrecht, $XYZT$ ist also ebenfalls ein Quadrat. Ist auch noch AS auf AD gleich AX, so ist $XS \| BD$, $SY \| AB$.

Wenn daher das Bild $A_1B_1C_1D_1$ von $ABCD$ gegeben ist, etwa als umgeschriebenes Parallelogramm einer Ellipse, von der zwei konjugierte Durchmesser zu den Seiten dieses Parallelogramms parallel laufen, so kann zu jedem anderen Durchmesser x_1 der Ellipse der konjugierte gefunden werden, indem man x_1 mit A_1B_1 in X_1 zum Schnitt bringt, $X_1S_1 \| B_1D_1$ und $S_1Y_1 \| A_1B_1$ zieht; M_1Y_1 ist dann der gesuchte Durchmesser der Lage nach.

c) Wenn die Maßfigur ein Kreis ist, so können die Steinerschen Linealkonstruktionen übertragen werden (Bd. II, § 5), was aber nur in besonderen Fällen von Nutzen sein wird.

§ 88. **Krümmung.**

1. Bevor wir zur Darstellung krummer Linien schreiten, müssen wir uns eingehender mit der Konstruktion der Krümmungskreise beschäftigen, weil durch ihre Hilfe das praktische Zeichnen der Kurven, besonders an den stärker gekrümmten Stellen, wesentlich erleichtert wird.

Die Konstruktion der Krümmungsradien einer Ellipse in ihren Scheitelpunkten A und B hatten wir aus der analytischen Geometrie (Bd. II, § 81) übernommen. Die darstellende Geometrie kann jedoch diese Aufgabe auch mit ihren Mitteln lösen, im Anschluß an die Metrik der Affinität, § 79, 8.

Seien OA und OB die zwei Halbachsen einer Ellipse ε, wobei OA sowohl die große als die kleine sein darf (Fig. 274). Die Halbachse OB treffe den Kreis ε_1 mit OA als Radius und O als Zentrum in B; das Lot auf OA in einem nahe bei A gelegenen Punkte H schneide ε und ε_1 in P, Q und P_1, Q_1. Dann ist ε zu ε_1 affin mit OA als Affinitätsachse und B, B_1 als zugeordneten Punkten. Nach § 79, 8. ist:

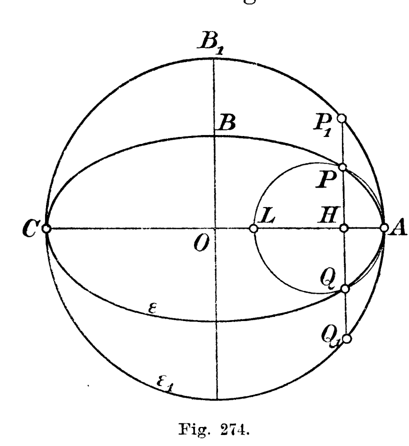


Fig. 274.

$$(1)\quad HP : HP_1 = HQ : HQ_1 = OB : OB_1 = OB : OA.$$

Betrachten wir nun den Umkreis $\varkappa$ des Dreiecks PAQ. Je näher H bei A liegt, um so inniger wird dieser Kreis sich an die Ellipse ε in A anschmiegen und zu beiden Seiten von A auf eine Strecke hin mit ε ganz zusammenfallen. Lassen wir nun H auf OA immer näher an A heranrücken, so werden sich auch P und Q auf der Ellipse dem Punkte A immer mehr nähern, der Kreis $\varkappa$ wird immerfort seine Lage und Größe ändern, sein zweiter Schnittpunkt L mit OA wird ebenfalls wandern und sich immer mehr einer Grenzlage L_0 nähern, während $\varkappa$ einer Grenzlage $\varkappa_0$ zustrebt. Diese Grenzlage $\varkappa_0$ von $\varkappa$ heißt der Krümmungskreis von ε in A, der Radius ϱ_0 des Kreises $\varkappa_0$ heißt der Krümmungsradius der Ellipse in A. Nun ist mit Rücksicht auf (1), wenn C den anderen Scheitel auf OA bezeichnet:

$$(2)\qquad \frac{HL}{HC} = \frac{HA \cdot HL}{HA \cdot HC} = \frac{HP \cdot HQ}{HP_1 \cdot HQ_1} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2,$$

indem auf $\varkappa$ und ε_1 je einmal der Sehnensatz angewandt wird. Wenn

aber H nach A rückt, wird HL gleich $AL_0 = 2\varrho_0$, HC geht in $AC = 2\,OA$ über, und aus (2) folgt:

$$\frac{2\varrho_0}{2\,OA} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2, \quad \varrho_0 = \frac{OB^2}{OA}, \tag{3}$$

wie wir schon in Bd. II, § 81, 11. gefunden hatten. Aus (3) folgt auch die dort angegebene Konstruktion des Mittelpunktes von $\varkappa_0$, der als Krümmungsmittelpunkt von ε in A bezeichnet wird.[1])

2. Ist A ein Punkt einer beliebigen Kurve γ, so nimmt man zur begrifflichen Erzeugung des Krümmungskreises in A noch zwei weitere Punkte B und C auf der Kurve an, am anschaulichsten rechts und links von A, und konstruiert den Umkreis $\varkappa$ des Dreiecks ABC (Fig. 275). Wenn nun dieser Kreis sich einer Endlage $\varkappa_0$ nähert, während B und C nach dem Punkte A eilen, so wird $\varkappa_0$ der Krümmungskreis der Kurve γ in A genannt. Während des Bewegungvorganges wird $\varkappa$ natürlich seine Gestalt, und wenn es sich um eine doppelt gewundene Kurve (z. B. Schraubenlinie) handelt, auch seine Ebene ändern; damit aber von einem Krümmungskreise in A die Rede sein darf, muß die Endlage $\varkappa_0$ eine ganz bestimmte sein.

Zur Berechnung des Krümmungsradius dient uns im folgenden die einfache Formel

$$4r = AB \cdot BC \cdot CA : \varDelta, \tag{4}$$

die nach Bd. II, § 24, (8) den Umkreisradius r des Dreiecks ABC mit den Seiten und dem Inhalt $\varDelta$ in Beziehung setzt. Dieses Dreieck werden wir mit einem zweiten Dreieck $A_1B_1C_1$ vergleichen, dessen Inhalt und Umkreisradius $\varDelta_1$ und r_1 seien. Man hat dann auch

$$4r_1 = A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 : \varDelta_1, \tag{5}$$

also

$$\frac{r}{r_1} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1} : \frac{\varDelta}{\varDelta_1}. \tag{6}$$

3. Wir betrachten nun zunächst eine ebene Kurve γ und eine dazu affine γ_1, indem wir uns fragen, wie sich der Krümmungsradius ϱ von γ in einem Punkte A zu dem Krümmungsradius ϱ_1 von γ_1 in dem zu A affinen Punkte A_1 verhält (Fig. 275). Die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte sind im allgemeinen natürlich nicht etwa affin entsprechende Punkte, denn zum Krümmungskreis in A affin ist im allgemeinen eine Ellipse. Zu

1) Diese Ableitung ist einem Aufsatze von C. Heumann im 6. Bande des Archivs der Mathematik und Physik (3), 1903 entnommen, dem wir uns auch im folgenden öfters anschließen.

beiden Seiten von A nehmen wir noch auf γ zwei Punkte B, C an und auf γ_1 die dazu affinen B_1, C_1; die Inhalte von ABC und $A_1B_1C_1$ seien $\varDelta$ und $\varDelta_1$. Dann besteht zwischen den Umkreisradien r und r_1 von ABC und $A_1B_1C_1$ die Beziehung (6). Lassen wir B und C nach A und damit auch B_1 und C_1 nach A_1 rücken, so gehen r und r_1 in die gesuchten Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 über. Vor der Ausführung dieses Grenzüberganges legen wir durch einen Punkt G der Affinitätsachse drei beliebige Strecken a, b, c parallel zu BC, CA, AB und konstruieren die dazu affinen Strecken a_1, b_1, c_1, die ebenfalls durch G gehen und zu B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 parallel laufen. Dann ist

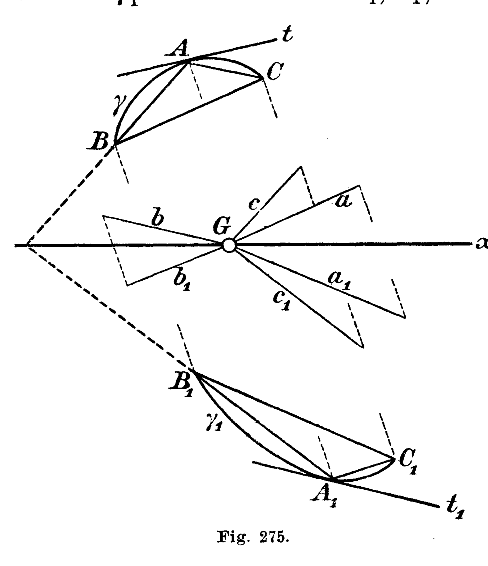


Fig. 275.

(7) $AB : A_1B_1 = c : c_1, \quad BC : B_1C_1 = a : a_1, \quad CA : C_1A_1 = b : b_1.$

Nach § 79, 9. ist ferner $\varDelta : \varDelta_1$ gleich dem Verhältnis einer Strecke eines Affinitätsstrahls zur affinen Strecke, also z. B., wenn AA_1 die Affinitätsachse in A_0 trifft:

(8) $$\varDelta : \varDelta_1 = AA_0 : A_1A_0.$$

Daher ist nach (6):

(9) $$\frac{r}{r_1} = \frac{abc}{a_1b_1c_1} : \frac{AA_0}{A_1A_0}.$$

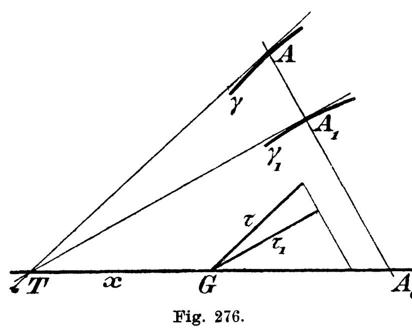


Fig. 276.

Jetzt lassen wir B und C auf γ nach A rücken, und damit B_1 und C_1 auf γ_1 nach A_1 (Fig. 276).[1]) Dann werden die drei Strecken a, b, c parallel zur Tangente t von γ in A, fallen also auf dieselbe Gerade τ. Die Strecken a_1, b_1, c_1 werden parallel zur Tangente t_1 von γ_1 in A_1 und fallen auf die zu τ affine Gerade τ_1. Daher ist

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \tau : \tau_1,$$

1) Diese Figur enthält eine von Figur 275 abweichende, bequemere Anordnung der Affinität.

wenn man unter τ und τ_1 zwei beliebige von G ausgehende affine Strecken versteht, die zu t und t_1 parallel sind. Aus (9) folgt

$$\frac{r}{r_1} = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^3 : \frac{AA_0}{A_1 A_0}, \tag{10}$$

oder, indem wir statt r und r_1 nunmehr ϱ und ϱ_1 schreiben:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^3 : \frac{AA_0}{A_1 A_0}. \tag{11}$$

oder in Worten:

Satz 1. Um die Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 zweier affinen Kurven γ und γ_1 in ihren Punkten A und A_1 zu vergleichen, ziehe man durch einen Punkt G der Affinitätsachse zu den Tangenten t, t_1 der Punkte A, A_1 die Parallelen und grenze auf diesen durch G und einen Affinitätsstrahl die affinen Strecken τ, τ_1 ab (Fig. 276). Ist A_0 der Schnittpunkt von AA_1 mit der Affinitätsachse, so ist:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)^3 : \frac{A_0 A}{A_0 A_1}. \tag{12}$$

Wenn der Punkt T, in dem t und t_1 einander auf der Affinitätsachse schneiden, nicht im Unendlichen liegt, kann T die Rolle von G übernehmen; dann ist

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \left(\frac{TA}{TA_1}\right)^3 : \frac{A_0 A}{A_0 A_1}. \tag{13}$$

Sind dagegen die Tangenten in A und A_1 zur Affinitätsachse parallel, so ist einfach

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} = \frac{A_0 A_1}{A_0 A}, \tag{14}$$

indem die Strecken τ und τ_1 der Formel (12) auf der Affinitätsachse zusammenfallen.

4. Die Formel (14) ist für die Ellipse wichtig (Fig. 277). Seien OA und OB zwei konjugierte Halbmesser einer Ellipse ε. Diese beziehen wir affin auf den Kreis ε_1, der O zum Mittelpunkte und OB zum Zentrum hat, indem wir dem Punkte A von ε einen Punkt A_1 von ε_1 zuordnen, dessen Radius OA_1 auf OB senkrecht steht. Dann besteht zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 von ε und ε_1 in A und A_1 die Beziehung (14), oder, da $\varrho_1 = OB$ ist:

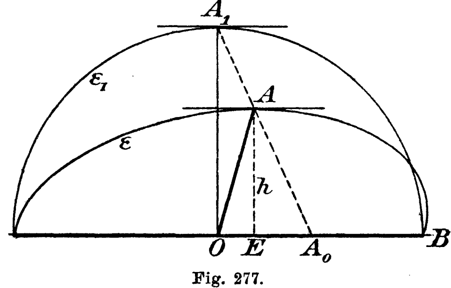


Fig. 277.

$$(15) \qquad \varrho = OB \cdot \frac{A_0 A_1}{A_0 A}.$$

Fällt man noch aus A auf OB das Lot $AE = h$, so ist $A_0 A_1 : A_0 A = OA_1 : h = OB : h$, also

$$(16) \qquad \varrho = \frac{OB^2}{h}.$$

Diese Formel führt zu der folgenden

Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes zu einem beliebigen Ellipsenpunkte A, wenn zu dem durch diesen Punkt A gehenden Halbmesser OA ein konjugierter OB gegeben ist (Fig. 278):

Man ergänzt das Dreieck AOB zu einem Parallelogramm $AOBC$ und fällt aus C auf OB das Lot CC_0. Dann treffen sich die Lote

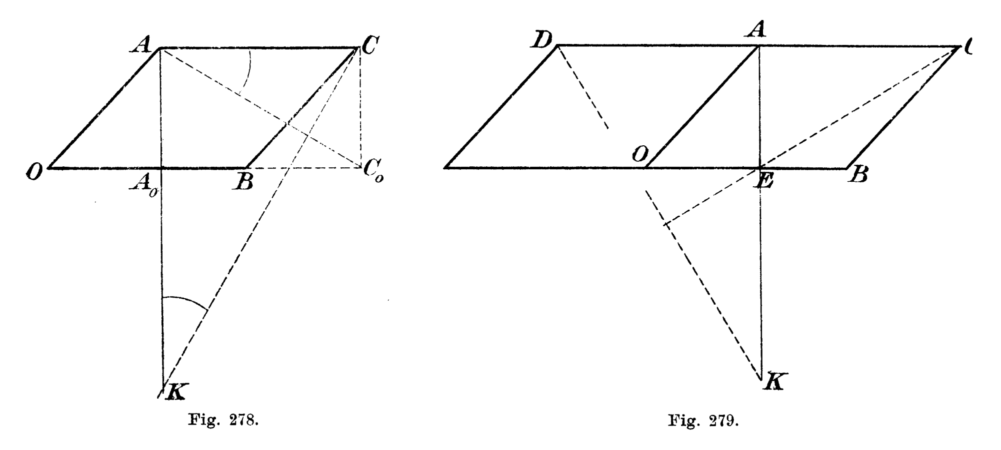


Fig. 278. Fig. 279.

aus C auf AC_0 und aus A auf OB in dem gesuchten Punkte K. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke AKC und CAC_0 folgt: $AK : AC = AC : CC_0$, $AK = AC^2 : CC_0 = OB^2 : h$, wenn h das aus A auf OB gefällte Lot AA_0 bezeichnet. Die Strecke KA ist also nach (16) der Krümmungsradius von A_1, und da der Krümmungskreis die Ellipse und damit ihre Tangente AC in A berührt, so muß der Mittelpunkt dieses Kreises auf der Normalen, d. h. auf AK liegen und ist also mit K identisch.

Steht OA auf OB senkrecht, so geht diese Konstruktion in die des § 81 im II. Bande über, die für die Scheitelpunkte gilt. Bei der praktischen Ausführung werden die Lote AA_0 und CC_0 unmittelbar nacheinander gezogen, wobei das ruhende Dreieckslineal seine Lage beibehält, und die Gerade AC_0 wird nicht gezogen.

Eine einfache Umformung der Figur 278 mit $AD = AC$ ist Figur 279, die demselben Zwecke dient.

5. Die Frage des Artikels 3 drängt sich auch bei der Orthogonalprojektion auf: Wie verhalten sich die Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 einer ebenen oder räumlichen Kurve γ und ihrer Orthogonalprojektion γ_1 in entsprechenden Punkten A und A_1?

Wie in Art. 3 nehmen wir auf der Kurve zu beiden Seiten von A noch je einen Punkt B und C an, in der Absicht, diese Punkte sich unbegrenzt dem Punkte A nähern zu lassen, wodurch der Radius r des Umkreises von ABC in den Krümmungsradius ϱ von γ in A übergeht. Die Ebene η des Dreiecks ABC trifft die Projektionsebene η_1 in einer Geraden u, auf der jede Seite des Dreiecks $\Delta = ABC$ die entsprechende Seite seiner Projektion $\Delta_1 = A_1B_1C_1$ trifft. Bezeichnet r_1 den Umkreisradius von Δ_1, so besteht zwischen r und r_1 die Beziehung (6). Hier ist aber

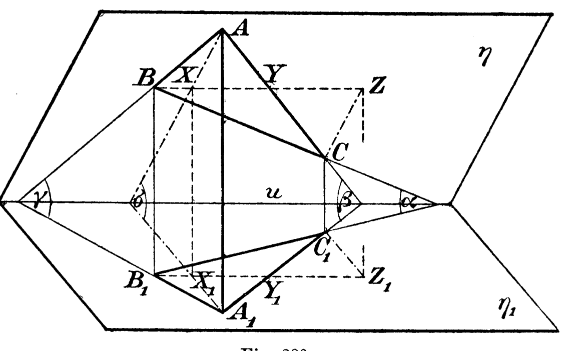


Fig. 280.

(17) $$\Delta_1 = \Delta \cos \sigma,$$

wo σ den Winkel zwischen η und η_1 bedeutet. Denn zieht man in ABC die Transversale $BY \| u$ und fällt $AX \perp BY$, $CZ \perp BY$, so ist der Winkel zwischen AX und seiner Orthogonalprojektion A_1X_1 gleich σ; wenn also Y_1, Z_1 die Projektionen von Y, Z sind und berücksichtigt wird, daß $BY \# B_1Y_1$ und $A_1X_1 \perp B_1Y_1$, $C_1Z_1 \perp B_1Y_1$ ist, so folgt

$$B_1A_1Y_1 = \tfrac{1}{2}B_1Y_1 \cdot A_1X_1 = \tfrac{1}{2}BY \cdot AX \cos \sigma,$$
$$B_1C_1Y_1 = \tfrac{1}{2}B_1Y_1 \cdot C_1Z_1 = \tfrac{1}{2}BY \cdot CZ \cos \sigma,$$

also durch Addition:

$$\Delta_1 = \Delta \cos \sigma.$$

Führt man noch die Neigungswinkel α, β, γ der Geraden BC, CA, AB zu ihren Projektionen B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ein, so ist ferner

(18) $$A_1B_1 = AB \cos \gamma, \quad B_1C_1 = BC \cos \alpha, \quad C_1A_1 = CA \cos \beta,$$

und aus (6) folgt wegen (17) und (18):

(19) $$\frac{r_1}{r} = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma : \cos \sigma.$$

Lassen wir jetzt B und C auf der Kurve an A heranrücken, so gehen AB, BC und CA in die Tangente t des Punktes A über; dementsprechend gehen B_1, C_1 nach A_1, und die Seiten von $\varDelta_1$ gehen in die Tangente t_1 von A_1 über; die Winkel α, β, γ nähern sich unbegrenzt dem Winkel τ der Tangenten t und t_1, so daß in (19) das Produkt $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ in $\cos\tau^3$ übergeht. Wenn γ in η liegt, so bleibt σ ungeändert, und es ergibt sich

$$\varrho_1 = \frac{\varrho\cos\tau^3}{\cos\sigma}. \tag{20}$$

Ist dagegen die Kurve, der die Punkte A, B, C angehören, doppelt gewunden, so wird beim Grenzübergange auch die Ebene η ihre Lage ändern, aber mit dem Umkreise von ABC einer gewissen Endlage zueilen, in der η den Krümmungskreis von A enthält. Diese Endlage von η heißt dann die Schmiegungsebene dieser Kurve in A, weil sie sich als Ebene des Krümmungskreises der Kurve in A inniger anschmiegt, als jede andere Ebene durch A. In dieser Schmiegungsebene liegt dann die Tangente t von A, und wenn σ den Neigungswinkel der Schmiegungsebene gegen die feste Ebene η_1 bezeichnet, so gilt wiederum Formel (20), d. h.:

Satz 2. Zwischen dem Krümmungsradius ϱ einer Kurve γ und dem Krümmungsradius ϱ_1 ihrer Orthogonalprojektion γ_1 in entsprechenden Punkten besteht die Beziehung:

$$\varrho_1 = \frac{\varrho\cos\tau^3}{\cos\sigma}, \tag{21}$$

wenn τ den Neigungswinkel der Tangente, σ den der Schmiegungsebene (bezw. Ebene) von γ gegen die Projektionsebene bezeichnet.

Mit dieser wichtigen Formel kann auch der Fall der schrägen Parallelprojektion erledigt werden, indem man eine zur Projektionsrichtung normale Hilfsebene einführt und die Krümmungsradien der Originalkurve und ihrer Schrägprojektion mit dem Krümmungsradius ihrer gemeinschaftlichen Orthogonalprojektion auf diese Hilfsebene vergleicht. Doch wollen wir darauf nicht näher eingehen.

6. Dagegen nötigt uns die Darstellung der Schnitte des Kreiskegels, das Verhalten der Krümmungsradien bei zentraler Projektion zu untersuchen. Eine ebene oder doppelt gewundene Kurve γ werde aus einem Punkte S auf eine Ebene η_1 als γ_1 projiziert; A_1, B_1, C_1 seien die Projektionen dreier Punkte A, B, C von γ. Wiederum (Fig. 281) seien $\varDelta$ und $\varDelta_1$ die Inhalte, r und r_1 die Umkreisradien der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$. In der Gleichung (6), die wiederum

zwischen r und r_1 besteht, können wir zunächst $\Delta : \Delta_1$ ausrechnen. Dazu dient die aus Bd. II, § 101, (6) folgende schöne Volumenformel:

(22) $$SABC : SA_1B_1C_1 = SA \cdot SB \cdot SC : SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1.$$

Zum direkten Beweise fällt man aus A auf die Ebene BSC das Lot AF, das gleich dem Produkte aus SA in den Sinus des Neigungswinkels ν des Strahls SA gegen die Ebene BSC ist. Betrachtet man jetzt SBC als Basis und AF als zugehörige Höhe des Tetraeders $SABC$, so findet man

$$SABC = \tfrac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC \sin BSC \sin \nu.$$

Daher ist

$$SA_1B_1C_1 = \tfrac{1}{6} SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1 \sin BSC \sin \nu,$$

woraus durch Division die Gleichung (22) folgt. Andererseits ist, wenn h und h_1 die aus S auf Δ und Δ_1 gefällten Lote bedeuten — in der Figur sind sie weggelassen —

Fig. 281.

(23) $$SABC : SA_1B_1C_1 = \tfrac{1}{3} h\Delta : \tfrac{1}{3} h_1 \Delta_1 = h\Delta : h_1\Delta_1,$$

also mit Rücksicht auf (22):

(24) $$\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1} : \frac{h}{h_1}.$$

Diesen Wert setzen wir in (6) ein. Das gibt:

(25) $$\frac{r}{h} \cdot \frac{SA}{AB} \cdot \frac{SB}{BC} \cdot \frac{SC}{CA} = \frac{r_1}{h_1} \cdot \frac{SA_1}{A_1B_1} \cdot \frac{SB_1}{B_1C_1} \cdot \frac{SC_1}{C_1A_1},$$

also nach dem Sinussatze, wenn a, b, c die Winkel BSC, CSA, ASB bezeichnen,

$$\frac{r}{h} \cdot \frac{\sin ABS}{\sin c} \cdot \frac{\sin BCS}{\sin b} \cdot \frac{\sin CAS}{\sin a} = \frac{r_1}{h_1} \cdot \frac{\sin A_1B_1S}{\sin c} \cdot \frac{\sin B_1C_1S}{\sin b} \cdot \frac{\sin C_1A_1S}{\sin a},$$

und endlich:

(26) $$\frac{r}{h} \sin ABS \cdot \sin BCS \cdot \sin CAS = \frac{r_1}{h_1} \sin A_1B_1S \cdot \sin B_1C_1S \cdot \sin C_1A_1S.$$

Diese Formel gilt für zwei beliebige zueinander perspektiv liegende Dreiecke, die nicht in derselben Ebene enthalten sind.

7. Lassen wir jetzt B und C sich auf γ nach A und damit B_1 und C_1 sich auf γ_1 nach A_1 bewegen, so gehen die Seiten des Dreiecks $\varDelta$ in die Tangente t der Kurve γ in A über, ebenso die Seiten von $\varDelta_1$ in die Tangente t_1 der Kurve γ_1 in A_1. Die Winkel ABS, BSC und CAS oder ihre Supplemente nähern sich unbegrenzt dem (kleinsten der) Neigungswinkel τ der Tangente t gegen den Strahl SA; ebenso konvergieren die Winkel A_1B_1S, B_1C_1S, C_1A_1S oder ihre Supplemente gegen den Neigungswinkel τ zwischen SA_1 und der Tangente t_1 von γ_1 in A_1. Ist γ eine ebene Kurve, also in der Ebene η des Dreiecks $\varDelta$ enthalten, so bleibt η während des Grenzüberganges unverändert; ist die Kurve dagegen doppelt gewunden, so ändert die Ebene mit B und C ihre Lage, strebt aber einer Endlage zu, nämlich der Schmiegungsebene des Punktes A. Die Umkreise von $\varDelta$ und $\varDelta_1$ gehen, ob nun γ eben oder doppelt gewunden ist, in die Krümmungskreise, die Radien r und r_1 in die Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 der Kurven γ und γ_1 in den Punkten A und A_1 über. Aus (26) wird:

$$\frac{\varrho}{h}\sin\tau^3 = \frac{\varrho_1}{h_1}\sin{\tau_1}^3.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 3. Zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 einer Kurve γ und einer Zentralprojektion γ_1 von γ in entsprechenden Punkten A und A_1 besteht die Beziehung

$$\frac{\varrho}{h}\sin\tau^3 = \frac{\varrho_1}{h_1}\sin{\tau_1}^3; \tag{27}$$

hierin sind τ und τ_1 die Neigungswinkel des Projektionsstrahls von A und A_1 gegen die Tangenten der Kurven γ und γ_1 in A und A_1; ferner sind h und h_1 die Abstände des Projektionszentrums von der Schmiegungsebene (bezw. Ebene) der Kurve γ in A sowie von der Ebene der Kurve γ_1.

8. Die Formeln (21) und (27) der Lehrsätze 2 und 3 sollen noch weiter ausgebildet werden unter der Voraussetzung, daß γ und γ_1 in A die Tangente t gemeinschaftlich haben. Dann ist in (21) der Winkel $\tau = 0$, in (27) dagegen $\tau = \tau_1$, und diese Formeln gehen über in

$$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\sigma}, \tag{21'}$$

$$\frac{\varrho_1}{h_1} = \frac{\varrho}{h}. \tag{27'}$$

In (27′) machen wir noch eine weitere Annahme (Fig. 282): In der Ebene η_1 werde auf t im Punkte A das Lot n errichtet, also die

Normale der Kurve γ_1 in A; wir wollen nun voraussetzen, daß der Strahl SA, der A mit dem Projektionszentrum S verbindet, auf n in A senkrecht stehe. Er liegt dann in der auf der Geraden n in A errichteten Normalebene ν. Der Fußpunkt F_1 des aus S auf η_1 zu fällenden Lotes h_1 liegt daher auf t, und die Normalebene auf t in F_1 enthält außer h_1 auch das Lot h, das von S auf η zu fällen ist. Bezeichnet θ den Winkel zwischen η und η_1, so ist daher $h = h_1 \cos\theta$, und (27′) ergibt:

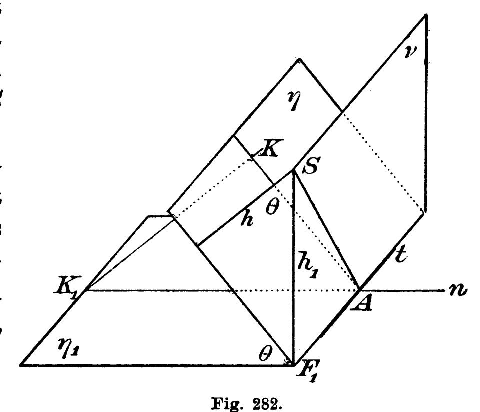


Fig. 282.

$$(27'') \qquad \varrho_1 = \frac{\varrho}{\cos\theta}.$$

Fällt speziell der Punkt F_1 mit A zusammen, und rückt S auf AS ins Unendliche, so geht der Strahlenkegel S in ein System von Strahlen über, die auf η_1 senkrecht stehen. Das ist aber die Voraussetzung der Formel (21′), in welcher σ den in Figur 282 mit θ bezeichneten Winkel zwischen η und η_1 bedeutet, und so ist (27″) in der Tat im vorliegenden Falle mit (21′) identisch. Es liegt auch nichts im Wege, F_1 als von A verschieden anzunehmen und S auf AS ins Unendliche rücken zu lassen. Wir bekommen dann ein System paralleler Strahlen, die γ auf γ_1 projizieren, immer aber unter der Voraussetzung, daß diese Strahlen die Gerade n rechtwinkelig kreuzen. Dann bleibt (27″) bestehen.

9. Um jetzt den Inhalt dieser Formel bequem aussprechen zu können, wollen wir annehmen, γ sei eine ebene Kurve, die auf einem beliebigen Kegel S (d. h. mit beliebiger Basiskurve) liege; in einem Punkte A von γ werde die Tangente t gezogen, die zusammen mit SA eine Ebene ν bestimmt, welche die Kegelfläche längs der ganzen Geraden SA berührt. Die Normale n auf dieser Berührungsfläche im Punkte A heißt jetzt die Flächennormale, ein Begriff, den man sich allerdings besser erst an einer Kugel oder an einem Ellipsoid klar macht: Die Flächennormale in einem Punkte A der Fläche ist die Normale auf der Berührungsebene in A. Jede Ebene durch die Flächennormale eines Punktes trifft die Fläche in einem Normalschnitte; auch die Schnittkurve selber möge so heißen. Einen solchen Normalschnitt bestimmt also in Figur 282 die Ebene η_1, und γ_1 ist die Schnittkurve. Die Ebene η dagegen erzeugt einen schrägen Schnitt, der aber in A mit dem Normalschnitt die



Tangente gemein hat. Danach läßt sich die Formel (27″) in die Worte kleiden:

Satz 4. Legt man durch einen Punkt A eines beliebigen Kegels oder Zylinders einen Normalschnitt γ_1 und einen schrägen Schnitt γ mit derselben Tangente in A, und ist θ der Neigungswinkel der Schnittebenen, so besteht zwischen den zu A gehörigen Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 von γ und γ_1 die Beziehung:

(28) $$\varrho = \varrho_1 \cos \theta,$$

d. h.: Das Krümmungszentrum des Schrägschnittes ist die Orthogonalprojektion des Krümmungszentrums des Normalschnittes.

Das ist ein besonderer Fall eines für alle Flächen gültigen Theorems, das man Meusnier verdankt.

10. Unter den Normalschnitten, die man durch einen Punkt A der Kegel- oder Zylinderfläche S legen kann, ist der Schnitt η_1 ausgezeichnet, der auf SA senkrecht steht. Er werde der Hauptschnitt der Kegelfläche in A genannt. Die Flächentheorie kennt noch einen zweiten Hauptschnitt η_2 durch A, nämlich den durch S gehenden, der aber für unsere Zwecke nicht in Betracht kommt.

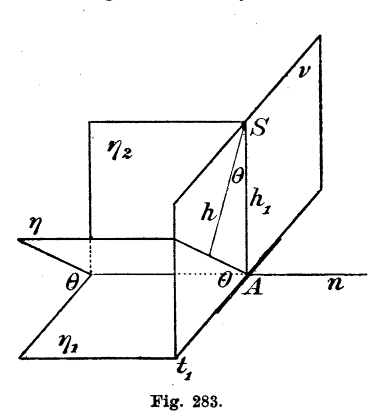


Fig. 283.

Gegen die Ebene η_1 des Hauptschnittes sei die Ebene η eines anderen Normalschnittes durch A um den Winkel θ geneigt (Fig. 283). Die Schnittgerade von η und η_1 ist die Flächennormale n des Punktes A, die auf der Berührungsebene ν der Fläche senkrecht steht. Diese Ebene trifft η_1 und η in den Tangenten t_1 und t der beiden Schnittkurven, und in Formel (27) ist daher:

$$\tau_1 = 90^0, \quad \tau = 90^0 - \theta,$$

und, wie die Figur zeigt,

$$h = h_1 \cos \theta.$$

Daraus folgt:

$$\varrho \cos \theta^2 = \varrho_1.$$

Das ist ein Spezialfall der Eulerschen Formel aus der Flächentheorie:

Satz 5. Legt man durch einen Punkt A eines beliebigen Kegels oder Zylinders einen Normalschnitt η, der gegen den Hauptschnitt η_1 die Neigung θ hat, so besteht zwischen den zugehörigen Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 in A die Beziehung:

$$\varrho = \frac{\varrho_1}{\cos\theta^2}. \tag{29}$$

§ 89. Abwickelung.

1. Wenn sich ein Strahl um einen festen Punkt dreht und dabei längs einer festen Kurve gleitet, so beschreibt er die allgemeine Kegelfläche, die den Betrachtungen des vorigen Paragraphen zugrunde liegt. Eine charakteristische Eigenschaft dieser Flächen ist ihre Abwickelbarkeit, d. h. die längs einer ihrer Geraden aufgeschlitzte Kegelfläche läßt sich ohne Dehnung oder Stauchung so verbiegen, daß sie auf eine Ebene ausgebreitet werden kann. Dabei wird die krumme Fläche auf die Ebene abgebildet, indem man jedem Punkte der Fläche den Punkt der Ebene zuordnet, auf den er bei der Abwickelung fällt. Den Kurven auf der Kegelfläche entsprechen so Kurven der Ebene und umgekehrt. Eines der schönsten Beispiele dieser Zuordnung besteht darin, daß man ein rechtwinkeliges Dreieck mit einer seiner Katheten an eine Gerade eines Kreiszylinders legt und dann um den Zylinder wickelt. Die Hypotenuse beschreibt dann auf dem Zylinder eine Schraubenlinie, eine der merkwürdigsten transzendenten Kurven, die in der Mechanik von großer Bedeutung ist. Umgekehrt ist also die Abwickelung dieser Kurve, d. h. die aus ihr bei der Ausbreitung des Zylinders auf die Ebene hervorgehende Kurve, eine gerade Linie. Es gibt nun einen schönen Satz über die Beziehung zwischen Krümmungsradien in entsprechenden Punkten einer Kurve und ihrer Abwickelung, und zwar gilt dieser Satz nicht nur für die Kegelflächen und Zylinder, sondern allgemein für jede abwickelbare Fläche.

Satz über die Abwickelung: Zwischen den Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 in entsprechenden Punkten A und A_1 einer Kurve γ einer abwickelbaren Fläche φ und ihrer Abwickelung γ_1 besteht die Relation

$$\varrho = \varrho_1 \cos\nu, \tag{1}$$

wo ν den Neigungswinkel der Schmiegungsebene von γ in A gegen die Tangentialebene der Fläche in A bedeutet.

2. Zum Beweise denken wir uns (Fig. 284) die Ausbreitung der Fläche auf eine Ebene η bereits so weit ausgeführt, daß die Kurve γ auf der einen Seite von A, etwa mit dem Bogen AB, bereits abgewickelt ist, während der auf der anderen Seite von A liegende Bogen AC mitsamt der Fläche noch auf η_1 niedergedrückt werden soll. Je näher nun C auf γ bei A liegt und je mehr also AC als Stück einer Geraden aufgefaßt werden kann, desto genauer fällt die

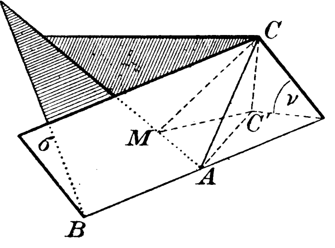


Fig. 284.

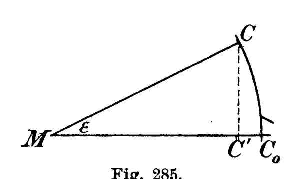


Fig. 285.

exakte Umlegung C_0 von C (Fig. 285) mit der Orthogonalprojektion C' (Fig. 284) von C auf η_1 zusammen. Es wird nämlich C bei der Umlegung des ganzen Flächenstücks sich um einen gewissen Punkt M drehen, der bereits in der Ebene liegt, und MC in die Endlage $MC_0 = MC$ übergehen, auf der auch die Orthogonalprojektion C' von MC liegt (Fig. 284 und 285). Bezeichnet ε den bei der Abwickelung gegen Null konvergierenden Winkel C_0MC, so ist der Unterschied Δ zwischen der genauen Umlegung MC_0 von MC und der durch Orthogonalprojektion erzielten Annäherung MC'

$$\delta = MC_0 - MC' = MC(1 - \cos\varepsilon) = 2MC\sin^2\frac{\varepsilon}{2},$$

wofür man auch, da der Sinus eines sehr kleinen Winkels gleich dem Bogen ist,

$$\delta = \tfrac{1}{2}MC\,\varepsilon^2$$

setzen kann. Im Vergleich zu der sehr kleinen Strecke MC ist also der Fehler S ungeheuer viel kleiner und verschwindet vollständig, wenn C sich dem Punkte A nähert. Daraus entnehmen wir die Berechtigung, die abgewickelte Kurve in der Nähe von A als Orthogonalprojektion von γ auf die Ebene η_1 aufzufassen. Bei dem vorgeschrittenen Zustande der Abwickelung haben Originalkurve und Abwickelung in A die Tangente AB gemein, die Ebene η_1 ist Tangentialebene der Fläche in A und die Ebene ABC geht, je näher B und C an A rücken, in die Schmiegungsebene der Kurve in A über. Daher ist der Satz 2 des § 88 anwendbar und damit unser Satz bewiesen.

3. Die erste Anwendung dieses Satzes betreffe einen geraden Kreiszylinder und eine auf ihm liegende Ellipse ε (Fig. 286). Der Zylinder ζ stehe auf der Tafel Π_1, seine Basiskurve sei ein Kreis $\varkappa$ vom Radius r. Eine auf Π_2 senkrechte Ebene φ mit den Spuren f_1, f_2

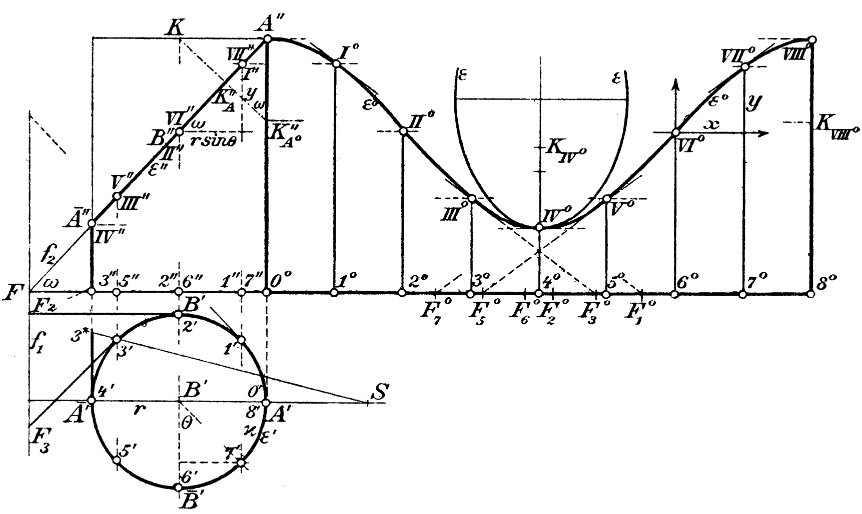


Fig. 286.

treffe den Zylinder in einer Ellipse ε, deren höchster und tiefster Punkt über Π_1 mit A und $\bar{A}$ bezeichnet seien. Der Grundriß ε' der Schnittellipse ε ist mit $\varkappa$ identisch, der Aufriß verjüngt sich zu der Strecke $A''\bar{A}''$.

Die Gerade $A\bar{A}$ ist die Hauptachse der Ellipse, die Nebenachse nennen wir $B\bar{B}$. Bezeichnet ω den Neigungswinkel von φ (und f_2) gegen die erste Tafel, so sind

$$(2) \qquad a = \frac{r}{\cos \omega}, \quad b = r$$

die Halbachsen der Ellipse, der Krümmungsradius in A ist also $\varrho_A\, b^2/a = r \cos \omega$.

Das ergibt sich auch auf Grund des Satzes 4, § 88: Denn die Tangente der Ellipse in A läuft zu Π_1 parallel, der durch diese Tangente gehende Normalschnitt des Zylinders ist daher zu Π_1 parallel und trifft den Zylinder in einem zu $\varkappa$ kongruenten Kreise; der Winkel zwischen diesem Normalschnitt und dem schrägen Schnitt, der die Ellipse liefert, ist ω, daher nach § 88, (28):

$$(3) \qquad \varrho_A = r \cos \omega.$$

Der Krümmungsradius in B ist nach 88, (3):

(4) $$\varrho_B = \frac{a^2}{b} = \frac{r}{\cos\omega^2}.$$

Auch das folgt aus § 88, Satz 5. Denn die Ebene der Ellipse enthält die Zylindernormale des Punktes B, die zu Π_1 parallel ist; die Ebene der Ellipse erzeugt also in B einen Normalschnitt; der Hauptschnitt in B ist zu Π_1 parallel und schneidet einen Kreis vom Radius r heraus. Zwischen beiden Schnitten besteht die Neigung ω, also ist nach 88, (29) in der Tat $\varrho_B = r/\cos\omega^2$.

4. Abwickelung des Rotationszylinders. Diese Ausführungen sollten nur zur Illustration der Sätze des vorigen Paragraphen dienen. Wir schneiden jetzt den Zylinder längs der Geraden AA' auf, um ihn auf die Aufrißebene auszubreiten. Die Abwickelung ist ein Rechteck von der Höhe des Zylinders und der Länge $2\pi r$. Die Achse x wollen wir zur Grundlinie dieses Rechtecks machen. Da zugleich die Abwickelung der Ellipse ε konstruiert werden soll, so teilen wir die Basis $\varkappa$ des Zylinders von A' beginnend in 8 gleiche Teile mit den Teilpunkten $0', 1', \ldots, 8'$, wobei $8'$ mit $0'$ zusammenfällt, und verwandeln den Bogen $3'4'$ nach Bd. II, Fig. 118 in eine Strecke $4'3^*$, indem wir auf $\bar{A}'A'$ die Strecke $A'S = r$ abtragen und die Gerade $S3'$ ziehen, die die Tangente von $\bar{A}'$ in 3^* trifft. Dann tragen wir $4'3^*$ auf der x-Achse 8 mal hintereinander ab: die Teilpunkte werden dort mit $0^0, 1^0, \ldots, 8^0$ bezeichnet. In ihnen errichten wir auf x die Lote 0^0A^0,[1]) $0^0\mathrm{I}^0, 0^0\mathrm{II}^0, \ldots, 0^0\mathrm{VIII}^0$, deren Endpunkte $A^0, \mathrm{II}^0, \ldots, \mathrm{VIII}^0$ auf den Parallelen zur x-Achse durch die Punkte $A'', \mathrm{I}'', \ldots, \mathrm{VIII}''$ liegen, in denen die Gerade $A''\bar{A}''$ von den Loten aus $A', 1', \ldots, 8'$ auf die x-Achse getroffen wird. Es sind also $A, \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{VIII}$ die Punkte der Ellipse, die mit den Punkten $A', 1', 2', \ldots, 8'$ des Kreises auf derselben Geraden des Zylinders liegen, und $A^0, \mathrm{I}^0, \ldots, \mathrm{VIII}^0$ sind die entsprechenden Punkte der Abwickelung. Die Abwickelung der Ellipse ist daher eine wellenförmige Kurve ε^0, die bei A^0 und VIII^0 ein Maximum, bei IV^0 ein Minimum hat.

5. Tangenten der Abwickelung der Ellipse. Da die Tangenten der Ellipse ganz in der Ellipsenebene liegen, diese aber die Tafel Π_1 in der Geraden f_1 trifft, so schneidet auch jede Tangente diese Gerade; z. B. trifft die Tangente von III die Gerade f_1 in einem Punkte F_3, so daß $\mathrm{III}3'F_3$ ein rechtwinkeliges Dreieck ist, dessen Kathete $3'F_3$ den Kreis $\varkappa$ in $3'$ berührt. Denken wir dieses aus Papier ausgeschnitten und längs $\mathrm{III}3'$ an den Zylinder geklebt, so wird es bei der Ausbreitung des Zylinders auf die Ebene sich ohne

1) In unserer Figur ist A^0 mit A'' identisch angenommen.

Zerrung mit ausbreiten, und die Gerade IIIF_3 wird zur Tangente der Kurve ε^0 in III^0. Dabei fällt das Dreieck, wie die Figur zeigt, nach der Seite der Geraden III$^0 3^0$, auf der 4^0 liegt, während z. B. das Dreieck VI$^0 6^0 F_6{}^0$ auf die Seite von VI$^0 6^0$ zu liegen kommt, auf der 5^0 liegt. Indem wir dies beachten, tragen wir auf x von 3^0 aus nach der richtigen Seite $3^0 F_3{}^0 = 3' F_3$ ab. Dann ist III$^0 F_3{}^0$ die Tangente von ε^0 in III^0.

6. Die Krümmungsradien der abgewickelten Ellipse wollen wir nur in ausgezeichneten Punkten bestimmen. Die Schmiegungsebene der Ellipse in allen ihren Punkten, also auch in A, ist die Ellipsenebene selber; die Tangentialebene des Zylinders in A berührt diesen längs der Geraden AA', steht auf Π_2 senkrecht und bildet mit der Ellipsenebene den Winkel $\nu = 90^0 - \omega$. Nach (1) folgt aus (3):

(5) $$\varrho_{A^0} = \varrho_A : \cos \nu = r \operatorname{ctg} \omega.$$

Die Strecken ϱ_A und ϱ_{A^0} können aus r durch eine einzige Gerade abgeleitet werden: Sei K der Punkt, in welchem die Achse des Zylinders von der durch A gehenden zu Π_1 parallelen Ebene getroffen wird; dann trifft das Lot aus K auf die Ellipsenebene die Hauptachse im Krümmungszentrum K_A von A, da

$$AK_A = r \cos \omega = \varrho_A,$$

und den Zylindermantel in einem Punkte K_{A^0}, so daß

$$AK_{A^0} = r \operatorname{ctg} \omega = \varrho_{A^0}$$

ist. Dementsprechend ist in der Figur $K_A'' A'' = \varrho_A$, $K_{A^0}'' A'' = \varrho_{A^0}$. Damit ist ϱ_{A^0} gefunden; ϱ_{A^0} ist aber nicht nur Krümmungsradius der abgewickelten Kurve in A^0 und VIII^0, sondern auch im tiefsten Punkte IV^0 der Kurve, für den ebenfalls $\nu = 90^0 - \omega$ ist.

Die Tangentialebene des Zylinders in B berührt diesen längs BB' und ist zu Π_2 parallel. Da die Ellipsenebene auf Π_1 senkrecht steht, so ist sie auch zu dieser Tangentialebene senkrecht, daher ist für B der Winkel $\nu = 90^0$ und nach (1)

$$\varrho_{B^0} = \infty.$$

Dasselbe gilt für den Punkt $\overline{B}$. Daher ist der Krümmungsradius der Abwickelung in II^0 und VI^0 unendlich, d. h. die Kurve fällt dort auf eine erhebliche Strecke hin zeichnerisch je mit einer Geraden zusammen. Diese Geraden berühren und schneiden die Kurve in den Punkten II^0 und VI^0, denn die Krümmungskreise von A^0 und VIII^0 liegen auf der einen Seite der Kurve, der Krümmungskreis von IV^0 liegt auf der anderen Seite, und zwischen diesen

Punkten muß es je eine Übergangsstelle geben, wo der Krümmungskreis weder auf der einen, noch auf der anderen Seite liegt; das sind eben die Punkte II^0 und VI^0, die deshalb Wendepunkte genannt werden. Läßt man einen Punkt P von A^0 auf der Kurve über $I^0, \ldots$ nach VIII^0 gehen und achtet auf seine Tangente, so dreht sich diese anfangs im Uhrzeigersinne um P; in II^0 jedoch kommt diese Drehung auf einen Augenblick zum Stillstand und ändert den Sinn: von II^0 bis IV^0 dreht sich die Tangente gegen den Umlaufsinn des Uhrzeigers, um dann in VI^0 abermals den Drehsinn zu ändern. Ein neuer Grund, II^0 und VI^0 als Wendepunkte zu bezeichnen. Ihre Tangenten, die Wendetangenten, bilden mit der x-Achse den Winkel ω, da die zu ihrer Konstruktion dienenden Dreiecke $II^0 2^0 F_2^0$ und $VI^0 6^0 F_6^0$ mit dem Dreieck $B'' 6'' F$ der Figur kongruent sind.

7. Es bleibt noch übrig, die Gleichung der abgewickelten Kurve aufzustellen. Da es, wie der Augenschein lehrt, wünschenswert ist, die Kurve mit einer Sinuslinie zu vergleichen, so legen wir den Anfangspunkt O des Koordinatensystems durch VI^0, ziehen die x-Achse zur trennenden Achse des Zweitafelsystems parallel, die y-Achse dazu senkrecht. Um jetzt etwa von VII^0 die Koordinaten zu berechnen, bezeichnen wir den Zentriwinkel zu $6'7'$ mit θ. Dann ist für den Punkt VII^0:

$$x = 6^0 7^0 = 6'7' = r\theta,$$

während y im Aufriß des Zylinders als Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks mit der Hypotenuse $VI'' VII''$ erscheint, dessen andere Kathete die Länge $r \sin \theta$ hat und mit der Hypotenuse den Winkel ω einschließt. Daher ist

$$y = r \sin \theta \operatorname{tg} \omega,$$

also

$$y = r \operatorname{tg} \omega \sin \frac{x}{r} \tag{6}$$

die Gleichung der Kurve ε^0. Für $r = 1$ und $\omega = 45^0$ ist das die gewöhnliche Sinuslinie, von der wir also mit unseren Hilfsmitteln jetzt unschwer zu jedem Punkte das Krümmungszentrum konstruieren könnten. Doch wollen wir darauf nicht näher eingehen. —

Um vollständig zu sein, ist in Figur 286 schließlich auch noch die Schnittellipse ε in ihrer wahren Gestalt eingetragen, und zwar in der Stelle IV^0 der Abwickelung.

8. Abwickelung des geraden Kreiskegels. In der Grundrißebene liege der Basiskreis $\varkappa$ eines geraden Kreiskegels; der Grundriß S' der Kegelspitze S ist der Mittelpunkt von $\varkappa$. Dieser Kegel werde von einer Ebene η geschnitten, die auf der Aufrißebene Π_2 senkrecht

steht. Ihre erste Spur e_1 steht dann senkrecht auf der trennenden Achse x des Zweitafelsystems und trifft sie in einem Punkte, durch den e_2 geht; möge das der Punkt A'' sein, dessen erste Projektion A' der Schnittpunkt von $\varkappa$ mit dem zu x parallelen Durchmesser von $\varkappa$ ist. Es soll die Schnittkurve des Kegels mit η dargestellt und samt dem Kegel abgewickelt werden (Fig. 287).

9. Darstellung der Schnittkurve. Der Aufriß der Schnittkurve fällt auf die Gerade e_2. Daher ist nur noch der Grundriß zu

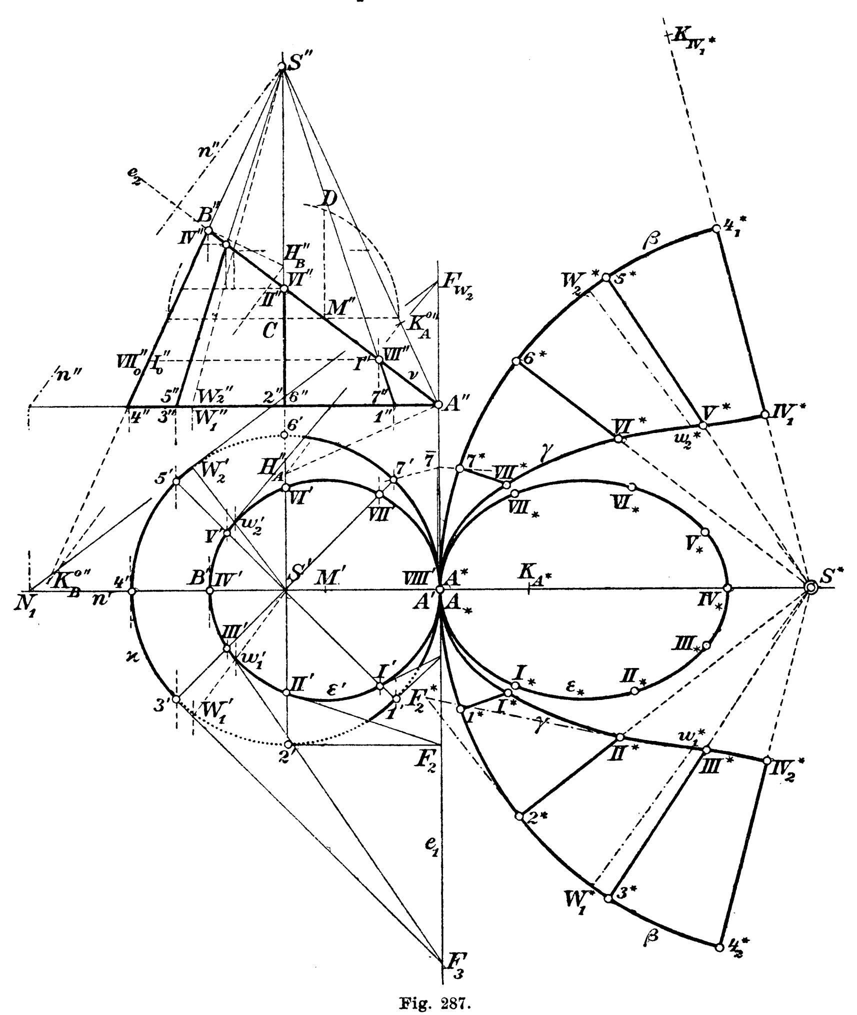


Fig. 287.

bestimmen. Man findet beliebig viele Punkte der Schnittkurve, indem man beliebig viel Strahlen des Kegels mit η

zum Schnitt bringt. Dazu ist die Kenntnis der Eigenschaften der Schnittkurve nicht erforderlich. Bei unserer Anlage der Figur ist es eine Ellipse ε, eine Tatsache, von der wir zunächst keinen Gebrauch machen wollen. Um eine übersichtliche Figur zu bekommen, teilen wir den Umfang von $\varkappa$ in gleiche Teile, etwa in acht, und bezeichnen die Teilpunkte von A' beginnend und im Umlaufsinne des Uhrzeigers mit $0'$, $1'$, ..., $8'$, wo $0'$ und $8'$ mit A' identisch sind. Zu diesen Punkten des Basiskreises bestimmen wir auf x die Aufrisse, von denen $1''$ mit $7''$, $2''$ mit $6''$, $3''$ mit $5''$ zusammenfällt. Dann werden die Kegelstrahlen SA, $S1$, $S2$, ..., $S7$ mit der Ebene zum Schnitt gebracht; das dazu dienende Verfahren zeigen wir an $S1$ und $S7$. Die Projektionen von $S1$ sind $S'1'$ und $S''1''$. Da der Schnittpunkt I von $S1$ mit η seinen Aufriß auf e_2 hat, so ist I″ der Schnittpunkt von $S''1''$ mit e_2; aus I″ findet man dann auf $S'1'$ den Grundriß I′ von SI. Da $S''1''$ mit $S''7''$ zusammenfällt, so ist I″ zugleich als Aufriß VII″ des Punktes VII zu bezeichnen, in dem η von SVII getroffen wird, und das Lot aus I″ auf x, das auf $S'1'$ den Punkt I′ festlegt, schneidet zugleich $S'7'$ in VII′. In dieser Weise sind die Schnittpunkte I, II, ..., VII der Ellipse mit den Strahlen $S1$, $S2$, ..., $S7$ in der Figur dargestellt worden. Durch die acht Punkte A', I′, II′, ..., VII″ ist die Gestalt des Grundrisses ε' der Schnittkurve ε schon ziemlich klar bestimmt, und sie wird es noch mehr, wenn wir die Tangenten dieser Punkte konstruieren.

10. Tangenten der Schnittkurve. Die Tangenten der Schnittkurve ε — daß es eine Ellipse ist, soll immer noch nicht benutzt werden — liegen mit ε in der Ebene η, treffen also die erste Spur e_1 der Ebene in je einem Punkte, dessen Konstruktion wir etwa am Beispiel der Tangente des Punktes III zeigen wollen. Die Tangente von III liegt nämlich zugleich auch in der Ebene, die den Kegel längs der Geraden SIII berührt, und diese Ebene enthält auch die Tangente des Kreises $\varkappa$ im Punkte $3'$. Die Tangenten von $\varkappa$ und ε' in $3'$ und III′ liegen daher in einer Ebene und treffen sich in einem Punkte F_3 der Geraden e_1, der aber durch die Kreistangente des Punktes $3'$ allein schon bestimmt ist. Nunmehr kann man F_3III′, den Grundriß der Tangente F_3III, ziehen. Nach diesem Verfahren sind in der Figur auch die Tangenten von I′ und II′ konstruiert.

11. Abwickelung des Kegels. Da alle Punkte des Basiskreises $\varkappa$ von der Spitze S des Kegels gleichen Abstand haben, so wird die Abwickelung des längs SA gespaltenen Kegels ein Kreissektor sein. Die Gerade S^*A^* des abgewickelten Kegelmantels lassen wir der Anschaulichkeit wegen in die Verlängerung von $S'A'$ fallen, und zwar falle A^* mit A' zusammen. Der Radius des Kreissektors

ist S^*A^*, der Bogen heiße β; dieser ist also die Abwickelung von $\varkappa$. Daher wird β gleich dem Umfange von $\varkappa$ sein. Es gilt also, auf dem Kreise β um S^* mit dem Radius S^*A^* einen Bogen zu finden, der dem Umfange von $\varkappa$ gleich ist. Das geschieht, indem wir den Bogen $7'A'$ von $\varkappa$ erst in eine Strecke $\overline{7}A'$ auf der Tangente e_1 des Kreises $\varkappa$ verwandeln und diese Strecke rückwärts in einen gleichen Bogen 7^*A^* von β überführen. Zu diesem Zwecke tragen wir auf $S'A'$ von $4'$ aus nach links $4'U = 4'S'$ ab (nicht in der Figur) und verbinden U mit $7'$. Diese Gerade trifft e_1 in dem Punkte $\overline{7}$. Diesen verbinden wir mit dem Punkte V (nicht in der Figur) auf A^*S^*, der von A^* den Abstand $3 \times A^*S^*$ hat, und diese Linie trifft den Kreis β in 7^*. Indem wir jetzt den Bogen A^*7^* von A^* aus nach beiden Seiten je viermal auf β abtragen, erhalten wir den Kreisbogen $4_1^*5^*6^*7^*A^*1^*2^*3^*4_2^*$, der gleich dem Umfange von $\varkappa$ ist. Damit ist der Kegelmantel auf die Ebene Π_1 ausgebreitet.

12. Die Abwickelung der Schnittkurve ε erfolgt, indem man auf den Strahlen S^*1^*, S^*2^*, ..., S^*7^*, S^*A^* des verebneten Kegels die Abstände SI, SII, ..., SVII, SVIII der Kegelspitze von den Punkten I, II, ..., VIII der Schnittkurve abträgt. Wie diese Abstände gefunden werden, zeigen wir am Strahle SVII. Zunächst ist zu bemerken, daß sich die Länge SIV unmittelbar aus der Figur entnehmen läßt: $S\text{IV} = S''\text{IV}''$, weil SIV zu Π_2 parallel ist. Auf diesen Fall führen wir den des Strahles SVII durch Drehung zurück: der Kegel wird um seine Achse SS' gedreht, bis SVII in die Lage des Strahles SIV kommt. Dabei bewegt sich VII″ auf einer Parallelen zur trennenden Achse und fällt schließlich, als VII_0'', auf den Umrißstrahl $S''4''$ des Kegels. Also ist $S\text{VII} = S''\text{VII}_0''$. — Nach dieser Vorschrift werden die Abstände des Punktes S von I, II, ... ermittelt und dann von S^* aus auf den nach 1^*, 2^*, ... gehenden Radien abgetragen. Die Endpunkte I*, II*, ... bestimmen die Abwickelung γ der Kurve ε. Ihre Form wird noch schärfer fixiert durch die

13. Tangenten von γ. Denkt man sich, um die Tangente von γ in II* zu ermitteln, das rechtwinkelige Dreieck II$F_2$2, dessen Grundriß II′$F_2$2′ wir in der Figur sehen, aus Papier ausgeschnitten und mit seiner Kathete II2 längs der Geraden $S2$ an den Kegel geklebt, so wird es bei der Ausbreitung des Kegelmantels auf die Ebene Π_1 sich ohne Verzerrung mit ausbreiten und daher in eine Lage II*F_2^*2* übergehen, in der es zu II$F_2$2 immer noch kongruent ist, und, was die Hauptsache ist, mit seiner Hypotenuse F_2^*II* die Kurve γ in II* berührt. Von diesem Dreieck können wir aber sofort die Kathete $2^*F_2^*$ auf der Tangente des Kreises β von 2^* aus in der

Länge $2^* F_2^* = 2' F_2$ abtragen, wodurch es vollständig bestimmt ist; $F_2^*\mathrm{II}^*$ ist dann die gesuchte Tangente. Ein Blick auf den Grundriß zeigt, daß das Dreieck nach der Seite der Geraden $S^* 2^*$ abzutragen ist, auf der 1^* liegt. Die Tangenten erleichtern sehr die wirkliche Zeichnung der Kurve.

14. Die Krümmungsradien von γ ließen sich für jeden Punkt der Kurve ohne große Mühe angeben. Wir beschränken uns aber auf die ausgezeichneten Punkte A^* und IV_1^*, IV_2^*. Das glückt wiederum, ohne daß wir zu wissen brauchen, ob ε eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Um die Krümmung der Schnittkurve ε in A beurteilen zu können, haben wir den Hauptschnitt des Kegels in A einzuführen, dessen Ebene in A auf SA und damit auf Π_2 senkrecht steht. Seine zweite Spur ist also das in A'' auf $S''A''$ errichtete Lot $A''H_A''$. Mit diesem Hauptschnitte hat der Basiskreis $\varkappa$ des Kegels in A die Tangente e_1 gemein; der Krümmungsmittelpunkt zu A von $\varkappa$ — d. h. das Zentrum dieses Kreises — ist daher nach § 88, Satz 4 die Orthogonalprojektion des zu A gehörigen Krümmungszentrums H_A des Hauptschnittes. Folglich ist H_A der Schnittpunkt der Ebene des Hauptschnittes mit der Kegelachse, und so ist H_A'' in der Figur eingetragen.

Projiziert man H_A auf die Ebene η der Schnittkurve ε, so erhält man den zu A gehörigen Krümmungsmittelpunkt K_A der Kurve ε (§ 88, Satz 4) — der im Aufriß zur Entlastung der Figur weggelassen werden mußte —, da ε mit dem Hauptschnitte die Tangente e_1 gemein hat. Für die Abwickelung kommt der Neigungswinkel ν der Ebene der Kurve ε gegen die Tangentialebene des Kegels längs SA in Betracht. Diese Ebenen stehen auf Π_2 senkrecht, der Winkel ν ist gleich $\sphericalangle S''A''\mathrm{IV}''$ und nach dem Satze über die Abwickelung ist $AK_A/\cos\nu$ der gesuchte Krümmungsradius des Punktes A^* der Abwickelung. Das aus H_A'' auf e_2 gefällte Lot, das e_2 in K_A'' trifft, schneidet $A''S''$ in einem Punkte $K_A^{0\prime\prime}$, so daß $A''K_A^{0\prime\prime}$ der zu A^* gehörige Krümmungsradius von γ ist; in der Figur ist $A^*K_{A^*} = A''K_A^{0\prime\prime}$ gemacht, und K_{A^*} ist das Krümmungszentrum zum Punkte A^* der Kurve γ.

Faßt man $K_A^{0\prime\prime}$ als Aufriß eines Punktes K_A^0 der Geraden SA auf, so ist K_A^0 der Punkt der Kegelfläche, der bei ihrer Abwickelung zum Krümmungsmittelpunkt des Punktes A der Schnittkurve wird. Es folgt:

Die Normalebene in einem Punkte A auf einem Strahle SA eines geraden Kreiskegels, die nach § 88, 10. den durch A gehenden Hauptschnitt des Kegels ent-

hält, trifft die Kegelachse im Krümmungszentrum H_A dieses Hauptschnittes. Hat ein schräger Schnitt ε des Kegels mit diesem Hauptschnitte in A die Tangente gemein, so trifft das Lot aus H_A auf die Ebene von ε diese Ebene und den Kegelstrahl SA in den zu A gehörigen Krümmungszentren K_A und K_A^0 der Kurve ε und ihrer Abwickelung γ, wobei K_A^0 erst nach erfolgter Abwickelung diese Bedeutung übernimmt.

Dieser schöne Satz ist auf den Punkt IV anwendbar, den wir auch mit B bezeichnen. Errichtet man also auf $S''B''$ in B'' das Lot, und fällt man aus seinem Schnittpunkte H_B'' mit $S''S'$ auf e_2 das Lot, so trifft dieses den Strahl $S''B''$ in $K_B^{0''}$, und wenn man auf $S^*4_1^*$ (in der Abwickelung) von IV_1^* aus $\mathrm{IV}_1^* K_{\mathrm{IV}_1^*} = \mathrm{IV}'' K_B^{0''}$ abträgt, so ist $K_{\mathrm{IV}_1^*}$ das Krümmungszentrum zu IV_1^*. Dieselbe Konstruktion gilt natürlich auch für den Punkt IV_2^*, der ja nur eine andere Auffassung des Punktes IV_1^* darstellt.

15. Wendetangenten. Diese Betrachtung ließe sich mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie unschwer — wie bemerkt — auf die anderen Punkte der Kurve γ übertragen, doch möge es mit dem Mitgeteilten sein Bewenden haben, da dabei nichts prinzipiell neues herauskommt. Dagegen wollen wir noch auf eine für das praktische Zeichnen wichtige Frage eingehen. Die Kurve γ muß zwischen den Punkten A^* und IV_1^*, da ihre Krümmungskreise zu verschiedenen Seiten von γ liegen, einen Wendepunkt besitzen, wie wir das auch bei der Abwickelung des Zylinders gefunden hatten. Nach der dort gemachten Erfahrung entspricht diesem Wendepunkte ein solcher Punkt w von ε, daß die den Kegel längs wS berührende Ebene auf der Ebene von ε senkrecht steht ($\nu = 90^0$ in (1) gibt, wie wir verlangen, einen unendlich großen Krümmungsradius der Abwickelung). Solcher Tangentialebenen gibt es in unserer Figur zwei. Jede auf der Ebene η von ε senkrechte Tangentialebene des Kegels enthält nämlich die aus S auf η gefällte Normale n, und durch n gehen nur zwei Tangentialebenen des Kegels — falls n außerhalb des Kegels liegt, was in unserer Figur angenommen ist; liegt n innerhalb des Kegels, so gibt es keine Tangentialebene der gesuchten Art und auch keine Wendepunkte, was zur Folge hat, daß alsdann alle Krümmungszentra der Kurve γ auf derselben Seite dieser Kurve liegen. In unserer Figur liegt n außerhalb des Kegels, was man daran erkennt, daß der Aufriß n'' von n, der auf e_2 senkrecht steht, außerhalb des Aufrisses der Kegelfläche liegt. Der Grundriß n' von n ist mit $A'4'$ identisch. Auf ihm liegt der erste Spurpunkt N_1 von n. Legt man nun aus N_1 an $\varkappa$ die Tangenten $N_1 W_1'$, $N_1 W_2'$, so bestimmen diese

mit S die gesuchten Tangentialebenen. Die Aufrisse der Punkte W_1', W_2' des Kreises $\varkappa$ liegen auf der Achse x, und der Strahl $S'' W_1'' = S'' W_2''$ trifft e_2 im Aufrisse $w_1'' = w_2''$ (nicht in der Figur) der Punkte w_1, w_2 von ε, die bei der Abwickelung in Wendepunkte übergehen. Die Grundrisse w_1', w_2' dieser Punkte können jetzt auf $S' W_1'$ und $S' W_2'$ konstruiert werden. Die Punkte W und w werden dann ebenso in die Abwickelung übertragen wie 1 und I, und die Tangenten von γ in w_1 und w_2, die Wendetangenten, werden nach 13. gefunden. Sie sind die zeichnerisch wichtigsten Tangenten der Kurve, deren Gestalt nunmehr hinreichend festgelegt ist.

16. Soll schließlich auch noch die wahre Gestalt der Schnittkurve gezeichnet werden, so könnte man auch das ausführen, ohne sich über ihre geometrische Bedeutung Rechenschaft zu geben. Man hätte sogar nach 14. sofort die Krümmungszentra zu A und B. Doch wollen wir, um die Figur nicht zu überfüllen, jetzt davon Gebrauch machen, daß es sich um eine Ellipse handelt. Ihre Hauptachse ist gleich $A''B''$. Ist M ihre Mitte, M'' also die von $A''B''$, so wird die Ebene der Ellipse von der durch M gelegten Parallelebene π zu Π_1 in der kleinen Achse der Ellipse geschnitten, die als Sehne des umzuklappenden Schnittkreises der Ebene π leicht zu finden ist, siehe Figur 287. Sie ist auch kleine Achse des Grundrisses ε. Die natürliche Gestalt von ε ist als ε_* in die Abwickelung des Kegels gezeichnet unter Hervorhebung der Punkte I, II, ..., die zur Darstellung von γ gedient hatten.

Dreizehnter Abschnitt.

Graphische Statik.

§ 90. **Zusammensetzung der Kräfte mittels Krafteck und Seileck. Gleichgewichtsbedingungen.**

1. Die graphische Statik hat das Ziel, Aufgaben der Statik auf dem Wege der geometrischen Konstruktion zu lösen. Ihre Grundlage ist die bildliche Darstellung der Kräfte durch Vektoren. Wenn man die Kräfte, mit denen sich die Mechanik befaßt, unter dem Bilde gerichteter Strecken betrachtet, so findet das Zusammenwirken mehrerer Kräfte an einem Punkte, wie wir im zweiten Abschnitte gesehen haben, seinen einfachsten Ausdruck im Parallelogrammgesetze. Um aber Kräfte durch Vektoren zu geometrischen Größen zu machen, ist ein Kräftemaßstab erforderlich, der angibt, durch wieviel Längeneinheiten die Krafteinheit dargestellt werden soll. Die Entscheidung hierüber ist vollkommen willkürlich, denn es gibt zwischen der Längeneinheit und der Krafteinheit keinerlei Beziehung, mag man nun die Kraft im absoluten Maße messen, oder, wie es in der graphischen Statik mit Rücksicht auf die Technik üblich ist, in Kilogrammen (vergl. § 17, 1.). Angesichts dieser Willkür verdient es hervorgehoben zu werden, daß es bei der Abbildung von Kräften durch Vektoren gleichgültig ist, was für ein Kräftemaßstab zugrunde gelegt wird. Denn wenn die Krafteinheit einmal durch p, einmal durch q Längeneinheiten dargestellt wird, wo p und q positive Zahlen bedeuten, so wird ein System von Kräften, die an einem Punkte O wirken, durch zwei Systeme von gerichteten Strecken abgebildet, die zueinander ähnlich und ähnlich gelegen sind mit O als Ähnlichkeitspunkt, indem eine Kraft von k Krafteinheiten einmal durch eine Strecke von kp, beim anderen Kraftmaßstabe durch kq Längeneinheiten auf derselben Geraden repräsentiert wird.

2. Die Verbildlichung der Kräfte durch Vektoren bildet die Grundlage der graphischen Statik. Die an einem Massenpunkte angreifenden Kräfte verhalten sich wie Vektoren an einem Punkte (§ 2), die Kräfte, die an einem starren Körper wirken, wie linienflüchtige

Vektoren (§ 3). Denn das Wesen des starren Körpers in streng statischer Auffassung besteht darin, daß zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte mit derselben Angriffslinie, die auf den starren Körper wirken, einander aufheben. Hat man also an einem starren Körper eine Kraft $\boldsymbol{k}$ mit einem Angriffspunkte A, so füge man auf der Angriffslinie a von $\boldsymbol{k}$ in A die entgegengesetzt gleiche Kraft hinzu, in einem anderen Punkte B von a dagegen die Kraft $\boldsymbol{k}$ selber. Die beiden hinzugefügten Kräfte heben einander auf; andererseits aber hebt die erste das ursprünglich gegebene $\boldsymbol{k}$ auf, so daß nur das nach B verlegte $\boldsymbol{k}$ übrig bleibt, d. h. mit anderen Worten: Man darf jede Kraft an einem starren Körper auf ihrer Angriffslinie verschieben, nur darf der Angriffspunkt den Körper nicht verlassen.

3. Wie man Kräfte in einer Ebene mittels des Summationsecks und des Situationsecks zusammensetzt, ist im ersten Abschnitte dieses Bandes ganz allgemein gezeigt worden. Das Summationseck von Kräften wird auch **Krafteck** oder Kräftepolygon genannt, das Situationseck heißt **Seileck**[1]) oder **Seilpolygon**, aus einem Grunde, den wir im Anschluß an Figur 22 (S. 28) auseinandersetzen wollen. Ist dort $u_0 u_1 u_2 \ldots u_n$ ein Seil, das an den Enden von u_0 und u_n festgehalten wird, während man es an den Punkten $S_1, S_2, \ldots, S_n$ in den Richtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den Kräften $\mathbf{01}, \mathbf{12}, \ldots, (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{n}$ anspannt, so nimmt es die Gestalt des Seilecks $u_0 S_1 S_2 \ldots S_n u_n$ an. Dabei müssen die Enden des Seils mit den Kräften $\boldsymbol{P}\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{nP}$ gespannt werden. In jede andere Strecke des Seilecks fallen zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, die die Strecke zu verlängern suchen, sogenannte Zugkräfte. Man gebraucht jedoch den Namen Seileck auch für Situationsecke, in deren Seiten Druckkräfte fallen, d. h. Paare entgegengesetzt gleicher Kräfte, die die betreffende Seite zu verkürzen streben.

4. Auf das Verfahren der Kräftesummation mittels Krafteck und Seileck brauchen wir nicht mehr einzugehen. Sind Kräfte in einer Ebene zu summieren, die nicht an demselben Punkte angreifen, so ist nach § 4, 5. ein Lageplan der Angriffslinien erforderlich, auf welchen das Seileck sich gründet. Dieser Lageplan wird in den seltensten Fällen in natürlicher Größe gezeichnet werden können, in der Regel muß er eine ähnliche Verkleinerung des natürlichen Lageplanes sein. Dem so verkleinerten Lageplan muß dann der

1) Der Kraftecke und Seilecke hat sich zuerst P. Varignon bedient (1725). Der eigentliche Begründer der graphischen Statik ist aber Karl Culmann, geb. 1821 in Bergzabern (Rheinpfalz). Er war von 1854 bis zu seinem Tode (1881) Professor der Ingenieurwissenschaften in Zürich. Sein Hauptwerk, die „Graphische Statik", erschien 1866.

Längenmaßstab beigegeben werden, der erkennen läßt, wieviel Meter jedem Millimeter des Planes in der Wirklichkeit entsprechen.

Wie der Kräftemaßstab, so ist auch der Längenmaßstab auf das Ergebnis der Konstruktion ohne Einfluß. Man denke nämlich etwa Fig. 23 (S. 31) als Konstruktion der Resultante von Kräften $\mathbf{01}, \mathbf{12}, \ldots, (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{n}$ mit den Angriffslinien $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ändert man zunächst den Kräftemaßstab, so wird das Krafteck $\mathbf{012} \ldots \boldsymbol{n}$, wenn man seinen Anfangspunkt $\mathbf{0}$ beibehält, in ein ähnliches und ähnlich gelegenes mit $\mathbf{0}$ als Ähnlichkeitspunkt übergehen; statt P wähle man den zu P ähnlich gelegenen Punkt als Pol des neuen Kraftecks. Nun ändern wir auch den Längenmaßstab. Dann wird auch das System der Geraden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch ein ähnliches ersetzt (aber in einem anderen Ähnlichkeitsverhältnisse), wobei wir x_1 als beiden Systemen gemeinsam annehmen dürfen. Das neue Seileck wird dem alten ebenfalls ähnlich, die neue Lage der Resultante wird zu der alten homolog sein. Zwar wird der Vektor, der die Resultante verbildlicht, eine andere Länge haben, seine Richtung ist aber die alte, und die jener Länge entsprechende Kraft, worauf es schließlich allein ankommt, ist ebenfalls die alte. Alles das ist eine einfache Folge der beiden Ähnlichkeiten, die wir festgestellt haben.

5. Gleichgewicht von Kräften an einem Punkte. Kräfte stehen im Gleichgewicht, wenn die ihnen entsprechenden Vektoren den Vektor Null zur Summe haben. Greifen die Kräfte an einem Punkte 0 an, während ihre Angriffslinien zugleich in einer Ebene liegen, so ist ihre Summe gleich der Schlußlinie (§ 1, 6.) des Kraftecks. Soll diese den Vektor Null ergeben, so muß die letzte Ecke des Kraftecks, etwa A_n in Figur 7, mit der ersten zusammenfallen. Man sagt dann, das Krafteck schließe sich (§ 4, 1.). Schließt sich das Krafteck, so ist umgekehrt die Resultante gleich Null.

Das Zusammenfallen von A_n mit O in Figur 7 (S. 10) kann auch durch die Forderung erzwungen werden, daß die Parallelprojektionen der Seiten des Kraftecks auf zwei Geraden OX_n, OY_n je einen geschlossenen Streckenzug $OX_1 \ldots X_n$ und $OY_1 \ldots Y_n$ bilden, dessen letzter Punkt mit dem ersten zusammenfällt; d. h. die Komponenten der Kräfte auf jenen beiden Geraden müssen je für sich die Resultante Null haben. Diese Forderung ist nicht nur ausreichend, um Gleichgewicht herbeizuführen, sondern auch notwendig. Es genügt nämlich nicht, wenn der Streckenzug $OX_1 \ldots X_n$ sich schließt, um das Zusammenfallen von A_n mit O zu sichern, da, falls X_n mit O zusammenfällt, A_n noch jede Lage auf der Geraden OY_n haben könnte. Wenn auch noch $OY_1 \ldots Y_n$ sich schließt, ist das unmöglich.

Ein einfaches Kriterium des Gleichgewichtes unsers Kräftesystems ergibt sich auch aus dem Satze von den statischen Momenten, § 2, 7.

Danach muß im Falle des Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der Kräfte in Bezug auf irgend einen Drehpunkt P gleich Null sein. Diese Bedingung ist aber nicht ausreichend. Denn wenn sie für einen gewissen Punkt P erfüllt ist, kann gleichwohl das Kräftesystem eine von Null verschiedene Resultante haben, falls P auf ihr liegt. Die Resultante geht natürlich durch den Angriffspunkt O dieser Kräfte. Ist nun die Momentensumme auch noch für einen Punkt Q gleich Null, der nicht auf der Geraden OP liegt, so kann durch ihn eine etwa vorhandene Resultante nicht hindurchgehen, muß also ein von Null verschiedenes Moment bezüglich Q haben, falls sie nicht Null ist. Sie ist aber gleich Null, weil ihr Moment gleich der Momentensumme ist. Durch das Verschwinden der Momentensumme bezüglich Q ist also das Gleichgewicht garantiert.

Alles das zusammenfassend haben wir also den

Satz 1. Wenn in einer Ebene ein System von Kräften gegeben ist, die an demselben Punkte O angreifen, so besteht Gleichgewicht stets und nur dann, wenn eine der Bedingungen I., II., III. erfüllt ist:

I. Ein Krafteck des Systems muß sich schließen.

II. Die Komponenten dieser Kräfte auf zwei Geraden x und y durch O haben je die algebraische Summe Null.

III. Die Momentensummen der Kräfte in zwei Punkten P und Q, die mit O nicht in einer Geraden liegen, sind Null.

Mit jeder dieser Bedingungen sind auch die beiden anderen erfüllt.

6. Gleichgewicht in der starren Ebene. Ein wichtiger Hilfsbegriff der Statik ist der der starren Ebene. Diese wird aus der ebenen Oberfläche eines starren Körpers erhalten, wenn man sich diese bis ins Unendliche ausgedehnt denkt, so daß in dieser Ebene liegende Kräfte uneingeschränkt als linienflüchtige Vektoren behandelt werden können. Für das Gleichgewicht in der starren Ebene gilt der

Satz 2. Ein System von Kräften in einer starren Ebene befindet sich im Gleichgewichte stets und nur dann, wenn eine der Bedingungen I., II., III. erfüllt ist:

I. Es schließt sich je ein Krafteck und ein Seileck.

II. Die Komponenten der Kräfte nach den drei Seiten eines Dreiecks haben je die algebraische Summe Null.

III. Die Momentensummen bezüglich dreier Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, sind Null.

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, sind auch die übrigen verwirklicht.

Zum Beweise von I. bemerken wir zunächst, daß es nicht ausreicht, wenn ein Krafteck sich schließt; es könnte dann das Kräftesystem immer noch auf ein eigentliches Gegenpaar zurückführbar sein, wie wir in Figur 24 (S. 32) sehen. Das wird verhindert durch die Forderung, daß die letzte Seite u_n des Seilecks mit der ersten u_0 zusammenfallen soll. Das Gegenpaar wird dann zu einem uneigentlichen, das auf derselben Angriffslinie wirkt und sich daher aufhebt.

7. Zur Vorbereitung des Beweises von II. und III. stellen wir uns die Aufgabe: eine Kraft $\boldsymbol{k}$ nach den drei Seiten eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ zu zerlegen (Fig. 288).

Es gilt, auf A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 drei Kräfte $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ zu bestimmen, deren Resultante $\boldsymbol{k}$ ist. Wären sie bekannt, so würde man die Probe machen können, indem man ein Krafteck **0123** anlegt mit $\mathbf{01} = \boldsymbol{k}_1$ als erster, $\mathbf{12} = \boldsymbol{k}_2$ als zweiter, $\mathbf{23} = \boldsymbol{k}_3$ als dritter Seite; dann wäre $\mathbf{03} = \boldsymbol{k}$. Nun muß aber die Resultante $\boldsymbol{R}_{23}$ von $\boldsymbol{k}_2$ und $\boldsymbol{k}_3$ auf der Geraden A_1U_1 liegen, wo U_1 den Schnittpunkt von $\boldsymbol{k}$ mit A_2A_3 bezeichnet; denn sie muß jedenfalls durch A_1 gehen, und wenn U_1' ihr Schnittpunkt mit A_2A_3 ist, so muß die Resultante $\boldsymbol{R}$ von $\boldsymbol{R}_{23}$ und $\boldsymbol{k}_1$ durch U_1' gehen, und da sie mit $\boldsymbol{k}$ identisch sein soll, so fällt U_1' mit U_1 zusammen. Nach Größe und Richtung können wir aber $\boldsymbol{R}_{23}$ auch aus dem Krafteck entnehmen: $\boldsymbol{R}_{23} = \mathbf{13}$. Durch diese Angaben ist aber das Krafteck nach willkürlicher Annahme von **0** bestimmt:

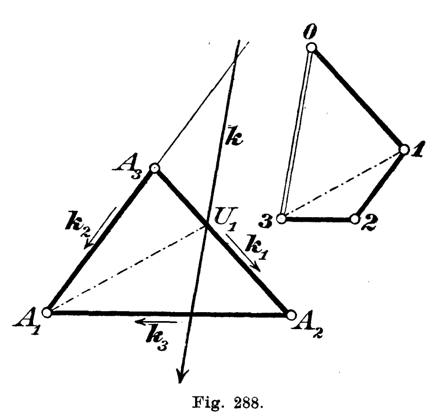


Fig. 288.

> Man mache $\mathbf{03} = \boldsymbol{k}$, ziehe durch **0** zu A_2A_3, durch **3** zu A_1U_1 die Parallele, ziehe durch den Schnittpunkt **1** dieser Parallelen eine weitere Parallele zu A_1A_3, durch **3** eine zu A_1A_2, so treffen sich die beiden letzten Parallelen in einem Punkte **2**, so daß $\boldsymbol{k}_1 = \mathbf{01}$, $\boldsymbol{k}_2 = \mathbf{12}$, $\boldsymbol{k}_3 = \mathbf{23}$ die gesuchten Komponenten sind.

Eine weniger elegante Lösung dieser Aufgabe kann aus Figur 12 (S 17) entnommen werden.

Geht k durch eine Ecke des Dreiecks, so fällt auf die gegenüberliegende Seite keine Komponente.

8. Hat man nun ein vorgelegtes Kräftesystem nach seinen Komponenten auf den Seiten des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ zerlegt, und ist die Komponentensumme auf jeder Seite des Dreiecks Null, so besteht sicher Gleichgewicht. Andererseits reicht es zur Sicherung des Gleichgewichts nicht aus, wenn auf zwei Seiten des Dreiecks, etwa auf $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$, die Summe der Komponenten verschwindet, denn wenn man auf der dritten Seite $A_2 A_3$ eine Kraft annimmt, so hat diese auf $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ keine Komponente und das aus dieser Kraft bestehende System ist trotzdem nicht im Gleichgewicht. Die Bedingung II. ist daher hinreichend und notwendig.

9. Reduziert sich das Kräftesystem auf eine Resultante oder auf ein Gegenpaar, so ist das Moment der Resultante oder des Gegenpaares im Falle III. bezüglich jedes der Punkte A_1, A_2, A_3 gleich Null. Dadurch ist ein eigentliches Kräftepaar ausgeschlossen, da das Moment eines solchen nie verschwinden kann (§ 3, 9.). Aber auch eine von Null verschiedene Resultante ist unmöglich, da eine solche nur dann bezüglich eines Punktes ein verschwindendes Moment hat, wenn der Punkt auf ihr liegt. Da aber A_1, A_2, A_3 nicht zugleich auf dieser Kraft liegen können, so ist diese Annahme ausgeschlossen. Es herrscht also, wenn III. erfüllt ist, Gleichgewicht, während das Verschwinden der Momentensumme in zwei Punkten A_1, A_2 nicht immer ausreicht, um Gleichgewicht herbeizuführen. Denn eine auf $A_1 A_2$ liegende Kraft ist nicht im Gleichgewicht, obwohl sie in A_1 und A_2 das Moment Null hat.

Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen. Der Teil III. dieses Satzes legt die Frage nach der gegenseitigen Abhängigkeit der statischen Momente einer Kraft bezüglich mehrerer Drehpunkte nahe; es muß möglich sein, aus einer gewissen Anzahl dieser Momente die übrigen eindeutig zu berechnen. Diese Frage soll im nächsten Paragraphen erledigt werden. Sie führt in interessante geometrische Zusammenhänge.

§ 91. Graphostatik und Dreieckskoordinaten.

1. Orientierung der Geraden. Jeder Geraden, die im folgenden in Betracht kommen soll, legen wir willkürlich durch einen daran gesetzten Pfeil einen Sinn oder eine Orientierung bei und messen den Abstand eines Punktes von dieser Geraden positiv oder negativ, je nachdem sie vermöge ihrer Orientierung in dem Punkte positiven oder negativen Drehsinn bestimmt (§ 1, 2.). Auf der Ge-

raden nach ihrer Richtung zu blickend hat man die Punkte positiven Abstandes zur Linken, die Punkte negativen Abstandes zur Rechten der Geraden. Die so gemessenen Abstände mögen orientierte Abstände heißen (§ 2, 8.).

2. Orientierung der Flächeninhalte. Um auch dem Flächeninhalte eines Dreiecks ein Vorzeichen beilegen zu können, werden seine Seiten so orientiert, daß sie in einem — und damit in jedem — Punkte der Innenfläche denselben Drehsinn bestimmen. Dieser ist aber durch Orientierung einer Seite bereits festgelegt. Je nachdem nun dieser Drehsinn für die Punkte des Inneren positiv oder negativ ist, wird der orientierte Flächeninhalt positiv oder negativ gemessen.

Der folgenden Betrachtung legen wir ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$ zugrunde (Fig. 289) dessen Inhalt $\varDelta$ positiv orientiert sei. Ist X ein Punkt der Ebene dieses Grunddreiecks, so sollen die drei Dreiecke, die X mit A_1, A_2, A_3 bestimmt, die Orientierung der Seiten des Grunddreiecks beibehalten. Die so orientierten Dreiecke bezeichnen wir mit

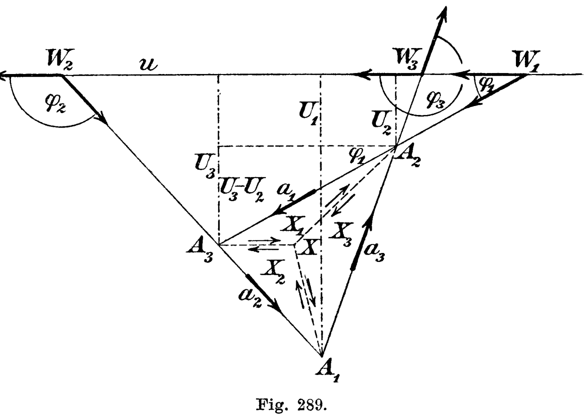


Fig. 289.

(1) $$X_1 = A_2 A_3 X, \quad X_2 = A_3 A_1 X, \quad X_3 = A_1 A_2 X.$$

Für jede Lage von X in der Ebene von $\varDelta$ ist

(2) $$X_1 + X_2 + X_3 = \varDelta.$$

3. Orientierung der Winkel. Die drei Neigungswinkel φ_1, φ_2, φ_3 einer Geraden u gegen die Seiten a_1, a_2, a_3 des Grunddreiecks werden folgendermaßen definiert (Fig. 289): Die orientierte Gerade wird um einen ihrer Punkte in positivem Sinne (gegen den Sinn der Bewegung der Uhrzeiger) gedreht, bis sie zu der orientierten Geraden a_i parallel ist und auch im Sinne mit ihr übereinstimmt (§ 1, 3.). Der Drehwinkel ist dann φ_i $(i = 1, 2, 3)$. Indem man zu u durch A_1, A_2, A_3 die Parallelen zieht und ihnen die Orientierung von u erteilt (§ 1, 3.), erhält man aus der Figur:

$$(3)\quad \begin{cases} \sin\varphi_1 = -\dfrac{U_2 - U_3}{a_1}, & \varphi_2 - \varphi_3 = \alpha_1 \pm 2R, \\ \sin\varphi_2 = -\dfrac{U_3 - U_1}{a_2}, & \varphi_3 - \varphi_1 = \alpha_2 \pm 2R, \\ \sin\varphi_3 = -\dfrac{U_1 - U_2}{a_3}, & \varphi_1 - \varphi_2 = \alpha_3 \pm 2R, \text{ (vgl. Bd. II, § 57, 6)}, \end{cases}$$

wenn U_1, U_2, U_3 die orientierten Abstände der Punkte A_1, A_2, A_3 von u und α_1, α_2, α_3 die Winkel des Grunddreiecks sind. Aus (3) folgt:

$$(4)\quad \begin{cases} a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2 + a_3 \sin\varphi_3 = 0, \\ a_1 U_1 \sin\varphi_1 + a_2 U_2 \sin\varphi_2 + a_3 U_3 \sin\varphi_3 = 0. \end{cases}$$

4. Winkelmessung. Auf der Geraden u nehmen wir eine Kraft $\boldsymbol{k}$ an, die mit der Pfeilrichtung von u übereinstimme; ihre absolute Länge sei k (Fig. 290). Wir zerlegen sie nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren in ihre Komponenten $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ auf den Seiten a_1, a_2, a_3 des Grunddreiecks. Mit positivem oder negativem Vorzeichen gemessen, je nachdem der Sinn der $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ mit dem Sinne der orientierten Seiten a_1, a_2, a_3 übereinstimmt oder nicht, mögen diese Komponenten die Größen k_1, k_2, k_3 haben. Wenn wir die Orientierung der Geraden a_1, a_2, a_3 auch auf die dazu parallelen Seiten **01**, **12**, **23** des Kraftecks übertragen, so haben die so orientierten Seiten des Kraftecks gegen **03** die Neigungen φ_1, φ_2, φ_3, woraus folgt:

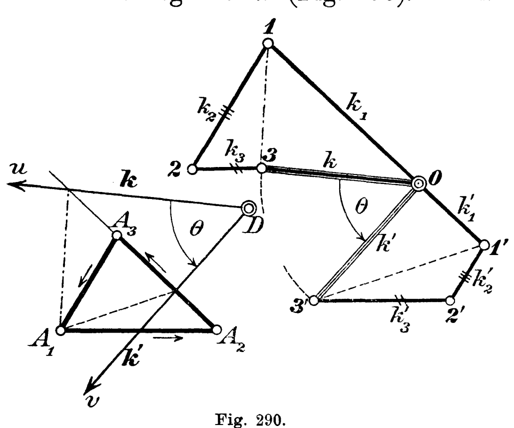


Fig. 290.

$$(5)\qquad k = k_1 \cos\varphi_1 + k_2 \cos\varphi_2 + k_3 \cos\varphi_3.$$

Diese Formel läßt sich noch etwas verallgemeinern: Wir drehen die Gerade u um irgend einen ihrer Punkte D im positiven Sinne durch einen beliebigen Winkel θ in eine neue Lage, die v heißen möge; die neue Lage von $\boldsymbol{k}$ heiße $\boldsymbol{k}'$. Auch $\boldsymbol{k}'$ wird in seine Komponenten $\boldsymbol{k}_1'$, $\boldsymbol{k}_2'$, $\boldsymbol{k}_3'$ auf den Geraden a_1, a_2, a_3 zerlegt, die, wie die $\boldsymbol{k}_i$, in der Richtung der a_i positiv gemessen die Längen k_1', k_2', k_3' haben mögen. Das zu dieser Konstruktion erforderliche Krafteck **0'1'2'3'** möge mit **0123** die Anfangsecke **0** gemeinschaftlich haben. Dann liegt **1'** auf **01**. Ferner ist **1'2'** ∥ **12** ∥ a_2, **2'3'** ∥ **23** ∥ a_3, ∢ **303'** $= \theta$. Bis auf die Richtung sind die Seiten **01'**, **1'2'**, **2'3'** gleich k_1', k_2', k_3',

und wenn man auf **01′**, **1′2′**, **2′3′** die Orientierung von a_1, a_2, a_3 überträgt — wie wir es soeben bei **0123** getan — so haben die so orientierten Seiten des Kraftecks **01′2′3′** gegen **03** die Neigungen φ_1, φ_2, φ_3; die Summe der Orthogonalprojektionen dieser drei Seiten auf **03** ist daher $k_1' \cos\varphi_1 + k_2' \cos\varphi_2 + k_3' \cos\varphi_3$. Andererseits ist diese Summe aber gleich der Orthogonalprojektion von **03′** auf **03**, also gleich $k' \cos\theta$. Daher ist:

$$k' \cos\theta = k_1' \cos\varphi_1 + k_2' \cos\varphi_2 + k_3' \cos\varphi_3, \tag{6}$$

wo k' natürlich $= k$ ist. Für $\theta = 0$ folgt hieraus wieder Formel (5).

Jetzt wenden wir den Momentensatz auf das System der Kräfte $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ und ihre Resultante $\boldsymbol{k}$ an, indem wir den Drehpunkt der Reihe nach mit A_1, A_2, A_3 zusammenfallen lassen. Sind h_1, h_2, h_3 die Höhen des Grunddreiecks, so ist danach:

$$k U_1 = k_1 h_1, \quad k U_2 = k_2 h_2, \quad k U_3 = k_3 h_3, \tag{7}$$

und wenn V_1, V_2, V_3 die orientierten Abstände der Punkte A_1, A_2, A_3 von der orientierten Geraden v bedeuten, findet sich ebenso:

$$k V_1 = k_1' h_1, \quad k V_2 = k_2' h_2, \quad k V_3 = k_3' h_3. \tag{8}$$

Durch Einsetzen der Werte (7) und (8) in (5) und (6) folgt:

$$1 = \frac{U_1}{h_1} \cos\varphi_1 + \frac{U_2}{h_2} \cos\varphi_2 + \frac{U_3}{h_3} \cos\varphi_3, \tag{9}$$

$$\cos\theta = \frac{V_1}{h_1} \cos\varphi_1 + \frac{V_2}{h_2} \cos\varphi_2 + \frac{V_3}{h_3} \cos\varphi_3, \tag{10}$$

oder nach Multiplikation mit $2\varDelta = a_1 h_1 = a_2 h_2 = a_3 h_3$:

$$2\varDelta = a_1 U_1 \cos\varphi_1 + a_2 U_2 \cos\varphi_2 + a_3 U_3 \cos\varphi_3 = \sum_i a_i U_i \cos\varphi_i, \tag{11}$$

$$2\varDelta \cos\theta = a_1 V_1 \cos\varphi_1 + a_2 V_2 \cos\varphi_2 + a_3 V_3 \cos\varphi_3 = \sum_i a_i V_i \cos\varphi_i. \tag{12}$$

Für $\theta = 0$ geht (12) in (11) über. Unter u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 einmal ganz beliebige Variabeln verstehend bilden wir:

$$\begin{gathered} \Phi_{uv} = \Phi_{vu} = \\ \Big(\sum_i a_i u_i \cos\varphi_i\Big)\Big(\sum_i a_i v_i \cos\varphi_i\Big) + \Big(\sum_i a_i u_i \sin\varphi_i\Big)\Big(\sum_i a_i v_i \sin\varphi_i\Big). \end{gathered} \tag{13}$$

Eine kurze Rechnung gibt:

$$\begin{aligned} \Phi_{uv} = a_1^2 u_1 v_1 + a_2^2 u_2 v_2 + a_3^2 u_3 v_3 &+ a_1 a_2 (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &+ a_2 a_3 (u_2 v_3 + u_3 v_2) \cos(\varphi_2 - \varphi_3) \\ &+ a_3 a_1 (u_3 v_1 + u_1 v_3) \cos(\varphi_3 - \varphi_1), \end{aligned}$$

also ist wegen (3) endgültig

$$(14)\quad \Phi_{uv} = a_1^2 u_1 v_1 + a_2^2 u_2 v_2 + a_3^2 u_3 v_3 - a_1 a_2 (u_1 v_2 + u_2 v_1) \cos \alpha_3 - a_2 a_3 (u_2 v_3 + u_3 v_2) \cos \alpha_1 - a_3 a_1 (u_3 v_1 + u_1 v_3) \cos \alpha_2,$$

und speziell

$$(15)\quad \Phi_{uu} = a_1^2 u_1^2 + a_2^2 u_2^2 + a_3^2 u_3^2 - 2 a_1 a_2 u_1 u_2 \cos \alpha_3 - 2 a_2 a_3 u_2 u_3 \cos \alpha_1 - 2 a_3 a_1 u_3 u_1 \cos \alpha_2$$

mit der Definitionsformel (nach (13)):

$$(16)\quad \Phi_{uu} = \Big(\sum_i a_i u_i \cos \varphi_i\Big)^2 + \Big(\sum_i a_i u_i \sin \varphi_i\Big)^2.$$

Hieraus findet man leicht nach den Formeln $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$ und $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$ die Darstellung:

$$(17)\quad \Phi_{uu} = (a_1 u_1 e^{i\varphi_1} + a_2 u_2 e^{i\varphi_2} + a_3 u_3 e^{i\varphi_3})(a_1 u_1 e^{-i\varphi_1} + a_2 u_2 e^{-i\varphi_2} + a_3 u_3 e^{-i\varphi_3}),$$

die besagt, daß Φ_{uu} eine in zwei Linearfaktoren zerfällbare quadratische Form ist.

Das gilt also für ganz beliebige u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3. Jetzt setzen wir insbesondere $u_i = U_i$, $v_i = V_i$. Mit Rücksicht auf (11), (12) und (4) folgt dann aus (13) und (16):

$$(18)\quad 4\Delta^2 \cos \theta = \Phi_{UV}, \quad 4\Delta^2 = \Phi_{UU}.$$

Hiernach ist auch $\Phi_{VV} = 4\Delta^2$, also $\cos \theta = \Phi_{UV} / \sqrt{\Phi_{UU} \Phi_{VV}}$. Setzt man darin:

$$(19)\quad U_i = \alpha u_i, \quad V_i = \beta v_i,$$

so heben sich die Proportionalitätsfaktoren α, β heraus, und man bekommt:

$$(20)\quad \cos \theta = \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu} \Phi_{vv}}}$$

als Formel für den Neigungswinkel zweier Geraden, deren orientierte Abstände U_1, U_2, U_3 und V_1, V_2, V_3 von den Ecken des Grunddreiecks zu u_1, u_2, u_3 bezw. v_1, v_2, v_3 proportional sind:

$$U_1 : U_2 : U_3 = u_1 : u_2 : u_3, \quad V_1 : V_2 : V_3 = v_1 : v_2 : v_3.$$

Die Formel $4\Delta^2 = \Phi_{UU}$ zeigt uns, daß die U_1, U_2, U_3 nicht ganz unabhängig voneinander sind.

Aus (20) sind auch die Kosinus der Neigungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

der Geraden u gegen a_1, a_2, a_3 leicht zu berechnen, worauf wir indessen nicht eingehen wollen.[1])

5. Abstand eines Punktes von einer Geraden. Bezeichnen p, p_1, p_2, p_3 die orientierten Abstände eines Punktes X von den orientierten Geraden u, a_1, a_2, a_3, und ist u die Gerade des vorigen Artikels, auf der eine Kraft $\boldsymbol{k}$ mit den Komponenten $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ angenommen war, so ist nach dem Momentensatze bezüglich X als Drehpunkt:

$$kp = k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3. \tag{21}$$

X sei der in Figur 289 so genannte Punkt, der die drei orientierten Flächen X_1, X_2, X_3 bestimmt; dann ist

$$2X_1 = a_1 p_1, \quad 2X_2 = a_2 p_2, \quad 2X_3 = a_3 p_3, \tag{22}$$

und wenn man in (21) die k_i nach (7) durch die U_i ersetzt, so folgt nach Multiplikation der Gleichung (21) mit $\varDelta$ nach (22):

$$p\varDelta = U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 \tag{23}$$

als Formel zur Berechnung des Abstandes p des Punktes X von der Geraden u. Ist $\omega x_i = X_i$, also

$$x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3, \tag{24}$$

so ist (da $\varDelta = X_1 + X_2 + X_3$):

$$p = \frac{U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \tag{25}$$

oder wenn man nach (18) durch $2\varDelta = \sqrt{\Phi_{UU}}$ dividiert und $U_1 : U_2 : U_3 = u_1 : u_2 : u_3$ einführt:

$$\frac{p}{2\varDelta} = \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)\sqrt{\Phi_{uu}}}. \tag{26}$$

6. Punktkoordinaten. In allen diesen Formeln haben sich die durch X bestimmten Inhalte X_1, X_2, X_3 und die durch u fest-

---

1) Nach (20) ist:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2}}{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

also

$$e^{2i\theta} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

woraus die berühmte Formel von Laguerre folgt:

$$\theta = \frac{1}{2i}\ln\frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

die zur Cayleyschen Auffassung der Metrik hingeführt hat.

gelegten Abstände U_1, U_2, U_3 als so fundamentale Hilfsgrößen bewährt, daß wir ihnen nunmehr unsere Aufmerksamkeit zuwenden müssen. Zunächst stellen wir fest, daß nicht nur der Punkt X die Inhalte X_1, X_2, X_3 bestimmt, sondern umgekehrt die Inhalte X_1, X_2, X_3, die der Bedingung (2) genügen, immer eindeutig einen Punkt X festlegen. Um das einzusehen, hat man nur einem bekannten Gedankengange zu folgen, der zum Satze von Ceva (§ 5, 3.) hinführt. Wir müssen also die Punkte P_1, P_2, P_3 in Betracht ziehen (Fig. 291), in denen die Ecktransversalen des Punktes X die gegenüberliegenden Seiten treffen. Sind l_1 und l_2 die Lote aus A_1 und A_2 auf XA_3, so ist, da sich Dreiecke von gleicher Grundlinie wie die Höhen verhalten:

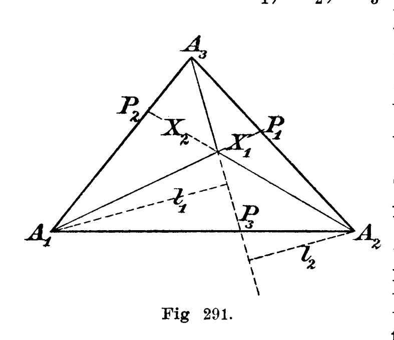


Fig 291.

$$X_2 : X_1 = l_1 : l_2 = A_1 P_3 : P_3 A_2.$$

Nach Ausschaltung des mittleren Verhältnisses ist das auch hinsichtlich der Vorzeichen richtig, wenn man auf den Seiten des Grunddreiecks alle Strecken im Sinne der Orientierung dieser Seiten positiv, im Gegensinne negativ mißt. In dieser verschärften Fassung ist also unter der Voraussetzung (24):

$$(27)\qquad \frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} = \frac{x_1^{-1}}{x_2^{-1}}, \quad \frac{A_2 P_1}{P_1 A_3} = \frac{x_2^{-1}}{x_3^{-1}}, \quad \frac{A_3 P_2}{P_2 A_1} = \frac{x_3^{-1}}{x_1^{-1}}.$$

Hiernach ist

$$(28)\qquad \frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} \cdot \frac{A_2 P_1}{P_1 A_3} \cdot \frac{A_3 P_2}{P_2 A_1} = 1.$$

Das ist nach dem Satze des Ceva das Kriterium dafür, daß die Ecktransversalen $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ sich in einem Punkte X treffen. Teilt man also, von beliebigen positiven oder negativen Größen x_1, x_2, x_3 ausgehend, die Seiten a_1, a_2, a_3 in den Verhältnissen (27), so gehen die Ecktransversalen der drei Teilpunkte P_1, P_2, P_3 durch einen Punkt X derart, daß die von diesem Punkte bestimmten Dreiecke X_1, X_2, X_3 zu x_1, x_2, x_3 proportional sind ((24)), und wenn man $X_i = \alpha x_i$ setzt, so findet man den Proportionalitätsfaktor α nach (2) gleich $\alpha = \varDelta/(x_1 + x_2 + x_3)$.

Die Größen X_1, X_2, X_3, die durch den Punkt X eindeutig bestimmt werden und ihn eindeutig bestimmen, heißen die Dreieckskoordinaten dieses Punktes; da aber schon die zu den X_1, X_2, X_3 proportionalen Größen x_1, x_2, x_3, für die also

$x_1 : x_2 : x_3 = X_1 : X_2 : X_3$ ist, zur eindeutigen Konstruktion von X vollkommen ausreichen, so werden sie ebenfalls als Koordinaten verwendet und mögen von den „absoluten“ X_1, X_2, X_3 als „relative“ unterschieden werden. Die Einführung relativer Koordinaten ist notwendig, wenn auch die unendlich fernen Punkte in Betracht gezogen werden sollen. Die drei Ecktransversalen eines unendlich fernen Punktes teilen die drei Seiten des Grunddreiecks in ganz bestimmten Verhältnissen, aus denen sich die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ berechnen lassen, während die absoluten Koodinaten unendlich groß sind. Zieht man z. B. die Ecktransversalen nach dem unendlich fernen Punkte der Geraden u (Fig. 292) des vorangehenden Artikels, d. h. also die Parallelen durch A_1, A_2, A_3 zu u, und treffen sie die Gegenseiten in den Punkten P_1, P_2, P_3, so sind, wenn x_1, x_2, x_3 die Relativkoordinaten des unendlich fernen Punktes von u bezeichnen, die Gleichungen (27) erfüllt. Da aber $A_3 P_3$, wie u selber, zu a_1 und a_2 die Neigungswinkel φ_1 und φ_2 hat, so ist:

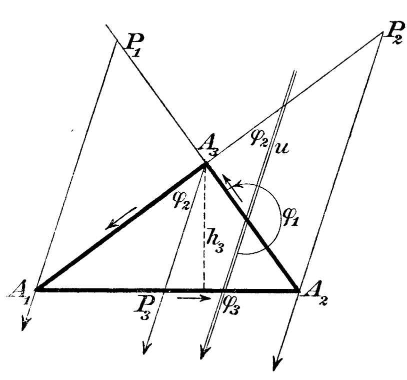


Fig. 292.

$$\frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} = \frac{\frac{1}{2} A_1 P_3 \cdot h_3}{\frac{1}{2} P_3 A_2 \cdot h_3} = \frac{\text{Dreieck } A_1 A_3 P_3}{\text{Dreieck } P_3 A_3 A_2} = \frac{\frac{1}{2} a_2 \cdot A_3 P_3 \sin \varphi_2}{\frac{1}{2} a_1 \cdot A_3 P_3 \sin \varphi_1} = \frac{a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \sin \varphi_1},$$

also nach (27):

$$x_2 : x_1 = a_2 \sin \varphi_2 : a_1 \sin \varphi_1,$$

und ebenso

$$x_2 : x_3 = a_2 \sin \varphi_2 : a_3 \sin \varphi_3,$$

also:

(29) $$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 \sin \varphi_1 : a_2 \sin \varphi_2 : a_3 \sin \varphi_3.$$

Das sind die relativen Koordinaten des unendlich fernen Punktes einer Geraden, die gegen a_1, a_2, a_3 die Neigungswinkel φ_1, φ_2, φ_3 hat, und nach (4) ist

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

7. Linienkoordinaten. Eine Gerade u (Fig. 293) mit den Abständen U_1, U_2, U_3 von A_1, A_2, A_3 teilt die Seiten a_1, a_2, a_3 des Grunddreiecks in drei Punkten G_1, G_2, G_3 nach den Verhältnissen:

(30) $$\frac{A_1 G_3}{G_3 A_2} = -\frac{U_1}{U_2}, \quad \frac{A_2 G_1}{G_1 A_3} = -\frac{U_2}{U_3}, \quad \frac{A_3 G_2}{G_2 A_1} = -\frac{U_3}{U_1},$$

falls wiederum auf a_1, a_2, a_3 alle Strecken im Sinne dieser Dreiecksseiten positiv, im Gegensinne negativ gemessen werden. Aus (30) folgt:

$$(31) \qquad \frac{A_1 G_3}{G_3 A_2} \cdot \frac{A_2 G_1}{G_1 A_3} \cdot \frac{A_3 G_2}{G_2 A_1} = -1.$$

Weiß man von den drei Teilpunkten G_1, G_2, G_3 nur, daß sie die Bedingung (31) erfüllen, aber nicht, daß sie in einer Geraden liegen, so ist, falls G_3' den Schnittpunkt der Geraden $G_1 G_2$ mit a_3 bezeichnet, auch

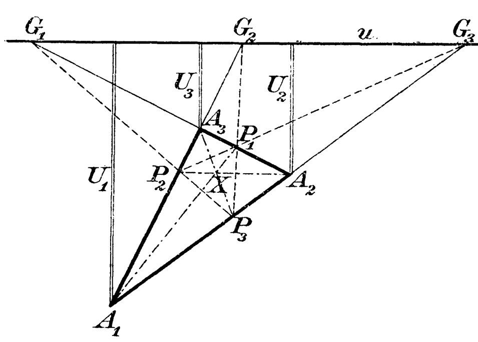


Fig. 293.

$$(32) \quad \frac{A_1 G_3'}{G_3' A_2} \cdot \frac{A_2 G_1}{G_1 A_3} \cdot \frac{A_3 G_2}{G_2 A_1} = -1,$$

also nach (31) und (32):

$$A_1 G_3 : G_3 A_2 = A_1 G_3' : G_3' A_2.$$

Da es aber nur einen Punkt gibt, der eine Strecke $A_1 A_2$ auch dem Vorzeichen nach in bestimmtem Verhältnis teilt, so folgt hieraus, daß G_3' mit G_3 zusammenfällt, d. h. die Formel (31) hat stets für die Punkte G_1, G_2, G_3 zur Folge, daß sie in einer Geraden liegen. Das ist der

Satz des Menelaos. Wenn drei Punkte G_1, G_2, G_3 der drei Seiten a_1, a_2, a_3 eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ die Gleichung (31) erfüllen, so liegen sie auf einer Geraden, und umgekehrt.

Ist nun $u_1 : u_2 : u_3 = U_1 : U_2 : U_3$, und teilt man die Seiten a_1, a_2, a_3 in G_1, G_2, G_3 nach (30) in den Verhältnissen:

$$(33) \qquad \frac{A_1 G_3}{G_3 A_2} = -\frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{A_2 G_1}{G_1 A_3} = -\frac{u_2}{u_3}, \quad \frac{A_3 G_2}{G_2 A_1} = -\frac{u_3}{u_1},$$

so liegen G_1, G_2, G_3 auf einer Geraden, und ihre Abstände U_1, U_2, U_3 können gefunden werden, indem man $U_i = \varepsilon u_i$ setzt und zur Berechnung des Proportionalitätsfaktors ε die Formel (18) anwendet, welche Φ_{UU} mit dem Inhalte Δ in Beziehung setzt. Danach ist:

$$\varepsilon^2 = \frac{4 \Delta^2}{\Phi_{uu}}.$$

Da also eine Gerade die Größen U_1, U_2, U_3 stets eindeutig bestimmt und durch sie eindeutig bestimmt wird, da ferner zur Bestimmung der Geraden die Größen u_1, u_2, u_3 ausreichen, wenn nur $u_1 : u_2 : u_3 = U_1 : U_2 : U_3$, so werden die U_1, U_2, U_3 als absolute, die u_1, u_2, u_3 als relative Dreiecks-

koordinaten der Geraden bezeichnet. Die Koordinaten des Punktes heißen Punktkoordinaten, die Geraden der Linie entsprechend Linienkoordinaten. Die Formel (26) gibt den Abstand des Punktes X mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 von der Geraden u mit den Koordinaten u_1, u_2, u_3 an. Die Gerade geht daher durch den Punkt, der Punkt liegt auf der Geraden, wenn $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ ist. Den Punkt mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 werden wir kurz als Punkt (x_1, x_2, x_3) bezeichnen, die Gerade mit den Koordinaten u_1, u_2, u_3 kurz als Gerade (u_1, u_2, u_3).

8. Die Momentensummen. Eine erste Anwendung der Dreieckskoordinaten soll die Momentensumme M eines ebenen Kräftesystems bezüglich eines Drehpunktes X betreffen, wenn die Momentensummen M_1, M_2, M_3 bezüglich der Ecken A_1, A_2, A_3 des Grunddreiecks als Drehpunkte gegeben sind. Ist $\mathfrak{k}$ eine dieser Kräfte, k ihre absolut genommene Größe, so orientieren wir ihre Angriffslinie u im Sinne von $\mathfrak{k}$. Dann folgt durch Multiplikation von (25) mit k

$$kp = \frac{k\,U_1 \cdot x_1 + k\,U_2 \cdot x_2 + k\,U_3 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Hier steht links das Moment von $\mathfrak{k}$ in X, rechts sind $k\,U_1$, $k\,U_2$, $k\,U_3$ die Momente von $\mathfrak{k}$ in A_1, A_2, A_3. Stellt man für die übrigen Kräfte des Systems die entsprechenden Formeln auf, so ergibt sich durch Addition aller dieser Ausdrücke:

$$M = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Wenn die Momente einer Kraft oder die Momentensummen eines ebenen Systems in den Ecken eines Grunddreiecks gleich M_1, M_2, M_3 sind, so ist das Moment oder die Momentensumme im Punkte (x_1, x_2, x_3) gegeben durch

$$M = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{x_1 + x_2 + x_3}, \tag{34}$$

und die Gleichung der Kraft oder der Resultante ist daher

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 = 0. \tag{34'}$$

9. Die Dreieckspolaren. Konstruiert man in der Figur 293 zu den Punkten G_1, G_2, G_3 die Punkte P_1, P_2, P_3 (Fig. 294), die von G_1, G_2, G_3 durch A_2 und A_3, bezw. A_3 und A_1, A_1 und A_2 harmonisch getrennt werden, so ist wegen (33):

$$\frac{A_1 P_3}{P_3 A_2} = + \frac{u_1}{u_2}, \quad \frac{A_2 P_1}{P_1 A_3} = + \frac{u_2}{u_3}, \quad \frac{A_3 P_2}{P_2 A_1} = + \frac{u_3}{u_1},$$

und die Ecktransversalen von P_1, P_2, P_3 gehen daher nach dem Satze von Ceva durch einen Punkt (x_1, x_2, x_3), für den nach (27)

$$x_1^{-1} : x_2^{-1} : x_3^{-1} = u_1 : u_2 : u_3$$

ist. Dieser Punkt heißt der Dreieckspol der Geraden (u_1, u_2, u_3), diese die Dreieckspolare des Punktes (x_1, x_2, x_3). Dreieckspol (x_1, x_2, x_3) und Dreieckspolare (u_1, u_2, u_3) sind also aneinander geknüpft durch die Beziehung:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{u_1} : \frac{1}{u_2} : \frac{1}{u_3}. \tag{35}$$

Wie man sieht, drückt sich diese projektive Eigenschaft in einer eleganten Form aus, während die metrischen Ausdrücke ziemlich kompliziert sind. Trotzdem wollen wir noch die wichtigsten Grundformeln der Metrik angeben, weil in ihnen eine erhebliche Rechenarbeit verdichtet ist, die bei Untersuchungen über die Dreiecksgeometrie sich als nützlich erweist.

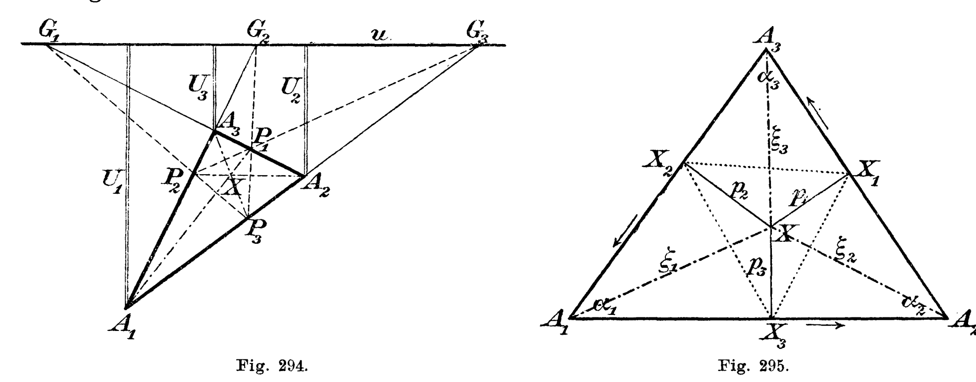


Fig. 294. Fig. 295.

10. Die Eckenabstände eines Punktes (Fig. 295). Zur Berechnung des Abstandes $\xi_1 = \overline{XA_1}$ fällen wir aus X auf a_2 und a_3 die Lote $\overline{XX_2}$, $\overline{XX_3}$ und beachten, daß die vier Punkte A_1, X_2, X, X_3 auf einem Kreise mit dem Durchmesser ξ_1 liegen. Daher ist nach den Formeln (10), § 31 des zweiten Bandes $\overline{X_2X_3} = \xi_1 \sin \alpha_1$; andererseits ergibt aber der Kosinussatz, wenn p_1, p_2, p_3 die orientierten Abstände des Punktes X von den Seiten des Grunddreiecks sind:

$$\xi_1^2 \sin \alpha_1^2 = \overline{X_2X_3}^2 = p_2^2 + p_3^2 + 2p_2p_3 \cos \alpha_1.$$

Hierin setzen wir $\sin \alpha_1 = a_1/2r$, wo r den Umkreisradius von $A_1A_2A_3$ bedeutet, multiplizieren mit $\frac{1}{4}a_2^2a_3^2$ und beachten, daß $a_ip_i/2 = X_i$ ist. Dann wird:

$$\xi_1^2 \frac{a_1^2a_2^2a_3^2}{16r^2} = a_2^2X_3^2 + a_3^2X_2^2 + 2a_2a_3X_2X_3 \cos \alpha_1.$$

Nach Bd. II, § 24, (8) oder § 31, 3. ist $a_1 a_2 a_3 / 4r = \varDelta$, und nach dem Kosinussatze: $2 a_2 a_3 \cos \alpha_1 = a_2^2 + a_3^2 - a_1^2$, also:

$$(36) \quad \begin{aligned} \xi_1^2 \varDelta^2 &= a_2^2 X_3^2 + a_3^2 X_2^2 + (a_2^2 + a_3^2 - a_1^2) X_2 X_3 \\ &= a_2^2 (X_3^2 + X_2 X_3) + a_3^2 (X_2^2 + X_2 X_3) - a_1^2 X_2 X_3 \\ &= (X_2 + X_3)(a_2^2 X_3 + a_3^2 X_2) - a_1^2 X_2 X_3 \\ &= (X_1 + X_2 + X_3)(a_2^2 X_3 + a_3^2 X_2) \\ &\qquad - (a_1^2 X_2 X_3 + a_2^2 X_3 X_1 + a_3^2 X_1 X_2). \end{aligned}$$

Daher ist:

$$(37) \quad \begin{cases} \xi_1^2 \varDelta^2 = (X_1 + X_2 + X_3)(a_2^2 X_3 + a_3^2 X_2) - \Omega_{XX}, \\ \xi_2^2 \varDelta^2 = (X_1 + X_2 + X_3)(a_3^2 X_1 + a_1^2 X_3) - \Omega_{XX}, \\ \xi_3^2 \varDelta^2 = (X_1 + X_2 + X_3)(a_1^2 X_2 + a_2^2 X_1) - \Omega_{XX}, \\ \text{wo } \Omega_{xx} = a_1^2 x_2 x_3 + a_2^2 x_3 x_1 + a_3^2 x_1 x_2. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn t_1, t_2, t_3 willkürliche Veränderliche sind:

$$(38) \begin{cases} \varDelta^2 (\xi_1^2 t_1 + \xi_2^2 t_2 + \xi_3^2 t_3) = 2(X_1 + X_2 + X_3) \Omega_{Xt} - (t_1 + t_2 + t_3) \Omega_{XX} \\ \text{wo} \\ 2 \Omega_{xy} = a_1^2 (x_2 y_3 + x_3 y_2) + a_2^2 (x_3 y_1 + x_1 y_3) + a_3^2 (x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{cases}$$

gesetzt wird; für $y_i = x_i$ geht Ω_{xy} in das Ω_{xx} von (37) über.

Setzt man in (38) links $\varDelta = X_1 + X_2 + X_3$, und $X_i = \omega x_i$, so hebt sich ω^2 heraus; also bleibt:

$$(39) \quad \begin{cases} x^2 (\xi_1^2 t_1 + \xi_2^2 t_2 + \xi_3^2 t_3) = 2x \Omega_{xt} - t \Omega_{xx}, \\ \text{wo} \quad x = x_1 + x_2 + x_3, \quad t = t_1 + t_2 + t_3, \\ \text{daher:} \quad \xi_1^2 x_1 + \xi_2^2 x_2 + \xi_3^2 x_3 = \dfrac{\Omega_{xx}}{x}. \end{cases}$$

11. Abstand zweier Punkte X, Y. Auf diese Formeln läßt sich die Berechnung des Abstandes d der Punkte X und Y zurückführen, indem man durch A_1 eine Parallele zu XY zieht und auf ihr $\overline{A_1 Z} = \overline{XY}$ abträgt (Fig. 296). Der Punkt Z hat dann, wie in der Figur sichtbar gemacht ist, die Koordinaten

$$Z_2 = Y_2 - X_2, \quad Z_3 = Y_3 - X_3,$$

also ist nach (2)

$$Z_1 = Y_1 - X_1 + \varDelta.$$

Nach (37) ist daher

$$(40) \qquad d^2 \varDelta^2 = (Z_1 + Z_2 + Z_3)(a_2^2 Z_3 + a_3^2 Z_2) - \Omega_{ZZ},$$

wo

$$(41)\quad \Omega_{ZZ} = a_1^2(Y_2 - X_2)(Y_3 - X_3) + a_2^2(Y_3 - X_3)(Y_1 - X_1 + \varDelta) + a_3^2(Y_1 - X_1 + \varDelta)(Y_2 - X_2)$$
$$= a_1^2(Y_2 - X_2)(Y_3 - X_3) + a_2^2(Y_3 - X_3)(Y_1 - X_1) + a_3^2(Y_1 - X_1)(Y_2 - X_2) + \varDelta(a_2^2(Y_3 - X_3) + a_3^2(Y_2 - X_2)).$$

Beachtet man nun, daß $Z_1 + Z_2 + Z_3 = \varDelta$ ist, so folgt hieraus:

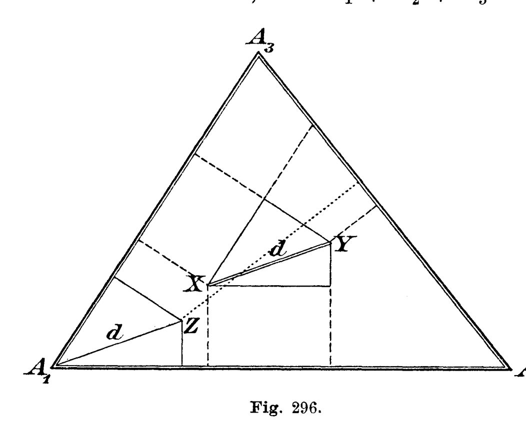


Fig. 296.

$$-d^2\varDelta^2 = a_1^2(Y_2 - X_2)(Y_3 - X_3) + a_2^2(Y_3 - X_3)(Y_1 - X_1) + a_3^2(Y_1 - X_1)(Y_2 - X_2),$$

und eine leichte Rechnung ergibt:

$$(42)\quad d^2\varDelta^2 = -\{\Omega_{YY} - 2\,\Omega_{YX} + \Omega_{XX}\}.$$

Das ist im wesentlichen die gewünschte Formel für den Abstand. Wir erweitern sie noch mit $\varDelta^2$ und setzen rechts teils $\varDelta = X_1 + X_2 + X_3 = X$, teils $\varDelta = Y_1 + Y_2 + Y_3 = Y$ ein:

$$d^2\varDelta^4 = -\{X^2\Omega_{YY} - 2\,XY\Omega_{XY} + Y^2\Omega_{XX}\} = d^2X^2Y^2.$$

Diese Gleichung ist in den X_i und Y_i homogen und je vom zweiten Grade. Daher:

$$(43)\quad \begin{cases} d^2 = -\dfrac{x^2\Omega_{yy} - 2\,xy\,\Omega_{xy} + y^2\Omega_{xx}}{x^2y^2}, \\ \text{wo} \\ x = x_1 + x_2 + x_3, \quad y = y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Das ist die Formel für den Abstand d der Punkte (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3).

12. Der Kreis. Zugleich ist dies die Gleichung des Kreises, wenn man (x_1, x_2, x_3) als Zentrum festhält und d als Radius nimmt. Sie läßt sich noch in eine übersichtlichere Form bringen. Sei π_i die Potenz dieses Kreises in A_i und π die Potenz in einem beliebigen Punkte Z. Dann ist:

$$(44)\quad \begin{cases} \pi_i = \xi_i^2 - d^2, \\ \pi = \overline{XZ}^2 - d^2, \end{cases}$$

also

(45) $$\pi = \pi_i + \overline{XZ}^2 - \xi_i^2$$
und
$$\pi(z_1 + z_2 + z_3) = (\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3) + (z_1 + z_2 + z_3)\overline{XZ}^2 - (\xi_1{}^2 z_1 + \xi_1{}^2 z_2 + \xi_1{}^2 z_3).$$
Hierin wird $\overline{XZ}^2$ nach (43) und $\xi_1{}^2 z_1 + \xi_1{}^2 z_2 + \xi_1{}^2 z_3$ nach (39) berechnet. Dann kommt:
$$\pi z = \pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3 - \frac{x^2 \Omega_{zz} - 2xz\Omega_{xz} + z^2 \Omega_{xx}}{x^2 z} - \frac{2x\Omega_{xz} - z\Omega_{xx}}{x^2},$$
oder endlich:
$$\pi z^2 = (\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3) z - \Omega_{zz}.$$
Es folgt:

Der Kreis, der in A_1, A_2, A_3 die Potenzen π_1, π_2, π_3 hat, hat in einem beliebigen Punkte (z_1, z_2, z_3) die Potenz π, die sich berechnet aus

(46) $$\pi z^2 = (\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3) z - \Omega_{zz}, \quad z = z_1 + z_2 + z_3.$$

Die Gleichung dieses Kreises ist also:

(47) $$(\pi_1 z_1 + \pi_2 z_2 + \pi_3 z_3) z - \Omega_{zz} = 0,$$

da jeder Punkt des Kreises die Potenz Null hat.

Die Gleichung des Umkreises von $A_1 A_2 A_3$ ist

(48) $$\Omega_{zz} = 0.$$

Haben (46) und (48) im Punkte (x_1, x_2, x_3) gleiche Potenz π, so ist:
$$\pi x^2 = (\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3) x - \Omega_{xx} \quad \text{und} \quad \pi x^2 = -\Omega_{xx},$$
also entweder $x = 0$ oder

(49) $$\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3 = 0.$$

Das ist demnach der Ort gleicher Potenz für beide Kreise, d. h. die Potenzlinie von (46) und (48), indem man von der unendlich fernen Geraden $x = 0$ als Potenzlinie absieht.

13. Der Ausdruck Ω_{XX} läßt sich anschaulich deuten (Fig. 297): Fällt man aus X auf a_1, a_2, a_3 die Lote mit den Fußpunkten X_1, X_2, X_3, so ist der Inhalt J des Dreiecks $X_1 X_2 X_3$ gleich
$$J = \tfrac{1}{2} p_1 p_2 \sin\alpha_3 + \tfrac{1}{2} p_2 p_3 \sin\alpha_1 + \tfrac{1}{2} p_3 p_1 \sin\alpha_2,$$
oder, da $a_i p_i = 2X_i$, $a_i = 2r \sin\alpha_i$ ist, wenn r den Radius des Umkreises von $A_1 A_2 A_3$ bezeichnet:
$$J r a_1 a_2 a_3 = a_1{}^2 X_2 X_3 + a_2{}^2 X_3 X_1 + a_3{}^2 X_1 X_2 = \Omega_{XX}.$$
Da $a_1 a_2 a_3 = 4r\Delta$, so folgt hieraus die Formel

(50) $$\Omega_{XX} = 4r^2 \Delta J,$$

die Ω_{XX} mit dem Inhalte des Dreiecks $X_1 X_2 X_3$ in Beziehung setzt.

Die Gleichung $\Omega_{xx} = 0$ des Umkreises sagt demnach aus, daß für jeden Punkt X dieses Kreises der Inhalt des Dreiecks $X_1 X_2 X_3$ verschwindet, daß also die Punkte X_1, X_2, X_3 in gerader Linie liegen, d. h.:

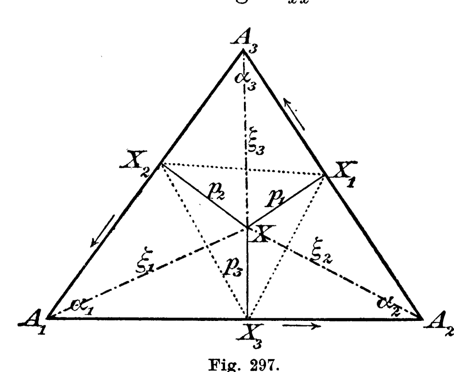


Fig. 297.

Fällt man von einem Punkte des Umkreises auf die Seiten eines Dreiecks die Lote, so liegen ihre Fußpunkte in einer Geraden, der sog. Simpsonschen Geraden.

Auf weitere Einzelheiten der Dreiecksgeometrie können wir nicht eingehen.

§ 92. Astatik.

1. Satz 1. Wenn zwei durch Vektoren versinnlichte Kräfte $\boldsymbol{k}_1$ und $\boldsymbol{k}_2$ in einer Ebene liegen und sich im gleichen Drehsinne und mit dem gleichen Drehwinkel um ihre Angriffspunkte A_1, A_2 drehen (Fig. 298), so dreht sich auch ihre Resultante im gleichen Drehsinne und mit dem gleichen Drehwinkel um einen festen Punkt ihrer Angriffslinie, den wir als astatischen Mittelpunkt der beiden Kräfte bezeichnen wollen.

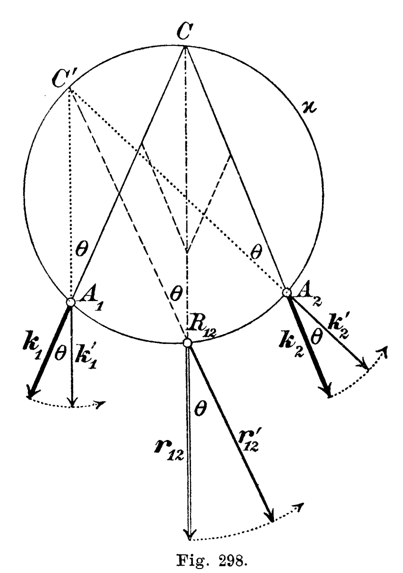


Fig. 298.

Wenn sich nämlich (Fig. 298) die Angriffslinien von $\boldsymbol{k}_1$ und $\boldsymbol{k}_2$ in einem Punkte C, und die Angriffslinien der durch den Winkel θ gleichsinnig gedrehten Kräfte $\boldsymbol{k}_1'$, $\boldsymbol{k}_2'$ in C' treffen, so haben wir über CC' zwei gleiche Winkel: $\sphericalangle CA_1C' = \sphericalangle CA_2C' = \theta$. Daher liegen die vier Punkte A_1, A_2, C und C' auf einem Kreise $\varkappa$, der durch A_1, A_2 und C allein schon festgelegt ist.

Trifft nun die Resultante r_{12} von k_1 und k_2 diesen Kreis $\varkappa$ in R_{12}, so bilden die von C' nach A_1, R_{12}, A_2 laufenden Strahlen miteinander dieselben Winkel wie die Strahlen aus C nach diesen Punkten. Folglich liegt auf $C'R_{12}$ die Resultante von k_1' und k_2', und R_{12} ist der astatische Mittelpunkt der an die Punkte A_1 und A_2 gebundenen Vektoren k_1 und k_2.

Der Kreis $\varkappa$ artet in eine Gerade aus, wenn C ins Unendliche fällt, k_1 und k_2 also parallel werden; R_{12} liegt dann auf der Geraden A_1A_2. Fällt man nämlich aus dem Punkte R_{12}, in dem A_1A_2 von der Resultante der Kräfte k_1 und k_2 getroffen wird, auf ihre Angriffslinien die Lote mit den Fußpunkten B_1 und B_2 (Fig. 299), so ist nach dem Momentensatze

$$R_{12}B_1 \cdot k_1 = R_{12}B_2 \cdot k_2,$$

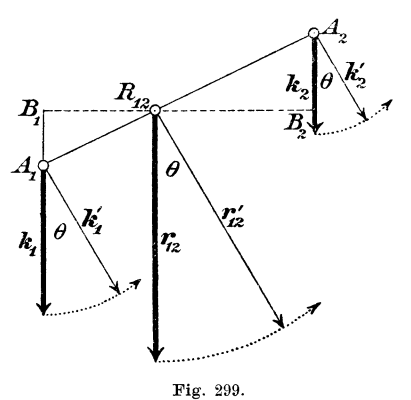


Fig. 299.

$A_1R_{12} : R_{12}A_2 = B_1R_{12} : R_{12}B_2 = k_2 : k_1$. Der Punkt R_{12} teilt also die Strecke A_1A_2 im Verhältnis $A_1R_{12} : R_{12}A_2 = k_2 : k_1$, das von der Richtung der parallelen Kräfte k_1, k_2 unabhängig ist; wenn also die Kräfte sich um ihre Angriffspunkte gleichsinnig um denselben Winkel θ drehen, so dreht sich ihre Resultante r_{12} im selben Sinne und mit dem nämlichen Winkel θ um R_{12}. Dies ist folglich der astatische Mittelpunkt der beiden Parallelkräfte. Diese Konstruktion des astatischen Mittelpunktes paralleler Kräfte versagt offenbar nur, wenn die beiden Kräfte ein eigentliches Gegenpaar bilden, da alsdann keine Resultante möglich ist. Dagegen sollen im folgenden stets auch Kräfte zugelassen sein, die auf derselben Angriffslinie an festen Angriffspunkten liegen, da sie durch die Drehung in Parallelkräfte übergehen; nur müssen natürlich auch die uneigentlichen Gegenpaare ausgeschlossen werden.

2. Damit ist Satz 1 bewiesen. Man sieht: Nach Ausschluß der Gegenpaare haben je zwei Kräfte in der Ebene, die als an bestimmte Angriffspunkte gebunden betrachtet werden, einen leicht konstruierbaren astatischen Mittelpunkt.

Wird nun zu k_1 und k_2 in derselben Ebene eine dritte Kraft k_3 an einem Angriffspunkte A_3 gefügt, und konstruiert man erst den Mittelpunkt R_{12} von k_1 und k_2, dann den Mittelpunkt R_{123} der Resultante r_{12} von k_1, k_2 und der Kraft k_3, so wird, wenn k_1, k_2, k_3 sich gleichsinnig um ihre Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 mit demselben

Winkel θ drehen, auch die Resultante $\boldsymbol{r}_{123}$ dieser drei Kräfte sich im gleichen Sinne um R_{123} drehen, und sogar unter demselben Drehwinkel θ.

Von $\boldsymbol{r}_{123}$ mit dem Angriffspunkte R_{123} und einer vierten, an A_4 geknüpften Kraft $\boldsymbol{k}_4$ der Ebene kann nun ebenso der astatische Mittelpunkt R_{1234} konstruiert werden, um den sich dann die Resultante $\boldsymbol{r}_{1234}$ von $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_4$ zugleich mit diesen Kräften, und im gleichen Sinne und mit gleichem Winkel dreht; $\boldsymbol{r}_{1234}$ mit dem Angriffspunkte R_{1234} und eine fünfte Kraft $\boldsymbol{k}_5$ an A_5 bestimmen ebenso den Mittelpunkt R_{12345} des Systems $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3, \boldsymbol{k}_4, \boldsymbol{k}_5$, und dieses Verfahren läßt sich beliebig fortsetzen.

3. Aus dieser Betrachtung folgt unter gewissen Einschränkungen für jedes ebene System $\mathfrak{S}$ von Kräften $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_n$, die an feste Angriffspunkte geknüpft sind, die Existenz eines bestimmten Punktes $R_{12\ldots n}$ mit der Eigenschaft, daß, wenn die Kräfte $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n$ um ihre Angriffspunkte $A_1, \ldots, A_n$ sich gleichsinnig und um denselben Winkel θ drehen, auch ihre Resultante $\boldsymbol{r}_{12\ldots n}$ sich gleichsinnig und um denselben Winkel θ dreht, und zwar um eben diesen Punkt $R_{12\ldots n}$, der daher als „astatischer Mittelpunkt" des Kräftesystems bezeichnet werden möge. Die erwähnten Einschränkungen bestehen darin, daß bei unserer Anordnung der Konstruktion keine Gegenpaare auftreten dürfen; wenn die Resultante $\boldsymbol{r}_{12\ldots\nu}$ der ersten ν Kräfte mit $\boldsymbol{k}_{\nu+1}$ ein Gegenpaar bildete, würde das Verfahren versagen; aber würde man bei anderer Anordnung der Konstruktion nicht am Ende diesen Ausnahmefall vermeiden können? Das läßt sich bei der Umständlichkeit der schrittweisen Resultantenbildung nicht so leicht beurteilen. Soviel ist jedoch sicher, daß überhaupt nur dann ein astatischer Mittelpunkt existieren kann, wenn das System $\mathfrak{S}$ der Kräfte $\boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_n$ eine Resultante hat.

4. Eine einfache, wohl die einfachste Konstruktion des astatischen Mittelpunktes liefert uns die graphische Statik, und diese Konstruktion gestattet auch, die soeben erhobenen Einwände zu erledigen. Wenn nämlich ein astatischer Mittelpunkt existiert, dann liegt er nach der Definition dieses Begriffes auf der Resultante des Kräftesystems, und bei der Drehung des Systems muß sich die Resultante um diesen Mittelpunkt drehen. Den Mittelpunkt wird man also direkt finden, indem man von dem Kräftesystem $\mathfrak{S}$ die Resultante $\boldsymbol{r}$ konstruiert, desgleichen von dem gleichsinnig durch denselben Winkel gedrehten Systeme $\mathfrak{S}'$, und beide Resultanten $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'$ zum Schnitt bringt.

Der Schnittpunkt R ist dann der gesuchte astatische Mittelpunkt,

vorausgesetzt, daß ein solcher Punkt überhaupt existiert. Es wäre also zu untersuchen, ob sich die Resultante auch bei jeder anderen Drehung des Systems um diesen Punkt R drehen wird.

5. Um das bequem entscheiden zu können, lassen wir $\mathfrak{S}'$ aus $\mathfrak{S}$ durch positive Drehung mit einem Drehwinkel von 90° hervorgehen und bezeichnen mit R den Schnittpunkt der Resultanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$. Das System $\mathfrak{S}$ bestehe aus den Kräften $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \ldots, \boldsymbol{k}_n$ mit den Angriffspunkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$; die Kräfte von $\mathfrak{S}'$ werden mit $\boldsymbol{k}_1', \boldsymbol{k}_2', \ldots, \boldsymbol{k}_n'$ bezeichnet. Sind M_ν und M_ν' die Drehmomente von $\boldsymbol{k}_\nu$ und $\boldsymbol{k}_\nu'$ in R (Fig. 300), so ist, da R auf der Resultante von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ liegt, nach dem Momentensatze:

$$(1) \qquad \sum_\nu^{1,n} M_\nu = 0, \quad \sum_\nu^{1,n} M_\nu' = 0.$$

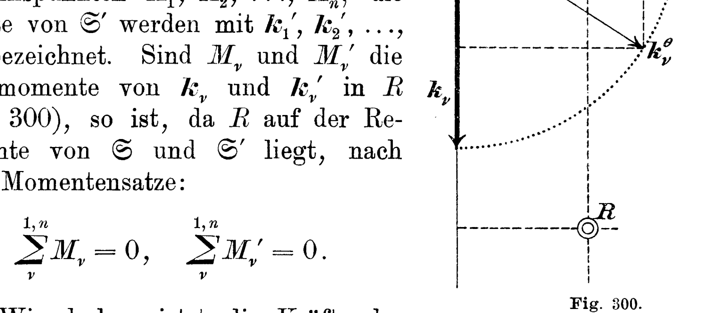


Fig. 300.

Wir drehen jetzt die Kräfte des Systems $\mathfrak{S}$ um ihre Angriffspunkte in positivem Sinne um einen Winkel θ und bezeichnen die Kräfte in dieser Lage mit $\boldsymbol{k}_1^\theta, \ldots, \boldsymbol{k}_n^\theta$, ihr System mit $\mathfrak{S}^\theta$, das Drehmoment von $\boldsymbol{k}_\nu^\theta$ in R mit M_ν^θ. Zur Berechnung von M_ν^θ zerlegt man einfach $\boldsymbol{k}_\nu^\theta$ in seine Komponenten $k_\nu \cos\theta$ und $k_\nu \sin\theta$ auf $\boldsymbol{k}_\nu$ und $\boldsymbol{k}_\nu'$, wo k_ν, k_ν' die absoluten Längen von $\boldsymbol{k}_\nu, \boldsymbol{k}_\nu'$ bedeuten, also einander gleich sind. Das Moment M_ν^θ von $\boldsymbol{k}_\nu^\theta$ in R ist dann nach dem Momentensatze gleich der Summe der Momente dieser zwei Komponenten, also

$$M_\nu^\theta = M_\nu \cos\theta + M_\nu' \sin\theta$$

und

$$(2) \qquad \sum_\nu^{1,n} M_\nu^\theta = \cos\theta \sum_\nu^{1,n} M_\nu + \sin\theta \sum_\nu^{1,n} M_\nu'.$$

Nach (1) ist diese Summe gleich Null, d. h. die Resultante von $\mathfrak{S}^\theta$ geht durch R für jeden Drehwinkel θ. Damit ist bewiesen, daß ein ebenes Kräftesystem mit einer Resultante auch immer auf derselben einen astatischen Mittelpunkt R hat.

6. Dieser kann als Schnittpunkt der Resultanten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ leicht gefunden werden. Stehen die Angriffslinien $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der

Kräfte des Systems $\mathfrak{S}'$ auf den entsprechenden Angriffslinien x_1, x_2, ..., x_n des Systems $\mathfrak{S}$ senkrecht, so läßt sich an dieser Konstruktion noch das zweite Krafteck sparen (Fig. 301). Man habe nämlich bereits die Kräfte von $\mathfrak{S}$ mittels eines Kraftecks $\mathfrak{K} = \mathbf{01} \ldots \boldsymbol{n}$ summiert, einen Pol P angenommen und zu den Polstrahlen $\mathbf{0}P$, $\mathbf{1}P$, ..., $\boldsymbol{n}P$ parallel die Seiten eines Seilecks I II III ... konstruiert, dessen äußere Seiten sich in einem Punkte S der Resultante von $\mathfrak{S}$ treffen. Wenn man dann das Krafteck $\mathfrak{K}$ um seinen Pol in positivem Sinne um 90° dreht, ist $\mathfrak{K}$ in dieser neuen Lage $\mathfrak{K}'$ ein Krafteck von $\mathfrak{S}'$, und wenn man P als seinen Pol beibehält, so sind die neuen Polstrahlen auf den entsprechenden von $\mathfrak{K}$ senkrecht. Daraus folgt: Die Seiten eines auf $\mathfrak{K}'$ gegründeten Seilecks von $\mathfrak{S}'$ stehen auf den entsprechenden Seiten des Seilecks von $\mathfrak{S}$ senkrecht. Zur Konstruktion eines solchen Seilecks ist also $\mathfrak{K}'$ entbehrlich. Das Seileck von $\mathfrak{S}'$ wird also nach willkürlicher Annahme seiner ersten Ecke I' auf y_1 so angelegt, daß seine Seiten auf den entsprechenden Seiten des Seilecks von $\mathfrak{S}$ senkrecht stehen. Sollten sich dabei freilich, was nicht selten vorkommt, unzugängliche Lagen einzelner Ecken herausstellen, so wird man auf ein Krafteck mit passender gewähltem Pole zurückgreifen müssen.

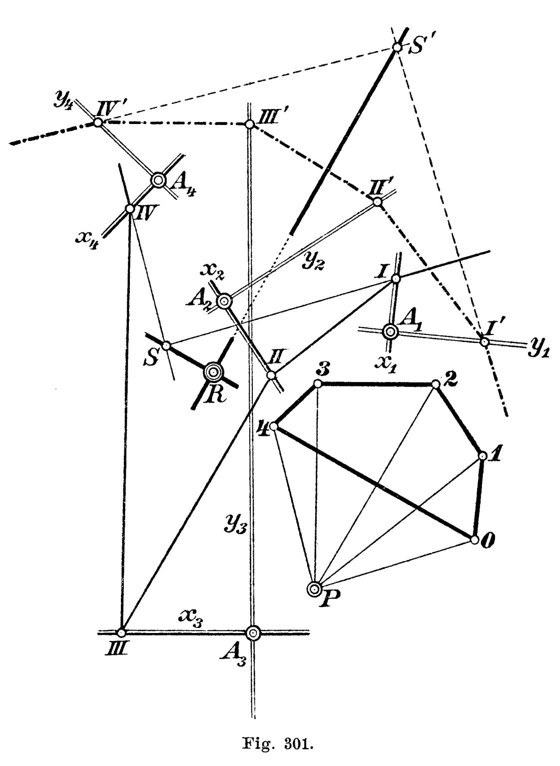


Fig. 301.

7. Sind die gegebenen Kräfte Schwerkräfte, so sind sie zueinander parallel und ihr astatischer Mittelpunkt wird dann Schwerpunkt genannt. Dieser kann daher mit den Methoden der graphischen Statik leicht gefunden werden, eine weitere Vereinfachung der in Figur 301 angegebenen Konstruktion läßt sich aber dabei nicht erzielen.

Das Gleichgewicht eines ebenen Systems von Kräften, die an feste Angriffspunkte gebunden sind, wird astatisch genannt, wenn es bei gleichsinniger und gleichwinkeliger Drehung seiner Kräfte um ihre Angriffspunkte erhalten bleibt. Aus dem Systeme $\mathfrak{S}$ des vorigen Artikels erhält man ein in astatischem Gleichgewicht befindliches System, wenn man zum Systeme $\mathfrak{S}$ seine Resultante mit umgekehrtem Sinne fügt und sie an den astatischen Mittelpunkt R von $\mathfrak{S}$ bindet.

8. Astatische Koordinaten. Auf die Astatik läßt sich ein merkwürdiges Koordinatensystem gründen, das wir gern mitteilen wollen, um nochmals die Fruchtbarkeit der graphischen Statik an geometrischen Gedanken zu zeigen. In großem Maßstabe ist der Gedankenreichtum der Statik und überhaupt der Mechanik für geometrische Zwecke in dem Studyschen Werke über die Geometrie der Dynamen ausgebeutet, das wir bereits in § 5, 13. erwähnt haben.

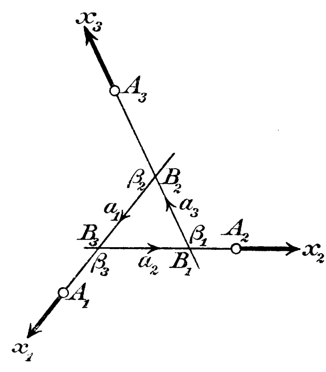


Fig. 302.

In einer Ebene legen wir durch drei feste Punkte A_1, A_2, A_3, die nicht einer Geraden angehören, drei feste Geraden a_1, a_2, a_3 (Fig. 302). Diese bestimmen ein Dreieck $B_1B_2B_3$, das mit $A_1A_2A_3$ identisch sein kann; doch wollen wir dies nicht voraussetzen. Die Bezeichnung $B_1B_2B_3$ sei so gewählt, daß B_i nicht auf a_i liegt. Das Dreieck $B_1B_2B_3$ erhält positive Orientierung des Inhalts, wodurch also jede der Geraden a_1, a_2, a_3 einen bestimmten Sinn erhält, in dem wir auf diesen Geraden liegende Strecken positiv messen wollen, während gegensinnige negativ genommen werden.

Wir binden nun an A_1, A_2, A_3 drei Kräfte x_1, x_2, x_3 auf a_1, a_2, a_3, die nach der vorangehenden Verabredung mit Vorzeichen gemessen sind. Sie bestimmen dann einen Punkt der Ebene eindeutig, nämlich ihren astatischen Mittelpunkt X, und sollen daher als astatische Koordinaten dieses Punktes bezeichnet werden. Nach dem Verfahren der Figur 301 kann X aus x_1, x_2, x_3 leicht gefunden werden. Ersetzt man x_1, x_2, x_3 durch nx_1, nx_2, nx_3, so werden in Figur 301 die Seiten des Kraftecks sämtlich ver-n-facht. Dieses wird also durch ein ähnliches und ähnlich gelegenes ersetzt, die neue Resultante $\boldsymbol{x}'$ ist das n-fache der alten $\boldsymbol{x}$. Wenn aber auch der neue Kraftpol in dieser Ähnlichkeit homolog zum alten Pole $\boldsymbol{P}$ gewählt wird, so daß also die neuen Polstrahlen den homologen alten

Polstrahlen parallel laufen, so kann das alte Seileck einfach beibehalten werden, die Resultante ändert also zwar die Größe, aber nicht die Lage, d. h.:

Die Koordinaten nx_1, nx_2, nx_3 bestimmen denselben Punkt X wie die Koordinaten x_1, x_2, x_3, der Punkt X hängt also nur von den Verhältnissen $x_1 : x_2 : x_3$ ab.

9. Die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ bestimmen nicht nur einen Punkt X eindeutig, sondern sie ordnen ihm auch eine an ihn gebundene Kraft $\boldsymbol{x}$ zu, deren Richtung ebenfalls eindeutig bestimmt ist, während die Größe sich ver-n-facht, wenn man die Größen x_1, x_2, x_3 selber ver-n-facht.

Bezeichnet man die Kräfte x_1, x_2, x_3 als Vektoren mit $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, so ist $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$, also in der Tat $n\boldsymbol{x} = n\boldsymbol{x}_1 + n\boldsymbol{x}_2 + n\boldsymbol{x}_3$.

Während so der Weg von den Verhältnissen $x_1 : x_2 : x_3$ zu dem Punkte X vollkommen eindeutig ist, falls nicht, was wir ausschließen wollen, x_1, x_2, x_3 zugleich verschwinden, muß nun umgekehrt die Frage aufgeworfen werden, ob man auch zu einem beliebig gewählten Punkte X immer drei Kräfte x_1, x_2, x_3 auf a_1, a_2, a_3 an A_1, A_2, A_3 finden kann, deren astatischer Mittelpunkt X ist.

10. Um die Beantwortung dieser Frage nicht ohne Not zu erschweren, wollen wir vorher erst die Forderung voll ausnutzen, daß das Gleichgewicht astatisch sein soll. Wir dürfen die Geraden a_1, a_2, a_3 also drehen, nämlich um die Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 der auf ihnen liegenden Kräfte, aber immer nur gleichzeitig, gleichsinnig und gleichwinkelig. Diese Drehung nun läßt sich so einrichten, daß die Geraden nachher durch einen Punkt gehen (Fig. 303). Die Außenwinkel des Dreiecks $B_1B_2B_3$ seien nämlich φ_1, φ_2, φ_3, so daß also $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 4R$ ist. Dann faßt

der Umkreis ξ_1 von $B_1A_2A_3$ den Peripheriewinkel φ_1 über A_2A_3,
" " ξ_2 " $A_1B_2A_3$ " " φ_2 " A_3A_1,
" " ξ_3 " $A_1A_2B_3$ " " φ_3 " A_1A_2.

Vom Schnittpunkte B der Kreise ξ_1 und ξ_2 aus erscheinen demnach A_2A_3 und A_3A_1 unter den Winkeln φ_1 und φ_2, und A_1A_2 folglich unter dem Winkel $4R - \varphi_1 - \varphi_2$, der gleich φ_3 ist, d. h. der Punkt B liegt auch auf ξ_3. Also:

Die Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 schneiden sich in einem Punkte B.

Das gilt auch, wenn die Geraden a_1, a_2, a_3 je durch noch einen der Punkte A_1, A_2, A_3 gehen, so daß also die Punkte B_1, B_2, B_3 bis auf die Anordnung mit den Punkten A_1, A_2, A_3 identisch

sind. Die Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 gehen dann in diejenigen über, die nach Bd. II, § 33 sich in dem einen oder anderen Brocardschen Punkte schneiden, mit dem dann B zusammenfällt; jedenfalls ein hübscher Zusammenhang der Brocardschen Punkte mit der Statik.

Mag nun das Dreieck $B_1B_2B_3$ mit $A_1A_2A_3$ zusammenfallen oder nicht, jedenfalls sind die Winkel BA_1B_2 und BA_2B_3 als die Peripheriewinkel von ξ_3 auf der Sehne BB_3 einander gleich, und da

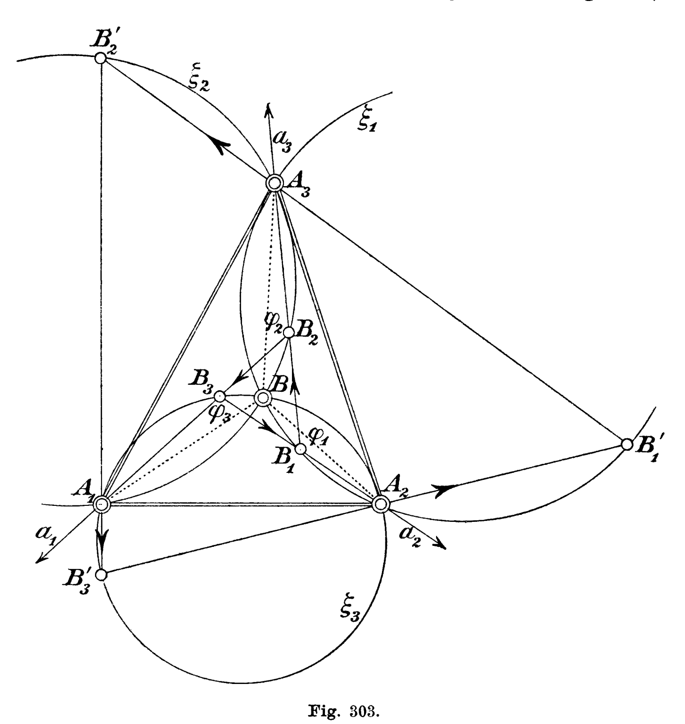


Fig. 303.

der Winkel BA_2B_3 als Peripheriewinkel von ξ_1 auf der Sehne BB_1 steht, zu der auch BA_3B_1 gehört, so ist

$$\sphericalangle BA_1B_2 = \sphericalangle BA_2B_3 = \sphericalangle BA_3B_1 .$$

Das ist ersichtlich die Eigenschaft, vermöge der B zum Brocardschen Punkte wird, wenn die Punkte B_1, B_2, B_3 bis auf die Anordnung mit den Punkten A_1, A_2, A_3 zusammenfallen.

Da B_i nicht auf a_i liegen soll, so kann übrigens B_i nicht mit A_i zusammenfallen. — Bewegt sich nun B_1 auf ξ_1 nach B hin, so bewegen sich B_2 auf ξ_2 und B_3 auf ξ_3 gleichsinnig nach B hin.[1]) Folglich

1) In Figur 303 ist eine zweite Lage $B_1'B_2'B_3'$ von $B_1B_2B_3$ eingezeichnet.

kann durch gleichsinnige Bewegung der Strahlen a_1, a_2, a_3 um die Punkte A_1, A_2, A_3 um den gemeinschaftlichen Drehwinkel

$$\theta = \sphericalangle BA_1B_2 = \sphericalangle BA_2B_3 = \sphericalangle BA_3B_1$$

bewirkt werden, daß a_1, a_2, a_3 durch den Punkt B gehen.

Das war es, was wir zunächst erreichen wollten. Man sieht jetzt leicht, daß es einfach unendlich viel Dreiecke $B_1B_2B_3$ gibt, deren Ecken auf ξ_1, ξ_2, ξ_3 liegen und deren Seiten durch gleichsinnige, gleichwinkelige Drehung um A_1, A_2, A_3 miteinander in B zum Schnitt gebracht werden können; alle diese Dreiecke sind einander ähnlich, und zu ihrer Schar gehört $A_1A_2A_3$ nur, wenn B einer der Brocardschen Punkte von $A_1A_2A_3$ ist.

11. Wir dürfen von nun an voraussetzen, daß die Geraden a_1, a_2, a_3 durch B gehen. Die Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind dann die Umkreise von A_2BA_3, A_3BA_1, A_1BA_2. Sind nun die drei astatischen Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes X gegeben, so konstruieren wir nach dem in Art. 1 und 2 auseinandergesetzten Verfahren der schrittweisen Resultantenbildung zuerst die Resultante r_{12} von x_1, x_2 und binden sie an den astatischen Mittelpunkt R_{12} von x_1, x_2 (Fig. 304), der nach 1. auf dem Kreise ξ_3 liegt. Dann konstruieren wir X als den astatischen Mittelpunkt von x_3 und r_{12}, wenn diese Kräfte an A_3 und R_{12} gebunden sind. Dieser Mittelpunkt liegt nach 1. auf dem Umkreis $\varkappa_3$ von $R_{12}BA_3$ und zugleich auf der Resultante r_{123} von r_{12} und x_3. Dadurch ist X bestimmt; die Kraft r_{123}, die X zum Angriffspunkt erhält, geht mit x_1, x_2, x_3 durch B. Ist nun umgekehrt X zuerst gegeben, so können wir die durch X und B gehende Kraft r_{123} in beliebiger Größe annehmen; der gesuchte Kreis $\varkappa_3$ durch $R_{12}BA_3$ ist als Umkreis von BA_3X bestimmt. Er trifft ξ_3 in R_{12}. Jetzt zerlegen wir die Kraft r_{123}, indem

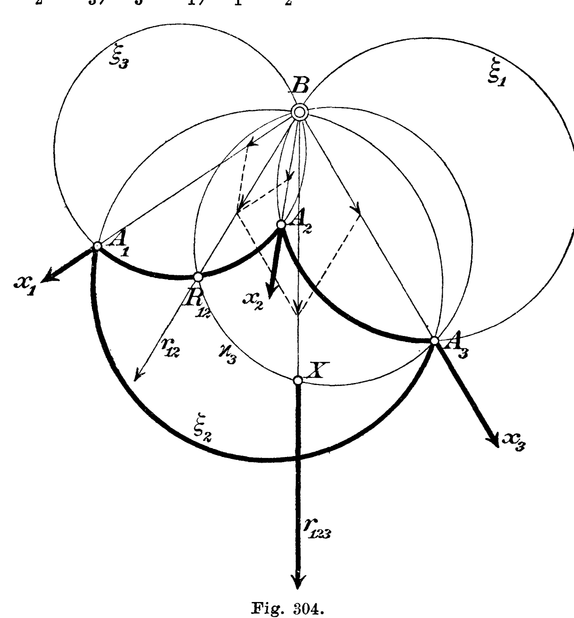


Fig. 304.

wir sie mit ihrem Anfangspunkte auf BX nach B verschieben, in ihre Komponenten x_3 und r_{12} auf BA_3 und BR_{12}. Wird dann r_{123} auf BX wieder an X, x_3 auf a_3 an A_3, r_{12} auf BR_{12} an R_{12} gebunden, so ist X astatischer Mittelpunkt von r_{12} und x_3. Schließlich wird r_{12} in seine Komponenten x_1 und x_2 auf BA_1 und BA_2 zerlegt, die A_1 und A_2 als Angriffspunkte zugewiesen erhalten. Dann ist X der astatische Mittelpunkt von x_1, x_2, x_3.

12. Es fragt sich nur noch, ob es nicht ein zweites Kräftesystem z_1, z_2, z_3 an A_1, A_2, A_3 auf a_1, a_2, a_3 gibt, das ebenfalls X zum astatischen Mittelpunkte hat, ohne daß $x_1 : x_2 : x_3 = y_1 : y_2 : y_3$ wäre (vergl. den Schluß von 8.). Diese Frage liegt schon deshalb sehr nahe, weil die Zerlegung einer Kraft r_{123} in drei Komponenten x_1, x_2, x_3, die mit r_{123} durch denselben Punkt B gehen, eine unendlich vieldeutige Aufgabe ist. Wir dürfen voraussetzen, daß die Resultante ϱ_{123} von z_1, z_2, z_3, die ebenfalls auf BX an X gebunden ist, mit r_{123} im Sinne übereinstimmt, weil diese Übereinstimmung durch gleichsinnige Drehung der Kräfte x_1, x_2, x_3 und r_{123} um ihre Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 und X herbeigeführt werden kann. Multipliziert man noch x_1, x_2, x_3 mit $n = \varrho_{123}/r_{123}$, wodurch das System x_1, x_2, x_3 in y_1, y_2, y_3 übergehen möge, so hat y_1, y_2, y_3 die Resultante ϱ_{123}, die mit der von z_1, z_2, z_3 auch im Sinne übereinstimmt, und X ist nach dem Schlußsatze von 8. auch der astatische Mittelpunkt von y_1, y_2, y_3. Das bleibt richtig, wenn wir die Geraden a_1, a_2, a_3 wieder in die Lage der Figur 303 zurückdrehen, wo sie ein Dreieck $B_1 B_2 B_3$ bildeten, und auch die Kraft ϱ_{123} mitgehen lassen. Dann hat ϱ_{123} auf den Seiten von $B_1 B_2 B_3$ einmal die Komponenten y_1, y_2, y_3, dann aber auch die Komponenten z_1, z_2, z_3. Da aber die Zerlegung einer Kraft nach den drei Seiten eines Dreiecks eindeutig ist, so folgt:

$$y_1 = z_1,\ y_2 = z_2,\ y_3 = z_3 \quad \text{und} \quad x_1 : x_2 : x_3 = z_1 : z_2 : z_3.$$

Damit ist bewiesen:

Jeder Punkt X bestimmt eindeutig die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ seiner astatischen Koordinaten, und diese Verhältnisse bestimmen eindeutig den Punkt X.

13. Verschwindet die Komponente x_3 eines Punktes X, so liegt er, wie der Punkt R_{12} der Figur 304, auf dem Kreise ξ_3. Es folgt:

Der Kreis ξ_i ist der Ort der Punkte, für welche $x_i = 0$ ist $(i = 1, 2, 3)$.

In dem Koordinatensysteme des vorigen Paragraphen waren es die Seiten des Grunddreiecks $A_1 A_2 A_3$, denen die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ zukamen. Nach dieser Analogie wird das Koor-

dinatendreieck der astatischen Koordinaten von den Kreisen ξ_1, ξ_2, ξ_3 gebildet; seine Ecken sind A_1, A_2, A_3. Entsprechen den Koordinaten x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Punkte X und Y mit den Kräften r und s und sind $\varkappa, \lambda$ irgend zwei reelle Zahlen, so haben einerseits die durch B gehenden Kräfte $\varkappa r$, λs mit den Angriffslinien BX, BY eine ebenfalls durch B gehende Resultante t. Bindet man diese an den Punkt Z, in welchem der Umkreis des Dreiecks XBY von t getroffen wird, so ist Z der astatische Mittelpunkt des Gesamtsystems $\varkappa r$, λs. Nun haben aber andererseits $\varkappa r$ und λs auf a_1, a_2, a_3 die Komponenten $\varkappa x_1$, $\varkappa x_2$, $\varkappa x_3$ und λy_1, λy_2, λy_3. Wenn also Z die Koordinaten z_1, z_2, z_3 hat, die ja zugleich die Komponenten von t sind, so ist

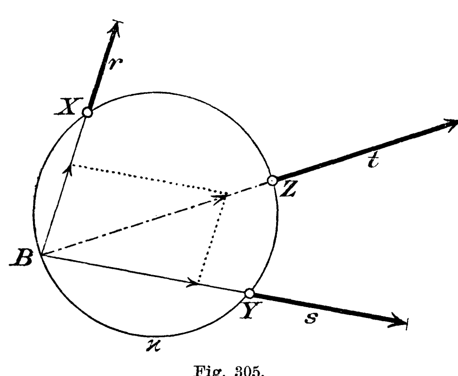


Fig. 305.

$$(3)\qquad \begin{aligned} z_1 &= \varkappa x_1 + \lambda y_1, \\ z_2 &= \varkappa x_2 + \lambda y_2, \\ z_3 &= \varkappa x_3 + \lambda y_3. \end{aligned}$$

Läßt man $\varkappa$ und λ seine Werte ändern, so wird auch t seine Größe und Richtung ändern können, und Z wird auf dem Umkreise des Dreiecks XBY wandern. Umgekehrt entspricht jedem Punkte Z dieses Kreises nach willkürlicher Annahme von t ein Wertepaar $\varkappa, \lambda$, so daß t die Resultante von $\varkappa r$ und λs ist. Es folgt:

Alle Punkte des durch B und die Punkte (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) gehenden Kreises lassen sich mittels passend gewählter Parameter $\varkappa, \lambda$ in der Form darstellen:

$$(4)\qquad z_1 = \varkappa x_1 + \lambda y_1, \quad z_2 = \varkappa x_2 + \lambda y_2, \quad z_3 = \varkappa x_3 + \lambda y_3.$$

Durch Elimination von $\varkappa$ und λ folgt hieraus die

astatische Gleichung dieses Kreises:

$$(5)\qquad z_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + z_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + z_3(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

d. h. die Gleichung, der alle Punkte (z_1, z_2, z_3) dieses Kreises genügen.

14. Hier liegt demnach der interessante Fall vor, daß die linearen Gleichungen — denn die Gleichung (5) ist von der Form $c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 = 0$ — nicht gerade Linien, sondern Kreise darstellen, und zwar Kreise, die durch

einen festen Punkt B gehen und daher ein parabolisches Bündel bilden (siehe Bd. II, § 8). Nur die durch B gehenden Geraden gehören zu den linear darstellbaren Kurven, was sehr schön zu der Tatsache stimmt, daß diese Geraden auch zum Kreisbündel gehören.

Setzt man die drei Größen x_1, x_2, x_3, die gleich Null gesetzt die drei Kreise ξ_1, ξ_2, ξ_3 darstellen, den analytischen Ausdrücken für die linken Seiten der Gleichungen dieser Kreise in rechtwinkeligen Koordinaten proportional, so findet man unschwer,

> daß die nicht durch B gehenden Geraden und Kreise in x_1, x_2, x_3 durch quadratische Gleichungen dargestellt werden,

und zwar unterscheiden sich die Gleichungen der Geraden nicht von denen der Kreise. Die astatischen Koordinaten sind also die natürlichen Koordinaten für das parabolische Kreisbündel in seiner Deutung als Euklidische Geometrie, wobei die Kreise des Bündels als Pseudogeraden, die Geraden und Kreise der Ebene als Pseudokreise angesprochen werden. Daß durch Inversion mit B als Inversionszentrum diese pseudoeuklidische Geometrie in die wirkliche übergeht, liegt auf der Hand.

15. Wenn der Punkt B in irgend einer Richtung ins Unendliche rückt, gehen die astatischen Koordinaten in die sogenannten baryzentrischen über, die im Jahre 1827 von Möbius eingeführt worden sind und die ersten homogenen Punktkoordinaten sind, die man kennt. Im Falle unendlich ferner Lage des Punktes B gehen alle Kreise, die in der vorangehenden Betrachtung durch B gingen, in Geraden über, und die Gleichung (5) stellt die Verbindungsgerade der Punkte (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) dar. Auf diese Ausartungsfälle der astatischen Koordinaten brauchen wir nicht weiter einzugehen, da bereits die statisch begründeten Dreieckskoordinaten als baryzentrische gedeutet werden können. Läßt man nämlich an den Ecken A_1, A_2, A_3 eines Dreiecks $A_1A_2A_3$ parallele Kräfte x_1, x_2, x_3 angreifen, so ist ihr astatischer Mittelpunkt oder Schwerpunkt identisch mit dem Punkte X, der nach der Methode des § 91 durch die Koordinaten x_1, x_2, x_3 bestimmt wird, wie man leicht mittels des Momentensatzes nachweist. Auch darauf können wir nicht näher eingehen und wollen uns mit der Anregung begnügen, daß alle diese Betrachtungen auch auf die Kugel übertragbar sind, am einfachsten, indem man vier Punkte A_1, A_2, A_3 und B auf der Kugel annimmt, in A_1, A_2, A_3 auf BA_1, BA_2, BA_3 drei Kräfte x_1, x_2, x_3 wirken läßt und ihrer Resultante den Punkt X als Angriffspunkt zuweist, in welchem sie (außer in B) die Kugel noch

einmal trifft. Ferner lassen sich diese Gedanken auf die Geometrie des elliptischen und hyperbolischen Kreisbündels und Kugelgebüsches übertragen und ergeben dort eine analytische Formulierung der Ausdeutung dieser Geometrien als Verwirklichung der nichteuklidischen Geometrie, die wir im zweiten Bande zu skizzieren versucht haben.[1]) Jedenfalls verdiente also die Statik und besonders die graphische Statik in hohem Maße die Aufmerksamkeit aller Freunde der Elementargeometrie.

16. Zum Schlusse wollen wir noch einen hübschen Zusammenhang der astatischen Koordinaten mit der logarithmischen Spirale aufdecken. Um in diesen Koordinaten einen Punkt X festzulegen, mußten wir ihm erst eine Kraft von beliebiger Größe zuordnen, deren Richtung nur in dem Normalfalle leicht anzugeben war, wo die Geraden a_1, a_2, a_3 durch B gehen. Dann mußte auch die Kraft durch B gehen. Wir verabreden jetzt, den Pfeil der Kraft stets von B nach X hin laufen zu lassen. Dann ist also jedem Punkte X der Ebene eine Kraft und eine Richtung zuerkannt, die auf BX von B nach X weist. Drehen wir jetzt die Geraden a_1, a_2, a_3 um A_1, A_2, A_3 in positivem Sinne um den Drehwinkel θ, so drehen sich auch alle jene Kräfte und Richtungen um ihre Angriffspunkte X im gleichen Sinne und mit dem gleichen Drehwinkel θ. Dann ist wiederum jedem Punkte X der Ebene eine bestimmte durch ihn gehende Richtung zugeordnet, die von der des Normalfalles um den Winkel θ bei positiver Drehung abweicht. Eine solche in jedem ihrer Punkte orientierte Ebene nennen wir nach naheliegenden Analogien ein Vektorfeld, und eine Kurve, deren Tangenten in jedem ihrer Punkte die diesem Punkte entsprechende Richtung haben, werde eine Richtlinie des

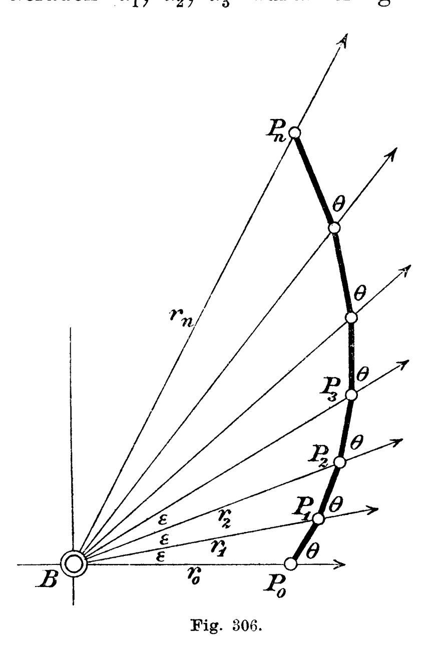


Fig. 306.

1) Vergl. Magener, A., Anallagmatische Punktkoordinaten im Kugelgebüsche u. ihre Anwendung auf die nichteukl. Geometrie, Straßburger Diss. 1906.

Feldes genannt. Zu den Vektorfeldern gehören die Kraftfelder, z. B. das des Magneten (vergl. § 29); die Richtlinien heißen dann Kraftlinien.

Im Normalfalle sind die Richtlinien unseres Vektorfeldes die durch B gehenden Geraden, in dem Felde jedoch, das vom Normalfalle um den Drehwinkel θ abweicht, wie wir noch zeigen wollen, logarithmische Spiralen mit dem asymptotischen Ausgangspunkte B.

Die durch einen Punkt P_0 gehende Richtlinie des durch den Drehwinkel θ charakterisierten Feldes wird nämlich eine Kurve sein, die von P_0 ausgehend die Strahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots$ durch den Punkt B in P_0, P_1, $P_2, \ldots$ immer unter dem Winkel θ schneidet, da die Richtung unseres Vektorfeldes in P_ν von der Richtung BP_ν des Normalfalles im positiven Drehsinne um den Winkel θ abweicht (Fig. 306). Nehmen wir zur Vereinfachung an, daß jeder der Strahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$ mit dem nächstfolgenden denselben kleinen Winkel ε bildet, so ist nach dem Sinussatze $r_1 : r_0 = \sin\theta : \sin(\theta - \varepsilon)$, und da alle Dreiecke P_0BP_1, $P_1BP_2, \ldots, P_{n-1}BP_n$ einander ähnlich sind, so ist:

$$r_n : r_{n-1} = r_{n-1} : r_{n-2} = \cdots = r_3 : r_2 = r_2 : r_1 = r_1 : r_0 = \sin\theta : \sin(\theta - \varepsilon).$$

Also, indem man jedes dieser Verhältnisse dem letzten gleich setzt und das Produkt dieser n Gleichungen bildet:

$$r_n = r_0\left(\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\varepsilon)}\right)^n = \frac{r_0}{(\cos\varepsilon - \operatorname{ctg}\theta\sin\varepsilon)^n} = \frac{r_0}{(\cos\varepsilon)^n(1-\operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}\varepsilon)^n}.$$

Hierin setzen wir $\varepsilon = \varphi/n$ und bezeichnen den Punkt P_n, da BP_n mit BP_0 den Winkel φ bildet, mit P_φ, seinen Radiusvektor BP_φ mit r_φ Dann ist:

$$r_\varphi = \frac{r_0}{(\cos\varphi/n)^n(1-\operatorname{ctg}\theta\operatorname{tg}\varphi/n)^n}.$$

Jetzt lassen wir n über alle Grenzen wachsen, wodurch der Streckenzug $P_0P_1P_2\ldots P_n$ immer mehr in eine Richtlinie übergeht. Da bereits für Winkel von einigen Sekunden die Tangente durch den Bogen ersetzt werden kann, was mit abnehmendem Winkel immer genauer wird, so konvergiert der zweite Klammerausdruck mit wachsendem n nach Bd. I, § 113, (5) gegen $e^{-\varphi\operatorname{ctg}\theta}$; der erste geht nach Bd. I, § 114, 3. (am Ende) gegen 1 (§ 126, 127 der 2ten Auflage). Daher ist:

$$r_\varphi = r_0 e^{\varphi\operatorname{ctg}\theta}.$$

Das ist die Gleichung für die gesuchte Richtlinie in Polarkoordinaten; die Kurve wird wegen der Form dieser Gleichung eine logarithmische Spirale genannt.

In ebenen Kraftfeldern werden die Kurven, die die Kraftlinien senkrecht schneiden, als Niveaulinien bezeichnet. Indem wir diese Bezeichnung auf die Vektorfelder übertragen, machen wir uns durch einen Blick auf nebenstehende Figur 307 klar, daß die Niveaulinien unseres Vektorfeldes einfach die Richtlinien des dem positiven Drehwinkel $\theta' = \theta + 90^0$ entsprechenden Vektorfeldes sind. Ihre Polargleichung ist also:

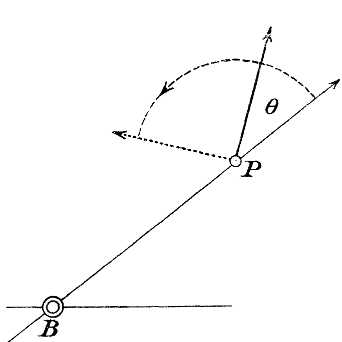


Fig. 307.

$$r_\varphi = r_0 e^{-\varphi \operatorname{tg} \theta}.$$

Es folgt:

Die Niveaulinien des vorliegenden Vektorfeldes sind im Normalfalle $(\theta = 0)$ konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt B, im Falle des Drehwinkels $\theta \gtrless 0$ dagegen ebenfalls logarithmische Spiralen mit B als asymptotischem Ausgangspunkte.

Vierzehnter Abschnitt.

Das ebene Fachwerk.

§ 93. Begriff und Zweck des Fachwerks.

1. Zu den schönsten Anwendungen der Statik gehört die Lehre vom ebenen Fachwerk. Unter einem Fachwerk versteht man das aus Eisenbalken verschiedener Länge und Querschnittform zusammengenietete Gerippe der eisernen Brücken, Viadukte, Bahnhallendächer und anderer Tragkonstruktionen. Die Idee des eisernen Fachwerks ist aus der Holzbautechnik entnommen, wo man seit alten Zeiten die Dachstühle und Fachwände in Holzfachwerk ausführt. Diese Wände sind nicht massiv, sondern sie enthalten feste Rahmen aus Holzbalken, welche die ganze Wandfläche in eine Anzahl von Fächern zerlegen, in die leichtes Mauerwerk als Füllung kommt. Daher der Name Fachwerk.

2. Um den Zweck des eisernen Fachwerks zu verstehen, braucht man sich nur klar zu machen, wie etwa eine hohe, weitgespannte Bahnhofshalle überdacht werden müßte, wenn man sich den Gebrauch von eisernen Trägern versagen wollte. Am nächsten an Konstruktionsmöglichkeiten stände das Holzfachwerk. Aber von der Feuergefährlichkeit und der raschen Vergänglichkeit des Materials ganz abgesehen leidet das Holzfachwerk an dem schweren Mangel, daß es in den Knotenpunkten, in denen zwei oder mehr Balken aneinander stoßen, infolge der Verzapfung sehr geschwächt wird; ein vertikal stehender Balken, der nur zu tragen hat, bedarf der Verzapfung an seinen beiden Enden nur, um nicht auszuweichen. Wird aber der Balken auf Zug beansprucht, so müssen die dünnen Zapfen, mit denen der Balken an seinen beiden Enden in andere eingreift, diesen ganzen Zug aushalten, werden also leicht ausbrechen. Knotenpunkte, in denen zwei oder drei Balken aneinander stoßen, lassen sich haltbar ausbilden, bei mehr Balken geht es nicht.

Der steinerne Gewölbebau kann, wie die Meisterwerke der Gotik und der Barockzeit beweisen, zwar gewaltige Räume überspannen,

nötigt aber zu einer wuchtigen, monumentalen Ausführung der Umfassungsmauern und ist für Zweckbauten des Verkehrs schon der hohen Kosten wegen nicht anwendbar. In konstruktiver Hinsicht ist das Gewölbe dem einfachen Steinbalken gegenüber, wie ihn die alten Ägypter zur Überdeckung ihrer Tempel gebrauchten, dadurch im Vorteil, daß die Steine eines Gewölbes nur den Druck aushalten müssen, dagegen wenig auf Bruch beansprucht werden. Ein Gewölbe mit gleichmäßig verteiltem Druck trägt sogar, wenn die das Gewölbe bildenden keilförmigen Blöcke unverbunden aneinander gereiht sind; der wagerechte Steinbalken dagegen ist der Gefahr des Bruches ausgesetzt, und da vermag ein Stein am wenigsten zu widerstehen. Andererseits leidet der Gewölbebau an dem Mangel, bedeutende Schubkräfte auf die Widerlager auszuüben, denen durch eiserne Zugstangen oder, wie in der Gotik, durch Strebepfeiler und kompliziertere Stützkonstruktionen begegnet werden muß. Vom rein statisch-konstruktiven Standpunkte aus betrachtet führt vom Steinbalken der altorientalischen und griechischen Baukunst über den Gewölbebau der Babylonier, Etrusker, Römer und des Mittelalters bis zum modernen Fachwerkbau ein Weg stetigen Fortschrittes und steigender Vollkommenheit, mit Aussichten auf beinahe unbegrenzte Möglichkeiten, wie u. a. der berühmte Eiffelturm beweist. Das Fachwerk teilt mit dem Gewölbebau die Fähigkeit großer Spannweite, vermeidet aber den Fehler der großen Schubkräfte; es kann so ausgebildet werden, daß es nur den durch sein Eigengewicht bedingten Vertikaldruck auf die Unterlage überträgt und an Schubkräften nur so viel, als durch die Deformation des Fachwerks infolge Wärmeausstrahlung oder Wind- und Schneedruck verursacht wird; es beansprucht, wie das Gewölbe, das Material nicht auf Bruch oder Biegung, sondern wesentlich nur in der Längsrichtung, und das dürfte wohl der Hauptvorzug dieser Konstruktionsart sein.

3. Im großen und ganzen verhält sich ein prismatischer eiserner Balken von bestimmtem Querschnitt Q so, als wenn er aus beliebig viel dünneren prismatischen Stäben zusammengesetzt wäre, die zusammen diesen Querschnitt Q ergeben und im übrigen reibungslos aneinander lagern. Man ist daher berechtigt, einen prismatischen Balken mit einiger Annäherung als ein Konglomerat von außerordentlich dünnen Fasern oder Fäden aufzufassen. Nicht, als wäre das die wirkliche Struktur des Balkens, es gilt nur, sich ein Bild zu machen von dem mechanischen Verhalten des Balkens bei Biegung, Druck, Zug und Drillung. Wenn nun ein gerader Balken in die Form eines Kreisbogens gekrümmt wird, so erfahren die Fasern, die dem Mittelpunkte dieses Kreises am nächsten verlaufen, eine Ver-

kürzung, sie werden gestaucht, die am weitesten abliegenden werden dagegen verlängert. Man schließt daraus nach dem Stetigkeitsprinzip, daß zwischen diesen zwei Arten von Fasern eine Schicht, die sogenannte neutrale Schicht, liegen muß, die ohne Dehnung oder Verkürzung gebogen wird. Bei der Biegung wird also das Material ungleichartig beansprucht, und gegen derartige Behandlung ist es am wenigsten widerstandsfähig. Wir können einen Draht durch wiederholtes Hinundherbiegen leicht zerbrechen, den wir mit den Händen nicht zu zerreißen vermöchten. Ein dünner Eisenstab wird also als Zugstange sehr leistungsfähig sein, wenn er vor Biegung bewahrt bleibt. Auch der Druck, den eine solche Stange aushalten kann, ist verhältnismäßig groß, wenn ein seitliches Ausweichen verhindert wird. So läßt sich bekanntlich eine Stecknadel durch ein Geldstück treiben, wenn man sie in einen Korkstopfen steckt. Wenn es also dem Ingenieur gelingt, ein Fachwerk so zu konstruieren, daß seine Balken oder Stäbe, wie der Fachausdruck lautet, nur Druck oder Zug auszuhalten haben, so kann er sehr an Material und damit an Kosten sparen; er nutzt das Material am vollkommensten aus und das Gewicht des Fachwerks wird nicht unnütz groß.

4. Dieses Ziel nun läßt sich in der Idee vollkommen erreichen, wenn die Verbindung der Stäbe in den Knotenpunkten jedesmal durch einen hindurchgetriebenen Bolzen bewirkt wird, um den die Stäbe nach Lösung der übrigen Zusammenhänge sich drehen können, und wenn alle Lasten, die das Fachwerk tragen soll, auf diese Bolzen verteilt und nicht irgendwo auf die Stäbe selbst gelegt werden. Treten jetzt in einem Knotenpunkte Drehkräfte auf, die bei vollkommen fester Verbindung den einen oder anderen der Stäbe biegen würden, so können sie bei der gelenkartigen Verbindung der Stäbe, da sie am Bolzen wirken, nur diesen selber drehen, und wenn sich die Reibung vermeiden ließe, so blieben die Stäbe selbst von jeder Drehung bewahrt. In die Stäbe fallen also nur die Komponenten der Kräfte, die den Richtungen der Stabachsen entsprechen. Diese ideale Anlage ist aber offenbar praktisch nicht ganz zu verwirklichen, wird aber bei der primären, und — wenn man so sagen darf — idealen Theorie des Fachwerks der Einfachheit halber vorausgesetzt. Eine sekundäre Theorie befaßt sich dann mit den Korrektionen, die man an der idealen vornehmen muß, um den Unvollkommenheiten der Gelenkbildung, den Nebenspannungen und anderen Störungen Rechnung zu tragen. Wir werden uns auf die ideale, überwiegend geometrische Theorie beschränken, und außerdem auf das ebene Fachwerk, dessen Stäbe also angenähert in einer Ebene liegen. Die ebenen Fachwerke machen bei Eisenbahnbrücken

und den meisten Dachkonstruktionen den wesentlichen Bestandteil aus; es sind gleichsam ideale Wände oder Balken, aus denen man das überflüssige Material herausgenommen hat, so daß nur das zur Haltbarkeit Notwendige übrig geblieben ist; solche Fachwerke, die gleichsam einen Balken ersetzen, werden Fachwerkträger oder -Balken genannt.

5. Die Hauptaufgabe der geometrischen Theorie des Fachwerks ist die Lösung des Spannungsproblems. Wenn der Ingenieur ein Fachwerk entwerfen will, z. B. eine eiserne Brücke, so muß er zuerst einen Überschlag über die Lasten machen, die seine Tragkonstruktion aushalten soll. Durch die Größe und den Wechsel dieser Lasten wird die Form und Abmessung des Fachwerks nur im großen bestimmt. Es fragt sich dann, welche von den verschiedenen möglichen Konstruktionen die vorteilhafteste ist; man braucht einen Überblick über die Spannungsänderungen, die in den Stäben der Brücke vor sich gehen, wenn eine schwere Last, etwa ein Güterzug, darüber fährt. Ist die beste Form gefunden, so gilt es, die Profile der Stäbe ihren Leistungen entsprechend zu bemessen; der Querschnitt muß der zu erwartenden Maximalspannung proportional sein. Bei allen diesen Fragen kommt es also darauf an, zu ermitteln, welche Spannungen eine gegebene Belastung in einem Fachwerk von gegebener geometrischer Form hervorruft. Das ist das Spannungsproblem. Es wird in § 95 noch präzisiert werden.

6. Da die Dicke der einzelnen Stäbe selbst noch zu den Unbekannten des Problems gehört, so idealisiert die geometrische Theorie zunächst das Fachwerk noch weiter, indem sie die Stäbe durch gerade Strecken ersetzt, die man sich etwa als Schwerlinien der Stäbe denken darf. Diese Strecken, wiederum Stäbe genannt, stoßen in den Knotenpunkten aneinander, in denen sie gelenkartig aneinander befestigt sind, was also statisch darauf hinausläuft, daß sie nur in ihrer Längsrichtung angreifende Kräfte aufzunehmen vermögen. Alle angreifenden Kräfte werden dem Fachwerk ausschließlich von den Knoten aus mitgeteilt. Beim ebenen Fachwerk liegen diese Kräfte in der Ebene des Fachwerks, was wir zukünftig immer stillschweigend voraussetzen wollen. Zu den Kräften, die an einem Fachwerk wirken, gehört auch die eigene Schwere der Stäbe. In der primären Theorie wird diese außer Betracht gelassen, in der sekundären in der Weise in Ansatz gebracht, daß das Gewicht eines Stabes auf seine beiden Knotenpunkte gleichmäßig verteilt wird. Streng genommen ist das nicht ganz genau, der Stab belastet auch die anderen, doch genügt dieser Ansatz vorläufig allen Ansprüchen. Ein Stab hat also nur zwei Knotenpunkte, nämlich an seinen beiden

Enden A und B; ein Knotenpunkt in der Mitte M von AB, etwa wie im Vertikalstab eines lateinischen K, so daß der Stab an dieser Stelle nur vom Gelenkbolzen durchbohrt, aber selber nicht zerschnitten wird, ist ausgeschlossen; denn wenn der Stab dort nicht selber ein Gelenk hat, also in zwei Stäbe AM und MB zerfällt, könnte er von den in M angreifenden anderen Stäben auf Biegung beansprucht werden, was ausgeschlossen werden sollte. In der Praxis weicht man auch hiervon mitunter ab. Wohl aber kann es vorkommen, daß zwei Stäbe eines ebenen Fachwerkes sich kreuzen, ohne in der Schnittstelle durch ein Gelenk verbunden zu sein. Solche Überschneidungen kommen beim Dreiecksfachwerk, das aus lauter Dreiecken besteht, nicht vor. Auf dieses werden sich unsere ersten Beispiele beschränken, zum Schlusse aber werden wir alle zulässigen Fälle berücksichtigen. Die Knotenpunkte werden wir in der Zeichnung stets durch Nullkreise kenntlich machen, einfache Schnittpunkte erhalten diese Auszeichnung nicht.

§ 94. Die Auflagerreaktionen.

1. Ebene Fachwerke werden in der Regel paarweise verwendet; die beiden Fachwerke eines Paares werden dann durch Querstäbe miteinander zu einem starren Ganzen verbunden, jedoch so, daß dadurch keine Spannungen vom einen zum anderen Bestandteil übertragen werden. Die Belastung wird dabei auf die Knotenpunkte beider Teile so verteilt, daß die Angriffslinien in die Ebenen dieser Fachwerke fallen. Man kann daher jedes dieser Fachwerke unabhängig vom anderen betrachten, wodurch die Theorie der ebenen Fachwerke wesentlich erleichtert wird. Es gibt aber auch Fachwerke, z. B. von Kuppeldächern, bei denen eine solche Sonderung der einzelnen ebenen Bestandteile nicht möglich ist, wo also ihre Beanspruchung nur im Gesamtverband beurteilt werden kann. Das sind die „räumlichen" Fachwerke.

2. Der einzelne ebene Fachwerkträger wird nun noch im allgemeinen irgendwo gestützt sein, damit er sich nicht fortbewegen kann. Soll er, wie ein Balken, an den beiden Enden auf horizontaler Unterlage ruhend, nur vertikal wirkende Lasten tragen, so braucht er an diesen Auflagern nicht weiter befestigt zu werden. Handelt es sich aber z. B. um ein Dach, das dem Winddruck ausgesetzt ist, so muß mindestens an einer Auflagerstelle der Träger befestigt werden, damit er keine Verschiebung erleidet. Diese Befestigung wird, wie die Knotenpunkte, gelenkartig ausgeführt, um drehende Kräfte wir-



kungslos zu machen. Ehe wir aber an das Spannungsproblem herantreten können, müssen wir den ebenen Fachwerkträger aus seiner natürlichen Lage ganz herausnehmen. Es ist am anschaulichsten, wenn man sich vorstellt, daß er nach Lösung etwaiger Auflagerverbindungen auf eine Ebene ausgebreitet wird, auf der er ohne Reibung bewegt werden kann, so daß er ohne Kraftaufwand verschiebbar ist. Die Kräfte Q, die auf dem in situ befindlichen Träger wirkten, werden dann an dem frei beweglichen angebracht, an demselben Knotenpunkte, in derselben Größe und mit derselben Neigung der Angriffslinien gegen die Fachwerkstäbe wie beim montierten Träger. Wenn die Kräfte Q, als linienflüchtige Vektoren betrachtet, sich nicht zufällig aufheben, werden sie das kraftlos bewegliche ruhende Fachwerk offenbar fortschieben. Damit es in seiner Lage bleibt, müssen Gegenkräfte angebracht werden, die Gleichgewicht herstellen, aber so, daß der eintretende Spannungszustand genau dem des in seiner natürlichen Lage befindlichen Trägers entspricht. Diese Gegenkräfte müssen also die statische Wirkung der Auflager vollständig zu ersetzen suchen. Sie werden die „Auflagerreaktionen“ genannt. Man erklärt sie auch vom Standpunkte des Prinzips von der Gleichheit der Aktion und Reaktion: Das Fachwerk übt auf die Auflager gewisse Drucke aus, denen die Auflager durch entgegengesetzt gleiche Drucke, die Auflagerreaktionen, begegnen. Das ist aber genau genommen nur eine Definition des Begriffes der Reaktion; man tut gut, diesem Begriffe durch die Vorstellung des auf ebener Unterlage reibungslos beweglichen Trägers, den die Lagerreaktionen gegen Fortbewegung durch die Belastung schützen, einen konkreten Inhalt zu geben. — Wie sind nun diese Gegenkräfte anzubringen?

3. Die allgemeine Vorschrift, daß die Auflagerreaktionen die Wirkungsweise der fortgenommenen Auflager ersetzen sollen, erfährt je nach der Art der Auflager verschiedene Auslegung. Am leichtesten ist die Beurteilung der Rollenlager: An einem Knotenpunkte und um ihn drehbar ist so zu sagen ein kleines Wägelchen mit zylindrischen Rädern angebracht, das, wenn das Fachwerk nicht anderweit befestigt wäre, auf seiner Unterlage hin und herfahren könnte (Fig. 308); diese ist eben und horizontal oder geneigt.

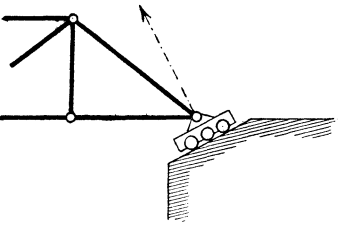


Fig. 308.

Sieht man von der Reibung ab, so kann eine solche Vorrichtung auf die Unterlage nur Drucke übertragen, die senkrecht auf die Gleitebene wirken. Also halten wir fest:

Die Auflagerreaktion eines Rollenlagers steht senkrecht auf der Gleitebene desselben und geht durch den Knotenpunkt.

4. Wird die Befestigung durch einen Stab s bewirkt, der von einem gelenkartigen Knotenpunkte in irgend einer Richtung in ein festes Widerlager dringt, sagen wir ein solides Mauerwerk (Fig. 309), so kann das Fachwerk nur in der Richtung von s auf das Widerlager wirken. Die gesuchte Ersatzkraft muß also in s der Kraft des Fachwerkes entgegenwirken.

Die Auflagerreaktion eines Befestigungsstabes hat diesen zur Angriffslinie.

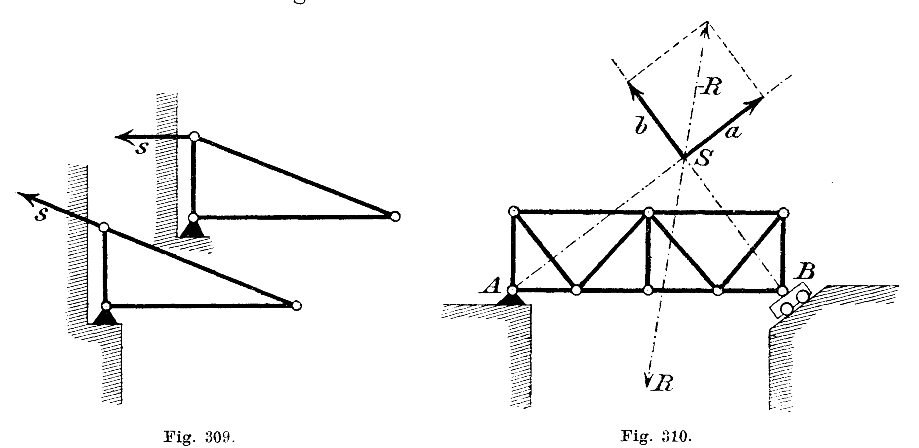


Fig. 309. Fig. 310.

5. Der Befestigungsstab dient offenbar nur dazu, einen Knotenpunkt an einem Widerlager so zu befestigen, daß man beurteilen kann, mit welcher Kraft der Stab in seiner eigenen Richtung in das Widerlager hineingepreßt, oder vielmehr, was in der Praxis wichtiger ist, mit welcher Kraft er herausgerissen wird; diese Art der Befestigung wird z. B. bei Vordächern angewandt, worauf sich auch Figur 309 bezieht. Wird hingegen ein Knotenpunkt an einem Widerlager so fixiert, daß er nach allen Seiten hin Kräfte auffangen kann, so wird er ein Drehpunkt genannt.

Von einem Drehpunkte läßt sich hinsichtlich der Auflagerreaktion nur sagen, daß ihre Angriffslinie durch diesen Punkt geht (Fig. 310).

6. Nach diesen Ausführungen sind die Auflagerreaktionen leicht zu bestimmen. Die technisch wichtigsten Fälle sind:

A. Befestigung durch einen Drehpunkt A und ein Rollenlager B (Fig. 310).

Das in B auf der Gleitebene des Rollenlagers errichtete Lot treffe die Resultante $\boldsymbol{R}$ der das Fachwerk angreifenden Kräfte in S. Da die Auflagerreaktionen von A und B der Kraft $\boldsymbol{R}$ das Gleichgewicht halten sollen und die eine dieser Gegenkräfte auf SB liegt, so muß SA die Angriffslinie der Auflagerreaktion von A sein. Zerlegt man daher die umgedrehte Resultante $-\boldsymbol{R}$ in ihre Komponenten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ auf SA und SB, so sind $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$, gebunden an AS und BS, die gesuchten Reaktionskräfte.

B. Befestigung durch einen Drehpunkt A und einen Befestigungsstab BC (Fig. 311).

Die Resultante $\boldsymbol{R}$ der das Fachwerk angreifenden Kräfte treffe CB in S; dann wird $-\boldsymbol{R}$ wiederum in zwei Komponenten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ auf SA und SB zerlegt; das sind dann die Auflagerreaktionen (Fig. 311, a, b).

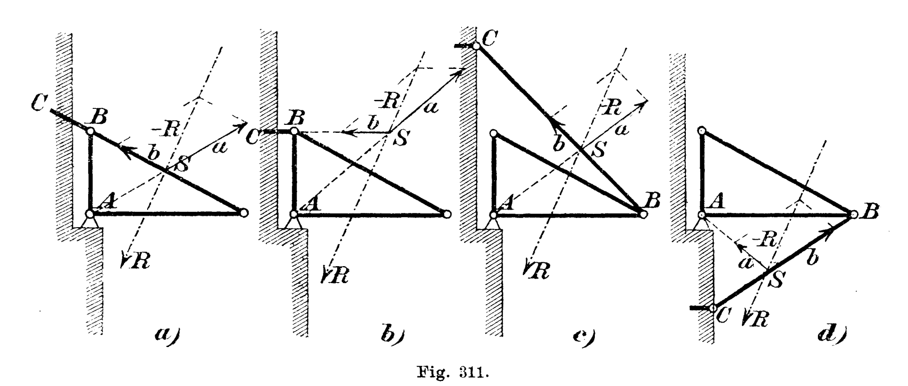


Fig. 311.

Der Befestigungsstab BC kann auch als Zugstange (Fig. 311, c) oder Druckstange (Fig. 311, d) ausgeführt werden. Die Bestimmung der Auflagerreaktionen erfolgt wie in a) und b) und ist aus den Figuren c) und d) unmittelbar ersichtlich, die mit a) und b) in der Bezeichnung übereinstimmen.

Des theoretischen Interesses halber erwähnen wir noch

C. Befestigung durch drei Zugstangen (Fig. 312).

Die drei Stangen a, b, c bilden ein Dreieck ABC, auf dessen Seiten die Auflagerreaktionen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ wirken müssen. Diese sind also gleich den drei Komponenten der umgekehrten Resultante der Belastungskräfte nach a, b, c. Diese werden nach § 90, 7. gefunden.

7. Sind mehr als drei Auflager gegeben, so werden ihre Reaktionen unbestimmt; denn man könnte sie alle bis auf zwei oder drei willkürlich vorschreiben und die beiden noch fehlenden nach dem Vorangehenden konstruieren. Aber selbst bei zwei Auflagern kann diese sogenannte statische Unbestimmtheit ihrer Reaktionen auf-

treten, nämlich z. B., wenn zwei Drehpunkte A, B gegeben sind. Dann müssen die Angriffslinien der Auflagerreaktionen durch A und B gehen und sich in irgend einem Punkte der Resultante der Belastungskräfte treffen, was auf unendlich viel Weisen geschehen kann.

Solche statisch unbestimmte Befestigungen werden nach Möglichkeit vermieden, lassen sich aber nicht ganz ausschließen. Im Falle der statischen Unbestimmtheit ist auch dem Spannungsproblem statisch nicht beizukommen; gelöst wird es in diesem Falle mit den sehr viel schwierigeren Mitteln der Elastizitätstheorie. Wir wollen daher im folgenden immer nur statisch bestimmte Auflagerreaktionen voraussetzen. Dann können wir unmittelbar zur begrifflichen Festlegung des Spannungsproblems übergehen.

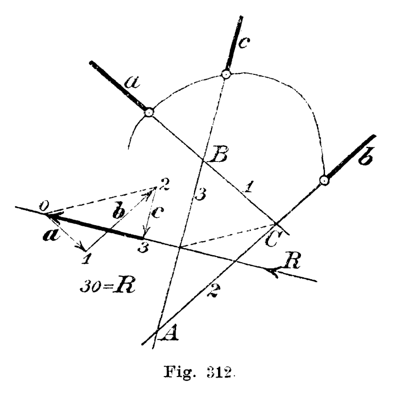


Fig. 312.

§ 95. Das Spannungsproblem.

1. Sei ein ebenes Fachwerk gegeben und in seiner Ebene ein System Q von Kräften, die an den Knotenpunkten angreifen. Wir lösen das Fachwerk aus seinen Auflagerverbindungen und ersetzen diese durch die Auflagerreaktionen. Wenn wir also nach § 94, 2. das Fachwerk mit allen diesen Kräften auf eine horizontale Ebene legen, wo es reibungslos beweglich ist, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wenn diese Ebene mittels untergelegter gleich großer Stahlkugeln auf einer zweiten ohne Kraftaufwand verschiebbar ist, so halten die Auflagerreaktionen dem System Q das Gleichgewicht und verhindern so eine Bewegung des Fachwerks. So kommen wir dazu, das frei bewegliche Fachwerk uns unter der Einwirkung eines ebenen Systems von Kräften zu denken, die einander das Gleichgewicht halten. Ein solches System wollen wir einfach ein Angriffssystem nennen. Ein Angriffssystem besteht also 1) aus den die Belastung bildenden Kräften Q und 2) aus den Auflagerreaktionen; wir werden uns jedoch häufig das Angriffssystem willkürlich geben, da für das Spannungsproblem die Einteilung in Belastungskräfte und Reaktionen nicht in Betracht kommt. Wir heben aber noch einmal hervor, daß die Kräfte eines Angriffssystems immer im Gleichgewicht stehen und in der Ebene des Fachwerkes an den Knotenpunkten, genauer an den Gelenkbolzen derselben, angreifen sollen, so daß auf die Stäbe nur

in ihrer Längsrichtung wirkende Komponenten des Angriffssystems entfallen.

2. Um nun das Spannungsproblem zu konkreter Anschauung zu bringen, nehmen wir an, daß es sich um ein leichtes Modellfachwerk und dementsprechend um geringe Angriffskräfte handele, und beseitigen irgend einen Stab AB, ohne in seinen Endpunkten A und B die Gelenkverbindung der übrigen Stäbe aufzuheben; dann wird das frei bewegliche Fachwerk entweder nach wie vor in Ruhe bleiben, oder es wird, wenn es mit jenem Stabe seiner inneren Festigkeit beraubt ist, unter Änderung seiner Gestalt in Bewegung geraten. In diesem Falle stelle ich mich in die Lücke des herausgenommenen Stabes AB und suche durch die Kraft meiner Arme die beiden Knotenpunkte A und B in der Entfernung s auseinander zu halten, die ihnen ursprünglich der Stab AB aufgenötigt hatte. Zu diesem Zwecke muß ich entweder mit beiden Armen in entgegengesetzter Richtung drücken oder ziehen, jedenfalls also ein Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte mit der Angrifflinie AB ausüben, die wir Abwehrkräfte nennen wollen, im Gegensatz zu den von außen her auf das Fachwerk eindringenden Angriffskräften. Läßt sich ein Stab ohne Störung des Gleichgewichts herausnehmen, so daß also in seine Lücke kein Paar von Abwehrkräften zu treten braucht, so wollen wir ihm ein Paar verschwindender Abwehrkräfte zuschreiben; die Bedeutung dieses Vorkommnisses wird erst später hervortreten. So entspricht denn also jedem Stabe ein Paar von Abwehrkräften, und es gilt der

Satz 1. Alle diese Abwehrkräfte zusammengenommen halten den Angriffskräften das Gleichgewicht. Das Spannungsproblem verlangt nun, diese Abwehrkräfte zu bestimmen.

3. Diese Aufgabe läßt sich noch schärfer fassen. Zunächst wollen wir, um den anthropomorphistischen Standpunkt zu verlassen, alle Kräfte am Fachwerk durch Gewichte an Schnüren verwirklichen, die je über eine Rolle laufen und an den Knotenpunkten befestigt sind. Durch passende Aufhängung der Rollen können wir jeder dieser Kräfte die gewünschte Richtung geben (§ 6, 2.). Durch dieses Verfahren können wir auch die Abwehrkräfte darstellen und zugleich meßbar machen. Mußte ich bei dem soeben besprochenen Experiment mit beiden Armen ziehen, um die Knotenpunkte A, B in der richtigen gegenseitigen Entfernung s zu halten, so müssen die Rollen und Gewichte, die dieselbe Wirkung hervorbringen sollen, in der aus Figur 313 ohne weiteres zu verstehenden Weise aufgehängt sein, und die Größe der beiden gleichen Gewichte α, β kann experimentell be-

stimmt werden. Die Schnüre mit den Gewichten α, β lassen die Richtung der Abwehrkräfte erkennen, die Pfeile AA', BB' in der Verlängerung der Schnüre zeigen, in welcher Richtung mir die Knotenpunkte zu entfliehen suchen. Die Figur illustriert auch den Fall, daß ich die Abwehr durch Druckkräfte leisten mußte. Die Größe der gleichen Gewichte α, β ist das gemeinschaftliche Maß dieser Kräfte, es wird ihnen aber mit entgegengesetzten Vorzeichen zugeschrieben. Die Pfeile AA', BB' zeigen wiederum die Richtung an, in der ohne mein Eingreifen die Knotenpunkte sich bewegen würden.

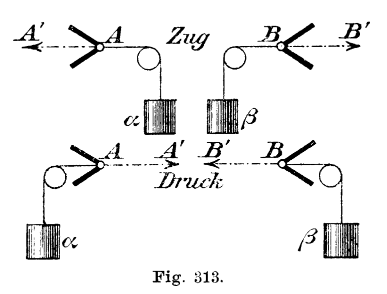


Fig. 313.

Nach Maßgabe dieser Figuren denken wir jetzt sämtliche Stäbe herausgenommen und ihre Wirkung durch Gewichte an Schnüren ersetzt. Wenn das vielleicht auch praktisch nicht durchführbar ist, so hat dieses ideale Experiment doch den Wert, eine möglichst klare Anschauung von der statischen Auffassung des Spannungsproblems zu geben, die in ihrer vollen Reinheit, und wenn man will, Einseitigkeit, von elastischen Kräften und Deformationen der eisernen Fachwerkstäbe nichts weiß. Nach Beseitigung aller Stäbe nun müssen alle Paare von Abwehrkräften zusammengenommen den Angriffskräften das Gleichgewicht halten; wenn man also die Knotenpunkte bis zur Anhängung sämtlicher Schnüre festgehalten hat — die Stäbe sind ja herausgenommen — und sie nach vollendeter Aufhängung losläßt, ohne ihnen einen Stoß zu erteilen, so muß das ganze System in Ruhe bleiben.

4. Die hier beschriebene Vorrichtung, die man treffend ein Fadenmodell des Fachwerks nennen könnte, ist in einfachen Fällen an einer Wandtafel leicht ausführbar, wozu man die zur Demonstration des Parallelogrammgesetzes dienenden Fäden, Rollen und Gewichte benutzen kann; die Knotenpunkte werden durch kleine Ringe dargestellt, an welche die Schnüre geknüpft werden; diese Ringe muß man, bis sämtliche Gewichte angehängt sind, mit Nägeln festhalten und dann freigeben.

Faßt man nun einen einzelnen Knotenpunkt A dieses Fadenmodells ins Auge, so bemerkt man sofort, daß die in ihm wirksamen Kräfte, nämlich die etwa vorhandene Angriffskraft und die Abwehrkräfte, für sich im Gleichgewicht sind; denn hätten diese Kräfte eine (nicht verschwindende) Resultante, so müßte der Knotenpunkt in der Richtung derselben fortgeschoben werden. So folgt der wichtige

Satz 2. Das Gleichgewicht der Angriffskräfte und der Abwehrkräfte kommt in der Weise zu stande, daß in jedem Knotenpunkte für sich Gleichgewicht herrscht.

Einer Unklarheit soll noch vorgebeugt werden, die daraus entspringen könnte, daß wir schon von den Angriffskräften vorausgesetzt hatten, sie ständen für sich im Gleichgewicht. Hier bedeutet das Wort Gleichgewicht, wie immer, wenn man keinen näheren Zusatz macht, die Tatsache, daß diese Kräfte in der starren Ebene, als linienflüchtige Vektoren behandelt, sich aufheben würden. Am Fachwerk dagegen sind diese Kräfte keine linienflüchtigen Vektoren mehr, sie sind an die Knotenpunkte geknüpft und dürfen auf ihren Angriffslinien nicht verschoben werden. Daß die so an feste Punkte gebundenen Angriffskräfte gleichwohl im Gleichgewicht stehen, nämlich vermittels des Fachwerks, wird eben durch die Lösung des Spannungsproblems in Evidenz gesetzt; denn nach Lösung dieses Problems wird einerseits sichtbar, daß in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herrscht, andererseits ordnen sich die Abwehrkräfte zu Paaren entgegengesetzt gleicher Kräfte, die durch die festen Stäbe des Fachwerks zerstört werden, weil sie auf diesen sich wie linienflüchtige Vektoren verhalten.

5. Am Fadenmodell lösen die Abwehrkräfte in vollkommener Weise die Aufgabe, die Knotenpunkte trotz ihrer Beweglichkeit und trotz der Angriffskräfte in der gegenseitigen Entfernung festzuhalten, die sie ursprünglich im Fachwerk hatten. Am Fachwerk selbst fällt diese Aufgabe den Stäben zu. Diese lösen sie aber nur angenähert, denn das Eisen gibt infolge seiner Elastizität den Kräften immer ein wenig nach. Wenn das Fadenmodell für einen Stab AB Zug anzeigt (Fig. 313), so wird der Stab ein wenig verlängert, und die Pfeile AA', BB' der Figur können als Kennzeichen dieses Zustandes aufgefaßt werden. Man sagt dann, der Stab sei auf Zug beansprucht, und als Maß dieses Zuges dient die Kraft α oder die ihr gleiche Kraft β der Figur. Während bei der anthropomorphistischen Auffassung des Kraftbegriffes, von der wir in 3. ausgingen, unsere Arme den Zug ausüben mußten, um den Abstand der Knoten A, B festzuhalten, erfährt der wieder eingefügte Stab einen Zug in entgegengesetzten Richtungen, den auch wir natürlich empfinden würden, wenn wir nicht den Gegenzug leisteten, sondern uns passiv verhielten.

Weist hingegen das Fadenmodell für den Stab AB auf Druck, der also, wenn wir uns wieder selber in die Lücke schalteten ohne Widerstand zu leisten, unsere Arme zusammenpressen würde, so erfährt der Stab im Fachwerk eine kleine Stauchung, er wird auf

Druck beansprucht, und die Pfeile AA', BB' der Figur 313 zeigen diesen Zustand an.

Der Druck oder Zug, den der Stab erleidet, ist also entgegengesetzt dem Druck oder Zug, den er ausüben müßte, um jede Längenänderung zu vermeiden.

Wir werden im folgenden der Eindeutigkeit halber die Wörter Druck und Zug nicht auf die Abwehrkräfte beziehen, sondern, passiv aufgefaßt, auf die Kräfte, unter deren Einfluß der elastische Stab deformiert wird.

Das den Zug bewirkende Kräftepaar hat in Figur 313 die Sinne AA' und BB'; der Größe nach stimmen diese Kräfte aber mit den Abwehrkräften α, β bis aufs Vorzeichen überein.

Druck- und Zugkraft werden zusammengefaßt unter dem Namen Stabkraft.

Die Stabkräfte bilden also in jedem Stabe ein Gegenpaar.

Da die Stabkräfte aus den Abwehrkräften durch Umkehrung der Pfeile hervorgehen, die Abwehrkräfte aber die Angriffskräfte im Schach halten, so folgt:

Satz 3. Die Stabkräfte halten den umgekehrten Angriffskräften das Gleichgewicht.

6. Jetzt läßt sich das Spannungsproblem auch so aussprechen:

Man soll an den Knotenpunkten in den Stäben solche Kräfte anbringen, daß

1. in jedem Stabe zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken und
2. diese „Stabkräfte" den umgekehrten Angriffskräften das Gleichgewicht halten.

Mit anderen Worten: Die Stabkräfte sind die Komponenten der Angriffskräfte in den einzelnen Stäben. Doch ist es zur Vermeidung von Vorzeichenfehlern, die bei Anfängern häufig vorkommen, sicherer, wenn man sich die Kräfte an jedem Knotenpunkte im Gleichgewicht denkt: Also gehören zusammen entweder die Angriffskräfte und die Abwehrkräfte, oder die umgekehrten Angriffskräfte und die Stabkräfte. Beide Auffassungen sind in der Technik vertreten; wir werden uns an die letzte halten. Sachlich sind beide Auffassungen kaum verschieden, praktisch entsprechen ihnen aber Unterschiede in der Anlage der Figur.

Wir werden nun zunächst eine Reihe von Beispielen bringen, in denen das Spannungsproblem mit den einfachsten Mitteln lösbar ist, dann aber die Fälle eingehender untersuchen, in denen die Lösung

aus inneren Gründen unmöglich ist. Nach diesen Vorbereitungen wird dann das Problem im umfassendsten, statisch lösbaren Falle erledigt.

§ 96. Das Krafteckverfahren.

1. Der in Figur 314 abgebildete symmetrische Fachwerkträger sei in den Knoten 2, 4, 6 drei vertikal abwärts wirkenden Kräften $\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_4, \boldsymbol{P}_6$ von gleicher Größe $\boldsymbol{P}$ ausgesetzt, die aus Figur 315 zu ersehen ist; in 1 sei ein Drehpunkt, in 7 ein Rollenlager auf wage-

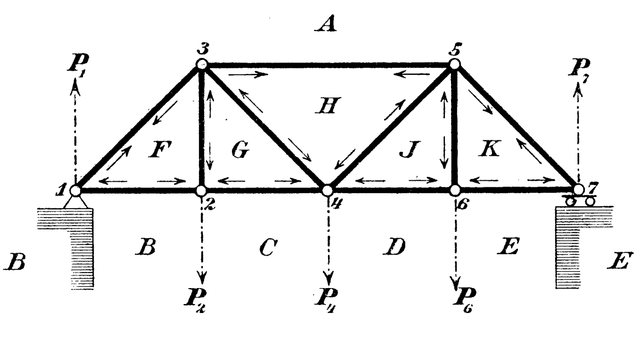


Fig. 314.

rechter Gleitfläche. Die Auflagerreaktion $\boldsymbol{P}_7$ in 7 ist daher ebenfalls vertikal, und da sie zusammen mit der in 1 den drei Kräften $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_6$ das Gleichgewicht halten soll, so ist auch die Auflagerreaktion $\boldsymbol{P}_1$ in 1 vertikal. Wegen der Gleichheit der Strecken 12, 24, 46, 67 fällt die Angriffslinie der Resultante $3\boldsymbol{P}$ von $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_6$ zusammen mit der von $\boldsymbol{P}_4$, und die Auflagerreaktionen sind je gleich $-\frac{3}{2}\boldsymbol{P}$. Wie in diesem Beispiele, so kann man häufig bei parallelen Kräften die Auflagerreaktionen durch einfache Rechnung finden.

2. Das Spannungsproblem verlangt, die Angriffskräfte $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_7$ so in Komponenten längs der Stäbe zu zerlegen, daß in jeden Stab zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte kommen, die an seine beiden Endpunkte geknüpft sind (§ 95).

Wollte man diese Zerlegung etwa am Knoten 3 beginnen, wo die Angriffskraft Null ist, so hätte man diese nach den vier Richtungen 31, 32, 34, 35 zu zerlegen; diese Aufgabe hat aber eine unendlich vieldeutige Lösung. Denn man könnte in 31 und 32 an 3 ganz beliebige Kräfte annehmen und ihre umgekehrte Resultante nach 34 und 35 zerlegen; diese vier Kräfte hätten dann, wie verlangt wird, die Resultante Null. In 3 können wir also nicht anfangen, auch in 5

und in 2, 4, 6 nicht. Eindeutig kann eine Kraft an einem Punkte nur nach zwei durch diesen Punkt gehenden Komponenten zerlegt werden. Wir können also nur in 1 oder 7 anfangen und entscheiden uns für 1.

Wenn also ein Fachwerk keinen Zweistabknoten hat, so ist das Spannungsproblem nicht unmittelbar durch Zerlegung der Angriffskräfte graphisch lösbar.

3. In 1 beginnend zerlegen wir die Auflagerreaktion $P_1 = -\frac{3}{2}P$ nach den Richtungen 12 und 13. Um nicht die Figur des Fachwerks durch Hilfslinien zu verwirren, geschieht die Zerlegung in einer Hilfsfigur (Fig. 315), in der wir $B_1 A_1 = -\frac{3}{2}P$, also in vertikal aufwärts gehendem Sinne auftragen und durch B_1 die Parallele zu 12, durch A_1 die Parallele zu 13 ziehen. Ist F_1 der Schnittpunkt der Parallelen, so ist $B_1 A_1$ die Resultante von $B_1 F_1$ und $F_1 A_1$, also $B_1 F_1$ die Stabkraft auf 12 und $F_1 A_1$ die Stabkraft auf 13 im Knotenpunkte 1 nach Größe und Richtung. Daß die umgekehrte Angriffskraft des Knotenpunktes 1 mit den Stabkräften an 1 im Gleichgewichte steht, ist unmittelbar am Krafteck (1) dieser drei Kräfte in

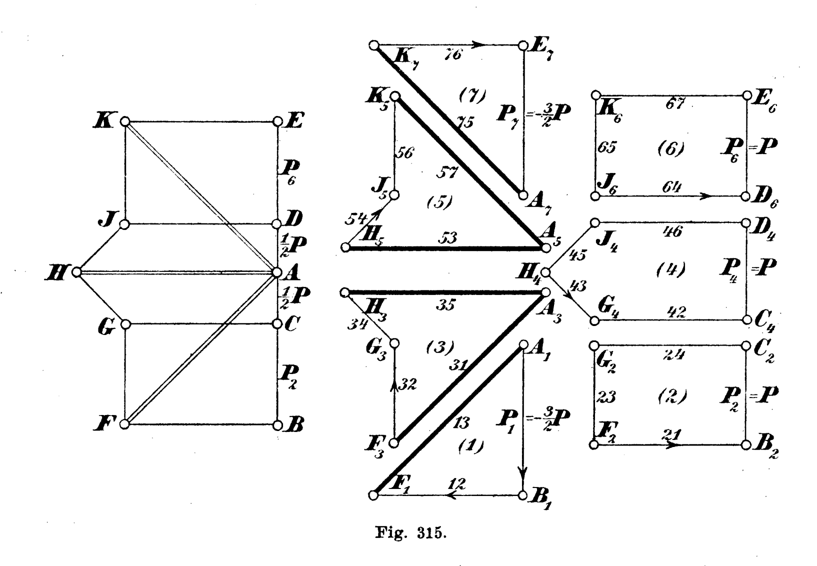


Fig. 315.

Figur 315 ersichtlich: Die umgekehrte Angriffskraft ist $A_1 B_1$, und wenn man das Krafteck $A_1 B_1 F_1$ im Sinne von $A_1 B_1$ durchläuft, so durchläuft man die Stabkräfte in ihrem richtigen Sinne, und das Polygon schließt sich. Dem Knotenpunkte 1 entspricht demnach ein Krafteck $(1) = A_1 B_1 F_1$, und es gilt die Regel:

Durchläuft man das Krafteck (1) im Sinne der **umgekehrten** Angriffskraft, so durchläuft man die übrigen Kräfte desselben in ihrem Sinne.

Auf dem Stabe 12 weist dieser Sinn von 2 nach 1, auf 13 von 1 nach 3. In 12 herrscht also Zug, in 13 Druck, was wir im Fachwerk Figur 314 durch Pfeile bei 1 andeuten.

Im Krafteck oder am Fachwerk pflegt man Druckkräfte kräftiger oder doppelt auszuziehen,

wie in Figur 315, (1) geschehen ist.

4. Das Spannungsproblem verlangt, daß auf 13 die an 1 ermittelte Kraft $\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{A}_1$ mit entgegengesetztem Sinne an 3 wirke, und ebenso ist auf 12 in 2 die Gegenkraft der in 1 auf 12 wirkenden Kraft anzubringen. Infolgedessen sind von den Stabkräften am Knoten 3 noch drei, am Knoten 2 dagegen nur die zwei Kräfte auf 23 und 24 unbekannt. Diese können daher bestimmt werden. Auch an 2 müssen nämlich die Stabkräfte der umgekehrten Angriffskraft das Gleichgewicht halten; das Krafteck (2), das diese vier Kräfte summiert, muß sich daher schließen. Von diesem Krafteck zeichnen wir zuerst die Seite $\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{B}_1 = -\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1$, entsprechend der in 12 an 2 wirkenden Kraft $-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1$, setzen $\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_2 = -\boldsymbol{P}_2$ daran, also nach oben, und legen durch $\boldsymbol{C}_2$ die Parallele zu 24, durch $\boldsymbol{F}_2$ die Parallele zu 23.

Durchläuft man das so entstandene Krafteck (2) = $\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{G}_2$ im Sinne der umgekehrten Angriffskraft, so werden wiederum die übrigen Seiten in ihrem Sinne durchlaufen,

und es wirken daher in 2 auf 21, 24, 23 die Zugkräfte $\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{F}_2$, was auch in Figur 315, (2) durch die Beischriften an den Seiten von (2) angedeutet ist.

Betrachtet man am Fachwerk die vier Kräfte des Knotens 2 in der zyklischen Folge, die sich bei positiver Umkreisung des Punktes 2 (d. h. gegen den Drehsinn des Uhrzeigers) ergibt, so folgen diese Kräfte im Krafteck (2) aufeinander in dem Durchlaufungssinne, der durch die **umgekehrte** Angriffskraft festgelegt wird und der den Stabkräften entspricht.

5. Trägt man die Pfeile der nun bekannten Stabkräfte im Fachwerk selber ein (Fig. 314)[1]), sowie in den Endpunkten der betreffenden

1) Dem Leser wird empfohlen, das Fachwerk neu zu zeichnen und die Pfeile der ermittelten Stabkräfte jedesmal einzutragen, weil so deutlicher hervortritt, zu welchem Knoten die Konstruktion alsdann übergehen muß.

Stäbe die entgegengesetzten Pfeile, so zeigt sich, daß jetzt der Knotenpunkt 3 aufgeschlossen, d. h. der Lösung zugänglich ist, da in ihm nur noch zwei Stabkräfte unbekannt sind. Dagegen hat 4 noch drei Unbekannten. Dem Knoten 3 ordnen wir ein Krafteck (3) = $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{H}_3$ zu (Fig. 315) mit $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{G}_3 = -\boldsymbol{G}_2\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_2\boldsymbol{G}_2$, $\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{H}_3 \parallel 34$, $\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{A}_3 \parallel 35$, wodurch $\boldsymbol{H}_3$ bestimmt ist. Demnach wirken in 3 auf 32 und 34 die Zugkräfte $\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{H}_3$, auf 35 die Druckkraft $\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{A}_3$, die in (3) kräftig ausgezogen ist. Wiederum sehen wir:

> Betrachtet man die Kräfte des Knotens 3 im Krafteck (3) in der zyklischen Folge, in der wir sie bei positiver Umkreisung des Knotens 3 antreffen, so wird das Krafteck (3) erstens in stetiger Folge durchlaufen, also ohne eine Seite zu überspringen, und zweitens im **richtigen** Sinne der Stabkräfte.

Ebenso war es in (1) und (2), nur daß dabei die Angriffskräfte im Gegensinne durchlaufen wurden, während in (3) die Angriffskraft fehlt. Diese Zuordnung des positiven Drehsinnes um den Knoten und des hinsichtlich der Stabkräfte richtigen Durchlaufungssinnes seines Kraftecks erleichtert das Verständnis der ganzen Konstruktion so sehr, daß wir sie auch für die anderen Knotenpunkte herbeiführen wollen.

Dazu ist nur nötig, bei der Anlage des Kraftecks immer die Kräfte in dem zyklischen Sinne aneinanderzureihen, in der man sie bei positiver Umkreisung des Knotens antreffen würde.

6. Wenden wir uns also dem nunmehr aufgeschlossenen Knoten 4 zu, so werden wir zunächst die bekannten Kräfte in der Reihenfolge 43, 42, $\boldsymbol{P}_4$ aneinandersetzen, die einer positiven Umkreisung von 4 entspricht. So erhalten wir das Krafteck (4) in völlig eindeutiger Weise: $\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{G}_4 = \boldsymbol{H}_3\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{C}_4 = \boldsymbol{G}_2\boldsymbol{C}_2$, $\boldsymbol{C}_4\boldsymbol{D}_4 = -\boldsymbol{P}_4$ (also aufwärts), $\boldsymbol{D}_4\boldsymbol{J}_4 \parallel 46$, $\boldsymbol{J}_4\boldsymbol{H}_4 \parallel 45$, wodurch $\boldsymbol{J}_4$ bestimmt ist.

Da das Fachwerk symmetrisch gestaltet und symmetrisch belastet ist, müssen auch die Stabkräfte symmetrisch verteilt sein. Doch wollen wir davon keinen Gebrauch machen, sondern auch die Kraftecke (5), (6), (7) konstruieren. Bei positiver Umkreisung von 5 trifft man die Stäbe mit bekannter Stabkraft in der Reihenfolge 53, 54, darauf die anderen in der Folge 56, 57. In dieser Anordnung bilden wir auch das Krafteck (Fig. 315, (5)): $\boldsymbol{A}_5\boldsymbol{H}_5 = \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{H}_3$, $\boldsymbol{H}_5\boldsymbol{J}_5 = \boldsymbol{H}_4\boldsymbol{J}_4$, $\boldsymbol{J}_5\boldsymbol{K}_5 \parallel 56$, $\boldsymbol{K}_5\boldsymbol{A}_5 \parallel 57$. Ebenso entsteht (6): $\boldsymbol{K}_6\boldsymbol{J}_6 = \boldsymbol{K}_5\boldsymbol{J}_5$, $\boldsymbol{J}_6\boldsymbol{D}_6 = \boldsymbol{J}_4\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_6\boldsymbol{E}_6 = -\boldsymbol{P}_6$ (also aufwärts), $\boldsymbol{E}_6\boldsymbol{K}_6 \parallel 67$, was von selbst erfüllt ist; schließlich (7): $\boldsymbol{A}_7\boldsymbol{K}_7 = \boldsymbol{A}_5\boldsymbol{K}_5$, $\boldsymbol{K}_7\boldsymbol{E}_7 = \boldsymbol{K}_6\boldsymbol{E}_6$, $\boldsymbol{E}_7\boldsymbol{A}_7 = -\boldsymbol{P}_7$, was natürlich nur eine Kontrolle der vorangehenden Konstruktionen bedeutet; zur Lösung des Spannungsproblems, die im

wesentlichen schon mit (4) beendet war, ist (7) nicht erforderlich. Wie man sieht, werden die Stäbe 13, 35, 57 des oberen Fachwerkrandes auf Druck, alle anderen auf Zug beansprucht.

Zum Verständnis der Kraftecke (1) bis (7) sei noch bemerkt, daß an jedem der Umlaufsinn markiert ist, der den Stabkräften und also einer positiven Umkreisung des betreffenden Knotens entspricht; die Namen der Stäbe sind eingetragen; Kräfte verschiedener Kraftecke, wie $\boldsymbol{H}_5\boldsymbol{A}_5$ und $\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{A}_3$, die in den Buchstaben übereinstimmen und sich nur in den Indizes unterscheiden, sind einander gleich.[1])

7. Da wir im nächsten Paragraphen ein Verfahren der Stabkraftbestimmung entwickeln werden, das aus einer Verschmelzung der den einzelnen Knoten entsprechenden Kraftecke besteht, so mag dieses eine Beispiel zur Erläuterung des Krafteckverfahrens genügen. Halten wir für die Anlage der Kraftecke nur fest, daß die bekannten Kräfte des Kraftecks immer in der Reihenfolge aneinandergesetzt werden, in der man sie bei positiver Umkreisung des Knotens antrifft, und daß auch zum Schluß die neuen Stabkräfte in dieser Reihenfolge aufgesucht werden. Diese Bindung an feste Ordnung ist an sich nicht nötig, gibt aber der Lösung einen bestimmten Gang und schützt vor Irrtümern in der Richtung.

Der Umlaufsinn eines Kraftecks $(\varkappa)$, der einer positiven Umkreisung des zugehörigen Knotens $\varkappa$ entspricht, möge „der" Umlaufsinn dieses Kraftecks heißen. Der Umlaufsinn des Kraftecks ist immer dem der etwa vorhandenen Angriffskraft von $\varkappa$ **entgegengesetzt.**

8. Schließlich seien noch folgende Einzelheiten hervorgehoben:

a) Ein symmetrisches Fachwerk mit symmetrischer Belastung und symmetrischen Auflagerreaktionen zeigt auch symmetrische Verteilung der Stabkräfte.

b) Wenn zwei Stäbe eines Knotenpunktes $\varkappa$ auf einer Geraden liegen, so entsprechen ihm im Krafteck $(\varkappa)$ zwei Parallelen.

c) An einem Zweistabknoten ohne Angriffskraft gibt es auch keine Stabkräfte.

d) Wenn zwei Stäbe S_1, S_2 eines Vierstabknotens $\varkappa$ auf einer Geraden u, die beiden anderen S_3, S_4 auf einer Geraden v liegen (Fig. 316), so sind, wenn keine Angriffskraft am Knoten wirkt, an $\varkappa$ die Kräfte auf S_1 und S_2 entgegen-

1) Der linke Teil der Figur 315 wird im nächsten Paragraphen besprochen.

gesetzt gleich, ebenso die Kräfte auf S_3 und S_4. Denn die Resultante von S_1 und S_3 muß der von S_2 und S_4 entgegengesetzt gleich sein. Aus Figur 316 folgt:

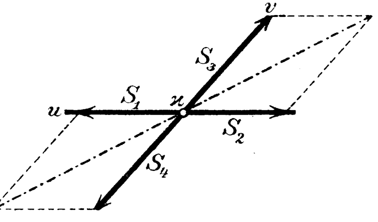


Fig. 316.

e) Wenn von den drei Stäben S, S_1, S_2 eines Dreistabknotens $\varkappa$ zwei auf einer Geraden liegen, S_1 und S_2, während der dritte S, sowie die Angriffskraft $\boldsymbol{P}_\varkappa$, die auch gleich Null sein kann, auf einer zweiten Geraden liegen, so ist an $\varkappa$ die Stabkraft auf S gleich der Angriffskraft, und die Stabkräfte auf S_1, S_2 sind einander entgegengesetzt gleich, also zugleich Zugkräfte oder Druckkräfte.

§ 97. Das Kräfteplanverfahren.

1. Es liegt sehr nahe, zur Ersparung von unnötigen Hilfslinien, die sieben Kraftecke des § 96, Figur 315 zu einer einzigen Figur zu vereinigen. Das ist in dem linken Vieleck der Figur 315 geschehen; man wird dort alle sieben Kraftecke wiederfinden. Die so erzielte Vereinfachung springt dermaßen in die Augen, daß wir uns eingehender damit beschäftigen müssen. Wir setzen die Abbildung des Fachwerks und die vereinfachte Kräftefigur noch einmal hierher (Fig. 317 und Fig. 318). Die Ecken der vereinfachten Kräfte-

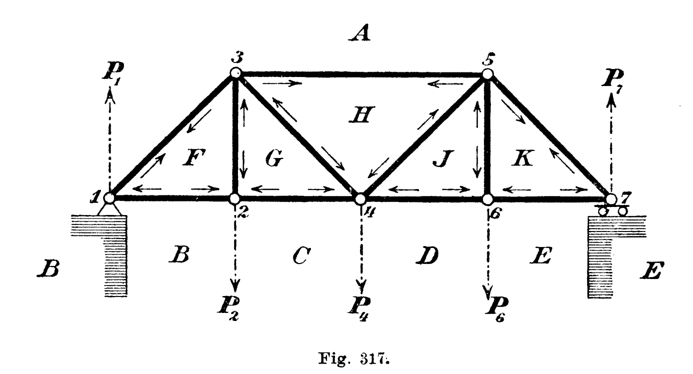


Fig. 317.

figur oder des „Kräfteplans“, wie der Fachausdruck dafür lautet, sind mit denselben Buchstaben bezeichnet wie in den sieben Kraftecken, nur sind die Indizes weggelassen. Die Druckkräfte sind doppelt ausgezogen.

2. Die Bezeichnung des Kräfteplans hängt in höchst eigentümlicher Weise mit der Figur des Fachwerks selber zusammen (Fig. 317). Wir denken uns die Halbstrahlen, auf denen die Angriffskräfte $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{P}_6$, $\boldsymbol{P}_7$ liegen, im Sinne ihrer Pfeile bis ins Unendliche ausgezogen. Dann teilen sie, zusammen mit den Dreiecken des Fachwerks, die Ebene in zehn Felder, die wir mit den Buchstaben $A, B, \ldots, J, K$ bezeichnet haben; die Auflager denke man sich beseitigt. Das Feld A ist von 1357 und den Halbstrahlen $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_7$ begrenzt, das Feld B von $\boldsymbol{P}_1$, 12 und $\boldsymbol{P}_2$; ebenso E von $\boldsymbol{P}_7$, 76 und $\boldsymbol{P}_6$. Die Felder A und B haben den Grenzstrahl $\boldsymbol{P}_1$ gemein, und sonst keine Linie am Fachwerk; B und F haben nur den Stab 12 gemein, C und D nur den Halbstrahl, auf dem $\boldsymbol{P}_4$ liegt, K und A grenzen in 57 aneinander und sonst in keinem Stabe und in keiner Angriffslinie; dagegen haben F und H gar keine Grenzlinie gemeinsam.

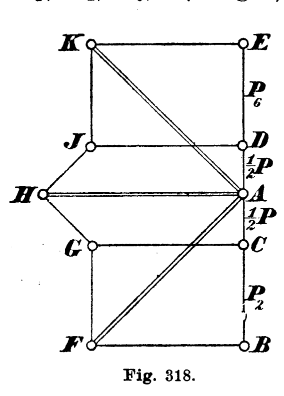


Fig. 318.

Zusammenfassend können wir sagen: Zwei Felder der Figur 317 haben immer höchstens eine Grenzgerade gemein, und diese ist entweder ein Stab, oder die Angriffslinie einer Kraft; diesen Stab oder diese Kraft wollen wir nun benennen durch Angabe jener zwei Felder. Der Stab 35 heißt demnach AH oder HA, der Stab 45 heißt HJ; ebenso ist AB die Kraft $\boldsymbol{P}_1$, BC die Kraft $\boldsymbol{P}_2$, EA die Kraft $\boldsymbol{P}_7$. Bei positiver Umkreisung des Knotens 3, anfangend von 31, durchläuft man daher die Stäbe AF, FG, GH, HA, wobei die Buchstaben in der Reihenfolge angegeben sind, in der man die betreffenden Felder betritt. Suchen wir nun zu den genannten Stäben in § 96, Figur 315, (3) die in ihnen herrschenden Stabkräfte, so zeigt sich, daß dies die Kräfte $\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{G}_3$, $\boldsymbol{G}_3\boldsymbol{H}_3$, $\boldsymbol{H}_3\boldsymbol{A}_3$ sind, die in Figur 318 einfach $\boldsymbol{AF}$, $\boldsymbol{FG}$, $\boldsymbol{GH}$, $\boldsymbol{HA}$ heißen, also gerade so, wie die Stäbe!

3. Um den Knotenpunkt 4 folgen in positivem Umlaufsinne die Stäbe HG, GC, die Kraft CD und die Stäbe DJ, JH; im zugehörigen Krafteck (4) der Figur 315, § 96 folgen aufeinander im Umlaufsinne dieses Kraftecks (vergl. § 96, 7.): $\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{G}_4$, $\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{C}_4$, $\boldsymbol{C}_4\boldsymbol{D}_4$, $\boldsymbol{D}_4\boldsymbol{J}_4$, $\boldsymbol{J}_4\boldsymbol{H}_4$, und es ist $\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{G}_4$ die Stabkraft des Stabes HG an 4, ebenso $\boldsymbol{G}_4\boldsymbol{C}_4$ die Kraft des Stabes GC, $\boldsymbol{CD}$ die Kraft $-\boldsymbol{P}_4$, $\boldsymbol{D}_4\boldsymbol{J}_4$ die Kraft des Stabes DJ, $\boldsymbol{J}_4\boldsymbol{H}_4$ die Kraft des Stabes JH, immer am Knoten 4. Diese selben Kräfte finden wir mit denselben Buchstaben bezeichnet, aber ohne die Indizes, auch in Figur 318, und es gilt also die allgemeine

Regel 1. Will man die Kraft wissen, die an einem Knotenpunkte $\varkappa$ in einem Stabe 𝔖 desselben wirkt, so benenne man diesen Stab mittels der in ihm aneinander stoßenden Felder X, Y der Figur 317[1]) in der Weise, daß man bei positiver Umkreisung von $\varkappa$ aus dem Felde X durch Überschreitung des Stabes 𝔖 in das Feld Y kommt. Dann gibt die Strecke $\boldsymbol{XY}$ des Kräfteplans Figur 318 die gesuchte Kraft nach Größe und Richtung an.

4. Welche Stabkraft ist z. B. in 45 am Knoten 5? Bei positiver Umkreisung (Fig. 317) von 5 kommt man aus H über 45 nach J, also ist HJ die richtige Bezeichnung des Stabes und $\boldsymbol{HJ}$ in Figur 318 die gesuchte Kraft; dagegen ist JH die richtige Bezeichnung desselben Stabes, wenn nach seiner Kraft an 4 gefragt wird, und $\boldsymbol{JH} = -\boldsymbol{HJ}$ in Figur 318 die entsprechende Kraft nach Größe und Richtung.

Bei positiver Umkreisung von 4 kommt man aus C über $\boldsymbol{P}_4$ nach D, und in Figur 318 ist $\boldsymbol{CD}$ die umgekehrte Angriffskraft, und so auch in den übrigen Knoten mit Angriffspunkten. Daher ist die Regel 1. so zu ergänzen:

Regel 2. Wenn man bei positiver Umkreisung eines Knotenpunktes $\varkappa$ am Fachwerk aus dem Felde X über die Angriffskraft $\boldsymbol{P}_\varkappa$ hinweg auf das Feld Y kommt, so ist $\boldsymbol{XY}$ im Kräfteplan gleich $-\boldsymbol{P}_\varkappa$.

5. Dieses elegante Verfahren, um die am Fachwerk Figur 317 auftretenden Kräfte aus Figur 318 abzulesen, ist natürlich ein Ergebnis von Vorbereitungen, die wir stillschweigend bei der Anlage der Kraftecke in Figur 315 des § 96 getroffen hatten: deshalb die Bindung an einen bestimmten Drehsinn und deshalb die Bezeichnung identischer Strecken der verschiedenen Kraftecke mit denselben Buchstaben unter Verwendung von Indizes, die dann im Kräfteplan weggelassen worden sind. Es fragt sich nun: Wie bringt man bei der Anlage der Figur 318 diese vollendete Harmonie zu stande, und wie kann man diese Figur herstellen, **ohne** die Kraftecke je für sich zu zeichnen?

Die Antwort lautet so:

Zuerst werden die Felder im und am Fachwerk mit Buchstaben benannt. Dann beginnt man mit der Konstruktion des Kraftecks zu (1), indem man diesen Punkt positiv umgehend die umgekehrte Angriffskraft $-\boldsymbol{P}_1$ nach Regel 2 benennt, also hier mit AB, die dann folgenden Stäbe nach Regel 1 mit BF und FA. Darauf kon-

1) Es sind X und Y irgend zwei der Buchstaben $A, \ldots, K$.

struiert man, den Kräfteplan beginnend, $\boldsymbol{AB} = -\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{BF} \| BF$, $\boldsymbol{FA} \| FA$, wo die fettgedruckten Buchstaben immer dem Krafteck Figur 318, die gewöhnlichen dem Fachwerk Figur 317 selbst angehören.

Die Pfeile der gefundenen Stabkräfte werden sofort in Figur 317 eingetragen[1]), nebst ihren Gegenpfeilen am anderen Ende der betreffenden Stäbe. So wird sichtbar, daß an 2 nur noch zwei Stabkräfte unbekannt sind. Also konstruieren wir das Krafteck zu diesem Punkte! Bei positivem Umlauf stoßen wir der Reihe nach auf die bekannten Stücke FB, BC und die unbekannten CG, GF; zu den bekannten gehören in Figur 318 die Kräfte $\boldsymbol{FB}$, $\boldsymbol{BC}$, und wir müssen ziehen: $\boldsymbol{CG} \| CG$, $\boldsymbol{GF} \| GF$, wodurch der Punkt $\boldsymbol{G}$ bestimmt ist; das zu 2 gehörige Krafteck ist also $\boldsymbol{FBCG}$.

6. Wiederum tragen wir die Pfeile der neu gefundenen Kräfte an 2 in die Figur des Fachwerks ein, sowie die entgegengesetzten Pfeile an den anderen Enden dieser Stäbe. Dadurch zeigt sich, daß jetzt der Knotenpunkt 3 aufgeschlossen ist, von dem die Kräfte auf AF, FG bekannt sind. In positivem Umlaufe liegen an 3 die Stäbe AF, FG, GH, HA. Das Krafteck (3) muß die dazu parallelen Seiten $\boldsymbol{AF}$, $\boldsymbol{FG}$, $\boldsymbol{GH}$, $\boldsymbol{HA}$ haben, von denen die beiden ersten bereits konstruiert, die beiden letzten durch den Parallelismus bestimmt sind; sie legen $\boldsymbol{H}$ fest. Die Seiten $\boldsymbol{AF}$ und $\boldsymbol{FG}$ sind nicht nur durch die vorangehende Konstruktion ermittelt, sondern sie lagern bereits, wie zur Addition, in richtiger Reihenfolge aneinander, was uns der Mühe enthebt, $\boldsymbol{FG}$ erst an $\boldsymbol{AF}$ in $\boldsymbol{F}$ anzusetzen. Diese Bequemlichkeit hat man nicht immer, aber doch an allen Fachwerken, die unmittelbar durch das Krafteckverfahren sich behandeln lassen; auf diese wollen wir uns vorläufig beschränken.

7. Nun kommt der Knotenpunkt 4 an die Reihe mit den in positivem Umlaufsinne geordneten Stücken HG, GC, CD und DJ, JH; da die den drei ersten Stücken in Figur 318 entsprechenden Kräfte $\boldsymbol{HG}$, $\boldsymbol{GC}$, $\boldsymbol{CD}$ bereits zur Addition richtig aneinander gelagert sind, so braucht man nur $\boldsymbol{DJ} \| DJ$, $\boldsymbol{JH} \| JH$ zu ziehen, wodurch $\boldsymbol{J}$ bestimmt ist. Daher kennt man jetzt $\boldsymbol{DJ}$, $\boldsymbol{JH}$.

Jetzt ist nicht nur 5 aufgeschlossen, sondern auch 6. Wir wollen, um auch einmal von dem Gedankengange des § 96 abzuweichen, gleich zu 6 übergehen. Bei positivem Umlaufe kommen erst die bekannten Stücke JD, DE, denen in Figur 318 die zur Addition aneinander gereihten Kräfte $\boldsymbol{JD}$, $\boldsymbol{DE}$ entsprechen, darauf die unbekannten EK,

1) Der Leser wird wiederum gebeten, das Fachwerk neu zu zeichnen und die Pfeile nach und nach einzutragen.

KJ, denen in Figur 318 die noch zu konstruierenden Kräfte $\boldsymbol{EK} \| EK$, $\boldsymbol{KJ} \| KJ$ entsprechen; die beiden Parallelen treffen sich in $\boldsymbol{K}$, worauf $\boldsymbol{EK}$, $\boldsymbol{KJ}$ bekannt sind.

So fährt man fort und überzeugt sich zur Kontrolle auch, daß die übrigen Kraftecke in der Figur des Kräfteplans richtig eingeschlossen sind. Man sieht, daß man die Bezeichnungsweise des Kräfteplans auch auf die Figur 315, § 96 anwenden kann. Einem Knoten $\varkappa$ mit den in positivem Sinne folgenden Stäben MN, NO, OP, PQ, QR, worunter auch eine (umgekehrte) Angriffskraft sein kann, wird ein Krafteck $\boldsymbol{M}_\varkappa \boldsymbol{N}_\varkappa \boldsymbol{O}_\varkappa \boldsymbol{P}_\varkappa \boldsymbol{Q}_\varkappa \boldsymbol{R}_\varkappa$ entsprechen, wo $\boldsymbol{M}_\varkappa \boldsymbol{N}_\varkappa \| MN$, $\boldsymbol{N}_\varkappa \boldsymbol{O}_\varkappa \| NO$, $\boldsymbol{O}_\varkappa \boldsymbol{P}_\varkappa \| OP$, $\boldsymbol{P}_\varkappa \boldsymbol{Q}_\varkappa \| PQ$, $\boldsymbol{Q}_\varkappa \boldsymbol{R}_\varkappa \| QR$ ist. Diese Bezeichnungsweise ist in Figur 315 tatsächlich benutzt; sie war dann offenbar die Ursache, daß in der Teilfigur links die Indizes fortgelassen werden konnten.

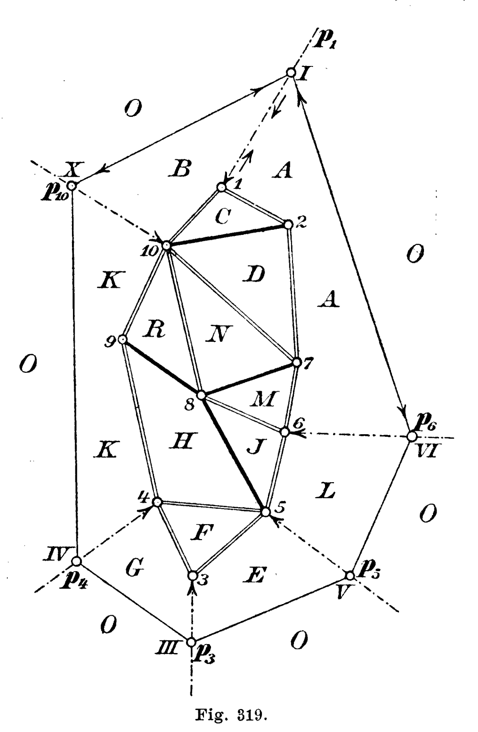


Fig. 319.

8. Als zweites Beispiel zur Einübung des Kräfteplanverfahrens diene das Fachwerk der Figur 319; es hat zehn Knotenpunkte 1, 2, ..., 10 und siebzehn Stäbe. Gegeben sei ein Angriffssystem von sechs Kräften $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$, $\boldsymbol{p}_5$, $\boldsymbol{p}_6$, $\boldsymbol{p}_{10}$ an den Knoten 1, 3, 4, 5, 6, 10; der Sinn dieser Kräfte ist aus den Pfeilen in Figur 319 zu ersehen, die Größe ist durch die kräftigen Striche in dem Kräfteplan Figur 320 angegeben, die Erläuterung dazu soll gleich gegeben werden. Das Fachwerk und die Angriffslinien der Angriffskräfte teilen die Ebene in die Gebiete A, B, ..., R. Nach Regel 2 ist $\boldsymbol{p}_1$ mit AB zu benennen und man findet im Kräfteplan (Fig. 320) $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$; ebenso $\boldsymbol{p}_6 = \boldsymbol{LA}$. Die sechs Angriffskräfte sind also in Figur 320 gegeben und bilden, da sie im Gleichgewicht stehen sollen (§ 95, 1.), ein geschlossenes Krafteck $\boldsymbol{ABKGEL}$. Diese Tatsache allein verbürgt uns aber noch nicht das Gleichgewicht, es muß nach § 90, 6. auch noch ein Seileck sich schließen. Sein Pol sei $\boldsymbol{O}$

(Fig. 320). Ihm entspricht in Figur 319 das geschlossene Seileck I-VI-V-III-IV-X. Um die Angriffskräfte richtig aus der Figur 319 abzulesen, kann man auch von den Ecken des Seilecks ausgehen: wir hatten gefunden, daß $\boldsymbol{p_1 = BA}$ ist; BA ist aber die Benennung von p_1 bei positiver Umkreisung des Punktes I. Also gilt die

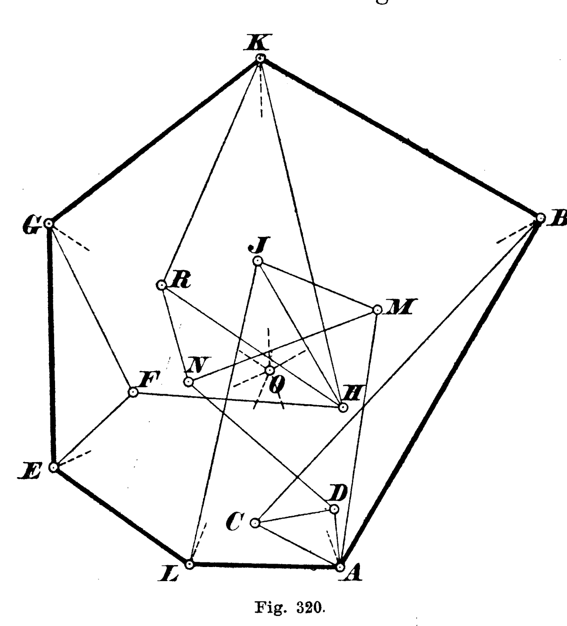


Fig. 320.

Regel 3. Eine Angriffskraft wird mit Hilfe eines Seilecks aus dem Kräfteplane abgelesen, indem man den auf ihrer Angriffslinie liegenden Eckpunkt des Seilecks positiv umkreist und die Kraft mit YZ benennt, wenn man aus Y über die Angriffslinie nach Z gelangt; die Angriffskraft ist dann $\boldsymbol{YZ}$;

dabei ist von der Angriffslinie nur der Halbstrahl gemeint, der von jenem Eckpunkte ausgehend die Richtung der Angriffskraft hat. So ist:

$$\boldsymbol{p_1 = BA, \quad p_6 = AL, \quad p_5 = LE, \quad p_3 = EG,}$$
$$\boldsymbol{p_4 = GK, \quad p_{10} = KB.}$$

9. Die Knotenpunkte sind in der Reihenfolge numeriert, in denen man sie aufschließen kann. Dem Knotenpunkte 1 muß im Kräfteplan ein Dreieck $\boldsymbol{ABC}$ entsprechen, dessen Seiten zu den Geraden AB, BC, CA der Fachwerkfigur parallel sind, und da $\boldsymbol{AB}$ bereits gezeichnet vorliegt, ist dieses $\boldsymbol{C}$ durch den Parallelismus bestimmt. Dem Punkte 2 ist das Dreieck $\boldsymbol{ACD}$ zugeordnet, von dem $\boldsymbol{AC}$ soeben bestimmt worden ist, während $\boldsymbol{D}$ durch $\boldsymbol{CD} \| CD$, $\boldsymbol{DA} \| DA$ festgelegt wird. Hat man von den bis jetzt bestimmten Stabkräften die Pfeile in eine Handskizze des Fachwerks eingetragen, und an den anderen Enden der Stäbe gleich die Gegenpfeile[1]), so zeigt sich, daß

1) Da diese Figur nur im Entstehen Wert hat, so wird der Leser wiederum gebeten, sich der kleinen Mühe dieser einfachen Zeichnung zu unterziehen.

wir dem auf dem Rande des Fachwerks nächstfolgenden Knotenpunkte nicht beikommen können, da in ihm noch drei Stabkräfte unbekannt sind. Daher müssen wir an dem mit 3 bezeichneten Knoten die Bildung der Kraftecke neu anfangen. Zu 3 gehört das Dreieck $\boldsymbol{EFG}$, von dem $\boldsymbol{GE}$ gegeben und $\boldsymbol{F}$ durch $\boldsymbol{EF} \| EF$, $\boldsymbol{GF} \| GF$ bestimmt ist. Darauf findet man zu 4 das Viereck $\boldsymbol{HKGF}$, und die Konstruktion geht ungestört in der durch die Nummern der Knoten angegebenen Reihenfolge zu Ende.

Im Fachwerk sind die auf Druck beanspruchten Stäbe doppelt ausgezogen, im Kräfteplan dagegen die Angriffskräfte in verstärktem Striche wiedergegeben. Es sei noch einmal hervorgehoben, daß die Pfeile der Angriffskräfte in Fig. 319 umgekehrt werden müssen, wenn in den Knotenpunkten Gleichgewicht bestehen soll.

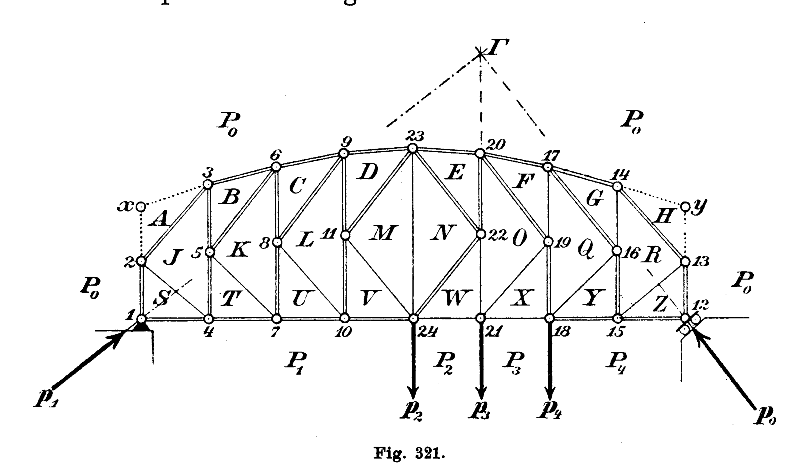


Fig. 321.

10. Bei dem dritten Beispiele, das einen Brückenträger (Fig. 321) in K-Fachwerk betrifft, können wir uns kürzer fassen. Es führt seinen Namen von den K-förmigen Bestandteilen, die den unteren Rand, den Untergurt, mit dem oberen Rand, dem Obergurt, verbinden; jedes einzelne K besteht aus vier Stäben, übereinstimmend mit der in § 93, 6. gemachten Bemerkung, wonach der vertikale Balken nicht etwa als ein Stab ausgebildet sein dürfte. Der Träger hat in 1 einen Drehpunkt, in 12 ein Rollenlager mit geneigter Gleitbahn. Belastet sind die Knotenpunkte 24, 21, 18 mit den Lasten $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$, die aus Fig. 322 zu entnehmen sind:

$$\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1, \quad \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2, \quad \boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_3.$$

Die Auflagerreaktionen werden nach § 94 ermittelt: Die Angriffslinie der Reaktion $\boldsymbol{p}_{12}$ in 12 steht auf der Gleitbahn senkrecht

und trifft die Angriffslinie der Resultante von $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4$, die mit der von $\mathfrak{p}_3$ zusammenfällt, in einem Punkte Γ, durch den auch die Auflagerreaktion $\mathfrak{p}_1$ in 1 gehen muß. Die Resultante $\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 + \mathfrak{p}_4$ ist also nach 1Γ und 12Γ zu zerlegen, und die umgekehrten Komponenten sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_{12}$; in Fig. 322 ist $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0 \| 1\Gamma$, $\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{P}_0 \| 12\Gamma$, also

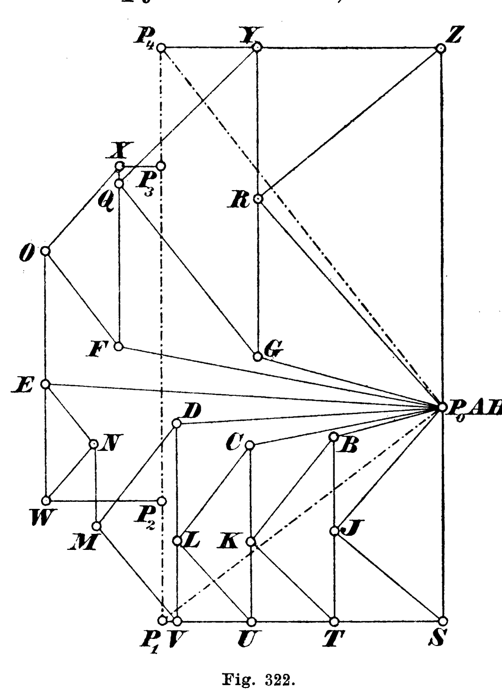


Fig. 322.

$$\mathfrak{p}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_0, \quad \mathfrak{p}_{12} = \boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_4.$$

11. Das Fachwerk hat zwei unbelastete Knotenpunkte x und y mit je zwei Stäben; diese Stäbe bleiben nach § 96, 8. c) ohne Kraft und sind deshalb nur punktiert gezeichnet; die doppelt ausgezogenen Stäbe sind auf Druck beansprucht. Der Gang der Konstruktion ist aus den Nummern der Knoten ersichtlich. Wie beim vorigen Fachwerk muß man die an einer Ecke begonnene Kette von Kraftecken 1, 2, ..., 12 unterbrechen, und von einer anderen Seite aus, hier vom Knoten 12 aus, vordringen, bis beide Ketten von Kraftecken in der Mitte des Fachwerks aneinander stoßen und die Knotenpunkte 23, 24 aufschließen, an denen man anfangs nicht vorbei konnte. Die Punkte $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{H}$ fallen mit $\boldsymbol{P}_0$ zusammen.

12. Mit Absicht haben wir die beiden letzten Beispiele so gewählt, daß die Knotenpunkte nicht etwa in der Reihenfolge aufgeschlossen werden konnten, in der sie am Rande des Fachwerks aufeinander folgen; alle äußeren Regeln, die hier einzugreifen versuchen, sind für das tiefere Verständnis hinderlich. Den Gang der Konstruktion muß man sich jedesmal selber bestimmen; es genügt dazu, daß man an zugänglicher Stelle anfängt und vordringt, so weit man kann; sitzt man fest, so beginnt man darauf an einer zweiten Stelle u. s. f., bis man den höheren Knotenpunkten von verschiedenen Seiten beikommt. Es muß aber bemerkt werden, daß nicht zu allen Fachwerken ein Kräfteplan existiert, wenigstens nicht in dem bisher gebrauchten Sinne des Wortes. Wenn man z. B. die drei Paar Gegen-

ecken eines gewöhnlichen (nicht regulären) Sechsecks durch drei Stäbe verbindet und auch seine Seiten als Stäbe, seine Ecken aber als (die einzigen) Knotenpunkte auffaßt, so entsteht ein Fachwerk, an das wir mit unseren bisherigen Hilfsmitteln überhaupt nicht heran kommen, und dem auch kein gewöhnlicher Kräfteplan entspricht. Da wir auf die Frage nach der Existenz der Kraftpläne nicht eingehen können[1]), also bei Beginn der Konstruktion eines Kräfteplans nie wissen, ob er existieren wird, so sind wir verpflichtet, wie wir es auch im Vorangehenden getan, zu jedem Knotenpunkte das Krafteck wirklich zu zeichnen oder sein Vorhandensein wenigstens nachzuprüfen. Es könnte sich nämlich die Notwendigkeit einstellen, eine Kraft AB an verschiedenen Stellen des Kräfteplans einzeichnen zu müssen, während in unseren Beispielen der Vorzug des Kräfteplans darin bestand, jede Kraft nur ein einziges Mal zu enthalten; der genannte Fall kommt glücklicherweise bei den Fachwerken, deren Spannungsproblem wir ohne weiteres lösen können, nicht vor.

In allen unseren Beispielen hat sich gezeigt, daß es begrifflich und praktisch-geometrisch vorteilhaft ist, wenn man sich den Zustand an den Knoten als Gleichgewicht der Stabkräfte mit den umgekehrten Angriffskräften denkt, nicht als Zerlegung der Angriffskräfte in Komponenten nach den Stäben. Aus dieser Auffassung entsprangen unsere klaren Regeln für die Konstruktion des Kräfteplans. Es gibt aber auch Zeichner, die die Angriffskräfte im Kräfteplan nicht umdrehen; was sie dann als „Stabkräfte“ bekommen, sind die Kräfte, die wir im § 95, 2. Abwehrkräfte genannt haben, die ja ebenfalls als Maß der Stabkräfte gelten können. Der Anfänger tut aber gut, zunächst bei einer Auffassung zu bleiben.

13. Zum Fachwerk der Fig. 319 zurückkehrend können wir mit Hilfe des dort eingezeichneten Seilecks dem Spannungsproblem eine neue, vollendet schöne Fassung geben.[2]) Wir denken uns nämlich, wie bei 1 durch einen kleinen Pfeil angedeutet, die Pfeile der Angriffskräfte umgedreht, um zunächst in allen Knotenpunkten Gleichgewicht zu haben; dann setzen wir die Gegenpfeile an den Ecken des Seilecks an, wie man bei I sehen kann, d. h. an den Ecken des Seilecks sollen die Angriffskräfte ihren richtigen Pfeil bekommen. Auf der Strecke 1 I finden sich demnach zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte, an I die Kraft $\mathfrak{p}_1$ selber, an 1 die Gegenkraft. Diese Strecke verhält sich jetzt also wie ein Stab, da ja auch in den Stäben Gegen-

1) Es liegen hierüber die schönen, aber schwierigen Untersuchungen von F. Schur vor, Math. Ann. 48, auf die wir für eingehendere Interessen verweisen müssen.

2) Diese Auffassung spielt in der Theorie von Schur eine entscheidende Rolle.

kräfte waren. Wie aber im Krafteck Fig. 320 das gleichsinnig zu durchlaufende Dreieck ***OBA*** beweist, kann man auch in I Gleichgewicht herstellen, wenn man auf I-VI die Kraft ***AO***, auf I-X die Kraft ***OB*** verlegt. An VI halten sich ebenso die Kräfte ***OA*** auf VI-I, ***AL*** auf 6-VI, ***LO*** auf VI-V das Gleichgewicht. Die drei durch I gehenden Geraden verhalten sich also wie Stäbe eines Fachwerks mit I als Knotenpunkt: Liest man die Kräfte dieser „Stäbe“ aus dem Kräfteplan nach Regel 1 ab, so herrscht in dem Punkte I Gleichgewicht. Es folgt:

Regel 4. Aus jedem Fachwerk kann ein „erweitertes Fachwerk“ gebildet werden, indem man noch die Seiten eines Seilecks der Angriffskräfte, sowie die Strecken der Angriffslinien der Angriffskräfte als neue Stäbe hinzu nimmt, welche von den Ecken des Seilecks bis zu den Knotenpunkten des alten Fachwerks reichen. Bezeichnet man die Außenfläche des Seilecks am Fachwerk und den Pol des Seilecks im Kräfteplan mit denselben Buchstaben, und liest man die Stabkräfte der neu hinzugekommenen Stäbe ebenfalls nach Regel 1 aus dem Kräfteplane ab, so herrscht in jedem Knotenpunkte und in jedem Stabe des erweiterten Fachwerks Gleichgewicht.

Das Schöne dieser neuen Situation besteht darin, daß am erweiterten Fachwerk die Angriffskräfte ganz fehlen; dafür sind aber gegeben die Kräftepaare, die in den neu hinzugekommenen Stäben wirken sollen; das sind teils die Angriffskräfte des ursprünglichen Fachwerks selber, teils ihre Komponenten nach den Seiten des Seilecks. Das Spannungsproblem kann daher mittels des erweiterten Fachwerks so formuliert werden: Im erweiterten Fachwerk sind in einer Reihe von Stäben (nämlich den neu hinzugekommenen) Kräftepaare gegeben, so daß auf jedem dieser Stäbe an beiden Knoten entgegengesetzt gleiche Kräfte wirken. Man soll auf den übrigen Stäben ebenfalls Kräftepaare anbringen, derart, daß in jedem Knotenpunkte (und natürlich auf jedem Stabe) des ganzen Fachwerks Gleichgewicht besteht. Von Angriffskräften ist also jetzt keine Rede mehr.

§ 98. Das Schnittverfahren.

1. Wo das Kräfteplanverfahren anwendbar ist, liefert es auf einfachste Weise die vollständigste und anschaulichste Lösung des Spannungsproblems. Es gibt aber Fachwerke, die dem Kräfteplanverfahren erst durch vorhergehende mit anderen Hilfsmitteln vorzunehmende

Aufschließung höherer Knotenpunkte zugänglich gemacht werden müssen. Nach anderen Hilfsmitteln müssen wir aber noch aus einem anderen Grunde Ausschau halten. Es kommt nämlich häufig vor, daß nicht sämtliche Stabkräfte interessieren, sondern nur die eine oder andere; unsere bis jetzt entwickelten Verfahren würden da zu umständlich sein, da sie immer gleich das ganze Spannungsproblem soweit lösen müssen, bis der betreffende Stab an die Reihe kommt. In vielen Fällen nun kann die Lösung des Spannungsproblems für einen bestimmten Stab des Fachwerks durch die sog. Schnittmethode erzielt werden.

2. Der Grundgedanke des Schnittverfahrens wird, wie wohl alle Probleme der Fachwerkstheorie, am klarsten, wenn man sich in den Knotenpunkten nicht Zerlegung der Angriffskräfte, sondern Gleichgewicht zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften vorstellt. Wirkt an einem Knoten keine Angriffskraft, so stehen die Stabkräfte an diesem Knoten allein schon im Gleichgewicht.

Wir grenzen nun einen Teil der Knotenpunkte durch eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende oder berührende Kurve λ ab, die diese Punkte einschließt und durch keinen Knotenpunkt geht. In jedem der eingeschlossenen Knotenpunkte herrscht nach wie vor Gleichgewicht. Die Kurve λ muß aber, wenn sie nicht alle Knotenpunkte enthält, immer einige Stäbe treffen. Diese Stäbe denken wir uns, so weit sie innerhalb λ liegen, ganz beseitigt, indem wir aber zur Erhaltung des Gleichgewichts die in ihnen an den eingeschlossenen Knoten wirksam gewesenen Stabkräfte als „Ersatzkräfte“ weiter an diesen Knotenpunkten belassen. Da aber in jedem unverletzten Stabe in λ die Stabkräfte sich aufheben,

> so besteht auch Gleichgewicht zwischen den in λ noch übrig gebliebenen Kräften, nämlich zwischen den Ersatzkräften und den umgekehrten Angriffskräften.

Auf diese einfache Tatsache gründen sich alle Schnittverfahren.

3. Das Culmannsche Verfahren.[1]) Sind es der Ersatzkräfte innerhalb λ nur drei, deren Angriffslinien a, b, c nicht durch einen Punkt gehen, so kann man die Resultante der Angriffskräfte innerhalb λ nach Komponenten auf a, b, c zerlegen; diese Komponenten halten dann den umgekehrten Angriffskräften das Gleichgewicht, sind also, wenn das Spannungsproblem des betreffenden Fachwerks eindeutig lösbar ist, die gesuchten Ersatzkräfte. Falls die Angriffskräfte

1) C. Culmann, Graphische Statik, 1. Aufl. (1866), 1. Teil (1864).



(in λ) ein Kräftepaar bestimmen, so muß man die beiden Kräfte desselben einzeln nach den Geraden a, b, c zerlegen und die beiden Komponenten auf jeder dieser Geraden addieren.

Die graphische Lösung dieser Aufgabe ist in § 90, 7. mitgeteilt; wir dürfen von einem weiteren Beispiele um so mehr absehen, als bei parallel wirkenden Angriffskräften, die ja naturgemäß in der Praxis häufig vorkommen, die zur Konstruktion nötigen Schnittpunkte oft außerhalb des Zeichenblattes fallen, was die unmittelbare Verwendbarkeit dieser Methode beeinträchtigt.

4. Das Momentenverfahren von A. Ritter[1]) setzt im allgemeinen ebenfalls voraus, daß innerhalb λ nur drei Ersatzkräfte liegen, deren Angriffslinien a, b, c sich nicht in einem Punkte treffen, bestimmt aber diese Ersatzkräfte einfach auf dem Wege der Rechnung. Da innerhalb λ zwischen den Ersatzkräften und den umgekehrten Angriffskräften Gleichgewicht besteht, so ist die Momentensumme dieser Kräfte für irgend einen Punkt O gleich null (§ 90, 6.). Verlegt man nun diesen Momentenpunkt in eine der Ecken des von a, b, c gebildeten Dreiecks ABC, so fallen aus der Momentensumme die Momente der Kräfte heraus, die durch O gehen; ist z. B. der Punkt O mit A identisch, so sind die Momente der Kräfte auf b und c gleich null, und es kommt von den Ersatzkräften nur eine in der Momentensumme vor, nämlich die auf a. Danach kann diese Kraft leicht berechnet werden (§ 91). Ritter hat von vornherein darauf hingewiesen, daß seine Methode auch bei mehr als drei Ersatzkräften anwendbar ist, falls nur ein Punkt O da ist, durch den alle Ersatzkräfte bis auf die eine zu suchende gehen. Denn für O als Drehpunkt fallen dann die Momente aller durch O gehenden Ersatzkräfte fort, und es bleibt eine Gleichung mit nur einer Ersatzkraft übrig, die mithin bestimmbar ist. Der Vorteil der Methode ist also ersichtlich der, daß sie unmittelbar die Stabkraft bestimmen läßt, die man gerade wissen will; doch sind nicht bei jedem Fachwerk die Voraussetzungen des Verfahrens erfüllt.

5. Freiere Verwendung der beiden Verfahren. Wenn die Momentensumme irgend welcher Kräfte der Ebene in einem Punkte O verschwindet, so geht die Resultante dieser Kräfte durch O (§ 90, 5.).

Mittels dieser einfachen Bemerkung kann man häufig das Momentenverfahren in ein rein graphisches verwandeln. Daß die genannte Resultante durch O geht, läßt sich natürlich auch ohne den

1) Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen, Hannover 1863.

Momentensatz leicht einsehen; doch macht dieser Satz es besonders bequem.

6. Der in Fig. 323 abgebildete Dachbinder von Polonceau wird an sieben Knotenpunkten von gleich großen Kräften angegriffen; die

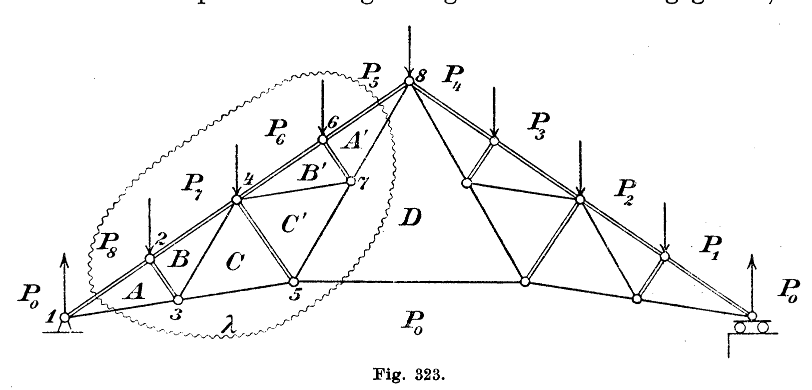


Fig. 323.

Auflagerreaktionen sind daher je gleich dem $3\frac{1}{2}$-fachen einer solchen Kraft, jedoch mit aufwärts weisendem Pfeil.

Dem Knotenpunkte 1, um den bei positiver Umkreisung die Kräfte $P_8 P_0$, $P_0 A$, $A P_8$ liegen, entspricht in Fig. 324 ein Krafteck $\boldsymbol{P_8 P_0 A}$, das den in 1 bestehenden Gleichgewichtszustand in Evidenz setzt. Zu 2 gehört ebenso das Krafteck $\boldsymbol{P_7 P_8 A B}$, zu 3 das Krafteck $\boldsymbol{B A P_0 C}$. Soweit gelingt also die Anlage eines Kräfteplans ohne Schwierigkeit. Dann aber ist weder dem Punkte 4, noch dem Punkte 5 beizukommen, weil an ihnen je drei unbekannte Stabkräfte wirken; es nützt diesmal nichts, die Konstruktion des Kraftecks mit den Punkten des Fachwerks weiter zu führen, die zu den bis jetzt benutzten symmetrisch liegen; denn man würde an den zu 4 und 5 symmetrischen Knotenpunkten ebenfalls scheitern.

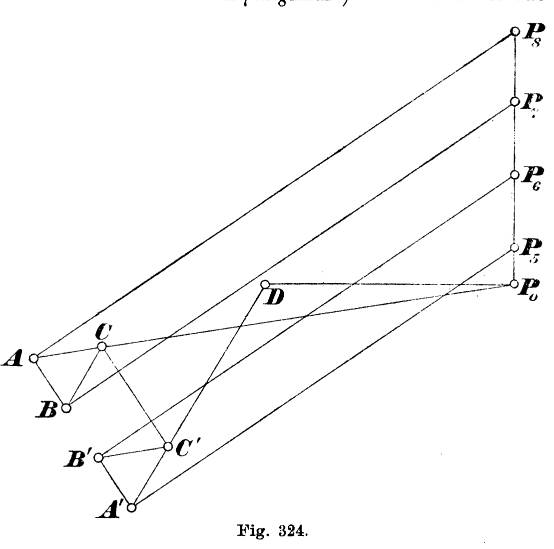


Fig. 324.

Aus dieser Verlegenheit hilft uns nun einfach eine Schnittkurve λ,

die um die Knotenpunkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 geht (Fig. 323), wenn man 5 zum Drehpunkt nimmt. Ersatzkräfte sind für die zerschnittenen Stäbe (2, 1), (3, 1), (6, 8), (7, 8), (5, 5′)[1] vorzusehen. Von diesen gehen aber (3, 1), (5, 5′), (7, 8) durch den Momentenpunkt 5; also bleiben nur die Momente der Ersatzkräfte von (2, 1) und (6, 8) in der Momentensumme, die außerdem noch die Momente der Kräfte P_5P_6, P_6P_7, P_7P_8 enthält. Also können wir nach 5. sagen:

> Die Resultante der Kräfte $A'P_5$, P_5P_6, P_6P_7, P_7P_8, P_8A (Fig. 323), von denen die erste und die letzte Ersatzkräfte sind, geht durch 5.

Andererseits liegt aber die Resultante der beiden Ersatzkräfte $A'P_5$ und P_8A auf (1, 8), geht also durch 4, und die der drei Angriffskräfte geht ebenfalls durch 4, indem sie auf die Angriffslinie von P_6P_7 fällt; folglich fällt die Resultante aller fünf Kräfte auf die Gerade 45. Für die Anlage des Kräfteplans genügt es zu wissen, daß die Resultante von $\boldsymbol{A'P_5}$, $\boldsymbol{P_5P_6}$, $\boldsymbol{P_6P_7}$, $\boldsymbol{P_7P_8}$, $\boldsymbol{P_8A}$, also die Kraft $\boldsymbol{A'A}$, zu (4, 5) parallel ist. Demnach liegt $\boldsymbol{A'}$ auf der im Kräfteplan schon vorhandenen Geraden $\boldsymbol{AB}$; dem Knotenpunkt 6 muß aber ein Krafteck $\boldsymbol{P_5P_6B'A'}$ entsprechen, von dem die Seite $\boldsymbol{A'P_5}$ zu $A'P_5$ parallel ist; folglich ist $\boldsymbol{A'}$ bestimmt. Das Weitere macht dann keine Schwierigkeiten mehr.

7. In Fig. 325 ist ein in Nordamerika unter dem Namen „Baltimore truss“ eingeführter Fachwerksträger abgebildet, der in den elf

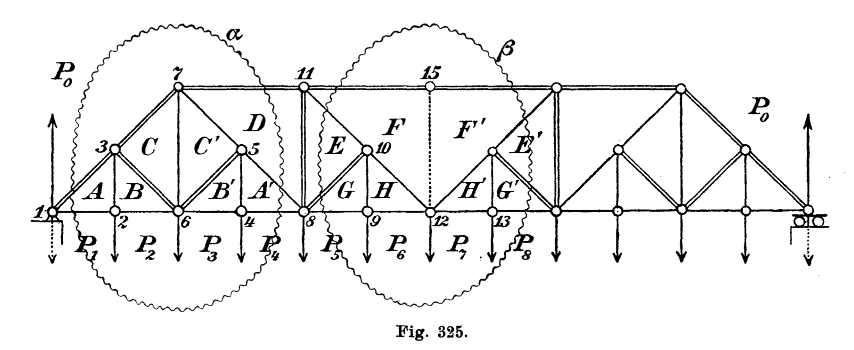


Fig. 325.

nicht unterstützten Knotenpunkten des Untergurtes (der unteren Wagerechten) gleiche Lasten trägt; die Auflager sind als Drehpunkt und als Rollenlager auf wagerechter Gleitfläche ausgebildet, haben also, wegen der Symmetrie der Lastverteilung, je die Hälfte der Gesamtlast auszuhalten. Die Auflagerreaktionen sind daher das $5^1/_2$-fache der Einzellast eines Knotens.

1) Mit 5′ sei der zu 5 symmetrische Knotenpunkt bezeichnet.

Die Anlage eines Kräfteplans (Fig. 326) vom Knoten 1 beginnend kommt nach dem Knoten 5 zum Stillstand; es können dann die dazu symmetrischen Knoten am anderen Ende des Fachwerks behandelt werden, man stößt aber nach der Erledigung von vier Knoten auf dieselbe Schwierigkeit. Diese löst das Schnittverfahren.

Der Schnitt α der Figur 325 macht fünf Ersatzkräfte nötig: in (3, 1), (2, 1), (4, 8), (5, 8), (7, 11); nimmt man aber den Knoten 7 als Momentenpunkt, so heben sich die Momente der drei Angriffskräfte auf, weil ihre Resultante durch 7 geht, und von den Ersatzkräften liefern nur die der Stäbe (1,2) und (4,8) einen Beitrag zu der Momentensumme. Folglich sind diese Kräfte einander entgegengesetzt gleich.

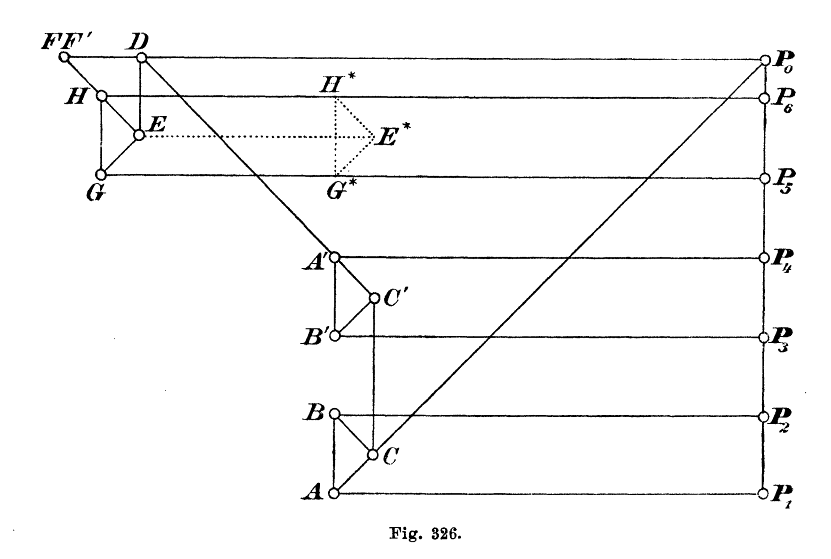


Fig. 326.

Im Kräfteplane muß also $\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}' = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$ sein. Der Knotenpunkt 4 ergibt jetzt sofort das Rechteck $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$ des Kräfteplans; zu 6 gehört $\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$, wodurch $\boldsymbol{C}'$ bestimmt ist, und zu 7 gehört das Krafteck $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_0$, das $\boldsymbol{D}$ bestimmt.

Von dem zu 9 gehörigen Krafteck $\boldsymbol{P}_5\boldsymbol{P}_6\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}$ können wir vorerst nur aussagen, daß $\boldsymbol{G}$ und $\boldsymbol{H}$ auf je einer Parallelen durch $\boldsymbol{P}_5$, $\boldsymbol{P}_6$ zum Untergurt des Fachwerks liegen, etwa in der Lage $\boldsymbol{G}^*$, $\boldsymbol{H}^*$ der Figur 326. Die Umkreisung von 10 ergibt weiter, daß $\boldsymbol{E}\boldsymbol{G} \| EG$, $\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E} \| HF$ sein wird, wodurch die Gestalt des Dreiecks $\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}\boldsymbol{G}$, aber nicht seine Lage bestimmt ist. Es kann noch etwa die Lage $\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{G}^*$ der Fig. 326 haben. Jetzt zeigt aber die Umkreisung von 11, daß $\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}$ vertikal stehen muß. Dadurch ist die Lage des Dreiecks $\boldsymbol{E}^*\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{G}^*$ endlich fixiert, und zugleich auch $\boldsymbol{F}$.

Der Schnitt β mit 15 als Momentenpunkt zeigt, was auch aus Symmetriegründen einleuchtet, daß die Stäbe (8, 9) und (13, 14) an 9 und 13 entgegengesetzt gleiche Stabkräfte enthalten. Überhaupt wird die zweite Hälfte des Kräfteplans zur ersten bezüglich $\boldsymbol{FP}_0$ als Achse symmetrisch liegen müssen, so daß wir der Mühe einer weitergehenden Konstruktion enthoben sind.

Die auf Druck beanspruchten Stäbe des Fachwerks sind, wie beim vorangehenden (und beim folgenden) Beispiel, doppelt ausgezogen.

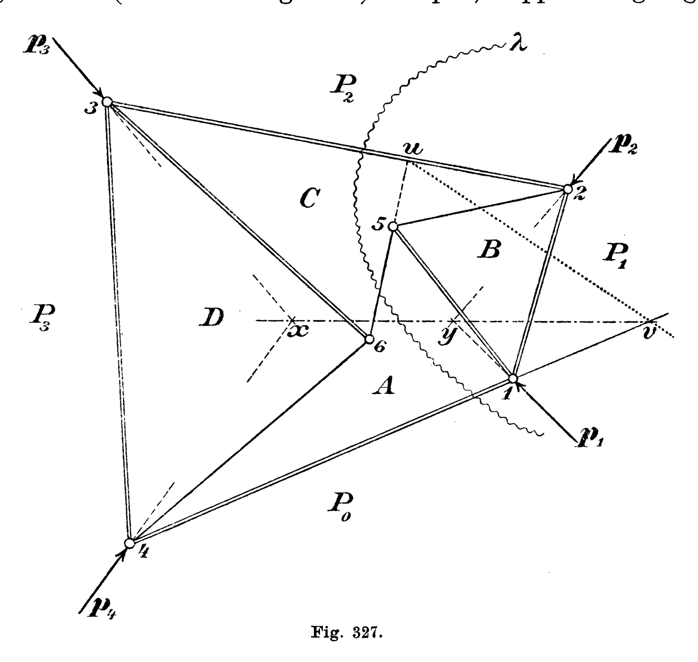


Fig. 327.

8. Das Fachwerk Fig. 327 ist dadurch interessant, daß durch jeden seiner sechs Knotenpunkte drei Stäbe gehen, so daß die unmittelbare Anwendung des Krafteckverfahrens sich verbietet. Mittels des Schnittes λ in Fig. 327 ist aber der Knotenpunkt 1 leicht aufzuschließen, wenn man den Schnittpunkt u der Stäbe (5,6) und (2,3) zum Drehpunkt der Momente macht. Die Momente der Ersatzkräfte von (2, 3) und (5, 6) fallen dann aus, und nach 5. muß die Resultante der Kräfte AP_0, P_0P_1, P_1P_2 durch u gehen. Die Resultante von P_0P_1 und P_1P_2 liegt aber auf xy, der Verbindungsgeraden der Schnittpunkte x von $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ und y von $\boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_4$. Der Stab (4, 1) trifft diese Resultante in v, und durch diesen Punkt muß die Resultante der drei Kräfte $\boldsymbol{AP}_0$, P_0P_1, P_1P_2 ebenfalls gehen; wenn wir sie also in einem Krafteck $\boldsymbol{AP}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ summieren, so muß $\boldsymbol{AP}_2$ zu uv parallel sein. Nachdem also die vier Angriffskräfte in einen Kräfteplan eingetragen

sind (Fig. 328), die das Viereck $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ ergeben, hat man zur Ermittelung von $\boldsymbol{A}$ durch $\boldsymbol{P}_2$ die Parallele zu uv, durch $\boldsymbol{P}_0$ die Parallele zu AP_0 zu ziehen. Darauf können die übrigen Knotenpunkte in der Reihenfolge ihrer Nummern mühelos erledigt werden. Unser Verfahren nötigt also im Kräfteplan nur zu einer einzigen Hilfslinie $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$. Jedenfalls zeigt auch dieses Beispiel, daß man aus der freien Verwendung des Momentenverfahrens, speziell des Artikels 5., oft Vorteil ziehen kann, ohne den Weg der graphischen Darstellung zu verlassen.

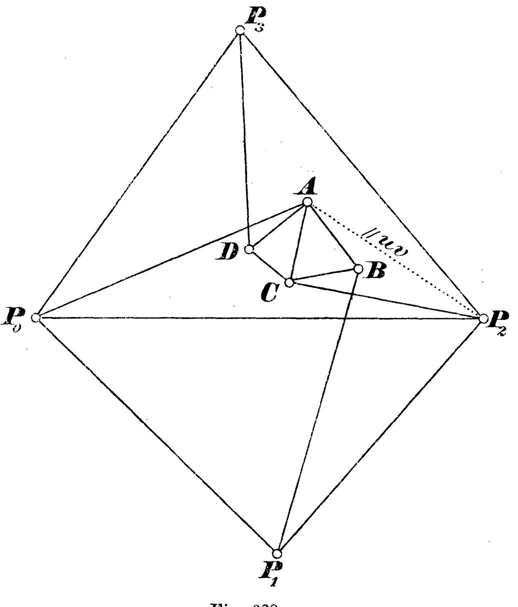


Fig. 328.

9. Das Zweischnittverfahren. Um nach den vorangehenden Ausführungen die Stabkraft $\boldsymbol{x}$ eines Stabes a in einem seiner Knotenpunkte C ohne Aufrollung des ganzen Spannungsproblems zu bestimmen, wird man einen Schnitt λ_1 so anzulegen suchen, daß der Stab a getroffen wird und die sonst noch zerschnittenen Stäbe durch einen Punkt O_1 gehen, der dann als Drehpunkt der Momente dient. In die Momentensumme tritt dann, abgesehen von den Angriffskräften, nur die unbekannte Stabkraft $\boldsymbol{x}$ ein, die daher leicht berechnet werden kann.

Aber nicht immer wird ein Schnitt λ_1 in der gewünschten Weise möglich sein, es wird häufig noch ein Stab b mitgetroffen werden, der nicht durch den Schnittpunkt O_1 der übrigen von der Kurve λ_1 geschnittenen Stäbe geht. Dann kommt also in die Momentensumme bezüglich O_1 als Drehpunkt noch eine zweite Unbekannte, herrührend von der unbekannten Kraft $\boldsymbol{y}$ des Stabes b. Man wird daher nach einer zweiten Gleichung suchen müssen. Gelingt es, einen zweiten Schnitt λ_2 ausfindig zu machen, der außer a und b nur solche Stäbe trifft, die durch einen Punkt O_2 gehen, so ist unsere Absicht erreicht; wir erhalten dann zwei Gleichungen ersten Grades, aus denen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ sich im allgemeinen bestimmen lassen. Bei der Bildung der Momente ist darauf zu achten, daß, wenn an einem Knotenpunkt eines

Stabes die Kraft x wirkt, am anderen die entgegengesetzte Kraft $-x$ sitzt.

Dieses Verfahren ist von H. Müller-Breslau eingeführt worden (1887). Das von ihm behandelte Beispiel betraf ein Sechseck mit drei Diagonalen (Fig. 329)[1]; der Schnitt λ_1 trifft außer a und b noch c_1 und d_1; ebenso schneidet λ_2 außer a und b auch c_2 und d_2; die eine Momentensumme wird bezüglich des Schnittpunktes O_1 von c_1 und d_1 gebildet, die andere bezüglich des Schnittpunktes O_2 von c_2 und d_2.

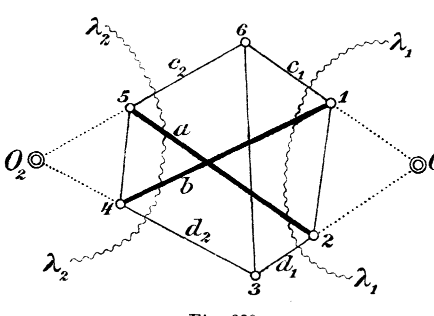


Fig. 329.

10. Auch diese Methode läßt sich leicht graphisch ausbeuten. Wir nehmen z. B. an, λ_1 habe die einen, λ_2 die anderen Endpunkte von a und b umschlossen (wie in Fig. 329), so daß also in λ_1 auf a und b etwa die Stabkräfte $-x$ und $-y$, in λ_2 dagegen die Stabkräfte $+x$ und $+y$ entfallen. Die Angriffskräfte in λ_1 mögen eine Resultante r_1, die in λ_2 eine Resultante r_2 haben (Fig. 330)[2]. Der Grundgedanke unserer Lösung ist nun der, erst die Resultante z der Kräfte x und y zu bestimmen; diese wird durch den Schnittpunkt O der Stäbe a und b gehen, der, wie wir annehmen, nicht im Unendlichen liegen soll.

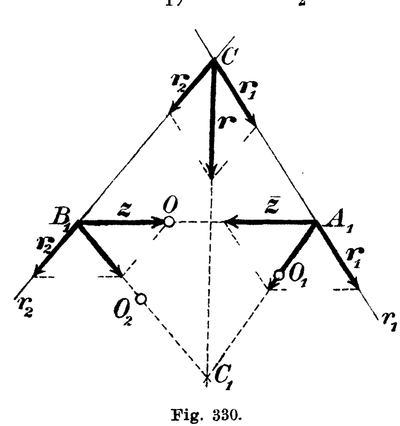


Fig. 330.

Die Resultante r von r_1 und r_2 kann erstens direkt (am Schnittpunkte C von r_1 und r_2, falls er im Endlichen liegt) konstruiert werden, zweitens aber, indem wir r_1 und r_2 in A_1 und A_2 mit z zum Schnitt gebracht denken, in A_1 die Kraft r_1 mit z, in A_2 die Kraft r_2 mit $-z$ vereinigen, und die beiden so entstehenden Resultanten, von denen die erste durch O_2, die andere durch O_1 gehen muß, in ihrem Schnittpunkte C_1 selber wieder zusammensetzen; dieser liegt daher auf der von vornherein bestimmbaren Angriffslinie von r. Damit ist die statische Aufgabe zurückgeführt

1) Die drei Schnittpunkte derselben gehören nicht zu den Knoten.

2) Die Angriffslinien sind r_1, r_2. Die Figur 330 ist der Übersichtlichkeit wegen etwas anders angeordnet als Figur 329.

auf die geometrische (Fig. 331): Gegeben sind drei Geraden r, r_1, r_2 durch einen Punkt C und drei Punkte O, O_1, O_2; man soll auf r einen Punkt C_1 konstruieren, so daß die Gerade $C_1 O_1$ die Gerade r_1 in einem Punkte A_1, und $C_1 O_2$ die Gerade r_2 in einem Punkte B_1 trifft und daß die Gerade $A_1 B_1$ durch O geht. Nimmt man versuchsweise C_1 auf r in der Lage C_2 an, und sind A_2, B_2 die Schnittpunkte von $C_2 O_1$ mit r_1, von $C_2 O_2$ mit r_2, so wird $A_2 B_2$ im allgemeinen noch nicht durch O gehen; wenn wir aber C_2 die ganze Punktreihe r durchlaufen lassen, so durchläuft B_2 auf r_2 und A_2 auf r_1 eine dazu perspektive Punktreihe. Daher sind die Punktreihen auf r_1 und r_2 zueinander projektiv, und da sie offenbar den Punkt C entsprechend gemein haben, sogar perspektiv, d. h. die veränderliche Gerade $A_2 B_2$ gehört einem Strahlenbüschel Q an. Zu den Verbindungslinien $A_2 B_2$ homologer Punkte gehört auch $O_1 O_2$, also muß auf $O_1 O_2$ der Mittelpunkt Q des Strahlenbüschels liegen, und er wird auf $O_1 O_2$ bestimmt durch die soeben probeweise konstruierte Gerade $A_2 B_2$ (Fig. 331). Zieht man jetzt QO, so sind rückwärts in Fig. 330 die Punkte A_1, B_1 bekannt, und man kann an ihnen durch Zerlegung von $\boldsymbol{r}_2$ und $\boldsymbol{r}_1$ die Kräfte $\boldsymbol{z}$ und $-\boldsymbol{z}$ finden. Zerlegt man $\boldsymbol{z}$ in O seinerseits nach a und b, so hat man $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$. Fig. 331 enthält die vollständige Konstruktion bis auf die Zerlegung von $\boldsymbol{z}$; die Richtigkeit kann hinterher leicht durch Anwendung des Desarguesschen Satzes auf die Dreiecke $O_1 A_1 B_2$, $O_2 B_1 B_2$ bewiesen werden.

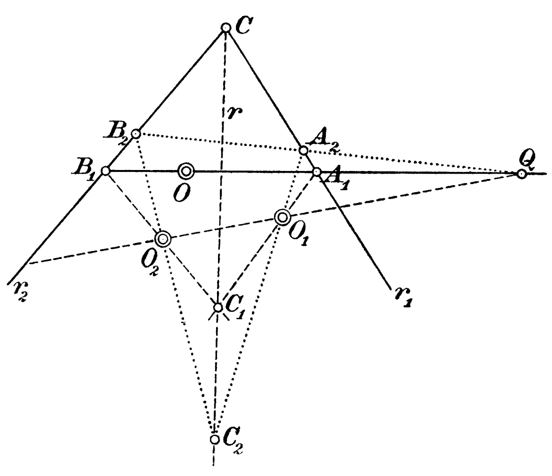


Fig. 331.

§ 99. Das Superpositionsgesetz.

1. Zur Erschließung tiefer liegender Eigenschaften des Fachwerks und zur gemeinsamen Begründung mancher spezieller Lösungsverfahren des Spannungsproblems kann ein Satz dienen, der so einfach ist, daß er beinahe trivial erscheinen möchte:

In einer Ebene sei ein irgendwie geartetes System Σ von Stäben gegeben, die, wo sie verbunden sind,

gelenkartige Knotenpunkte haben, so daß an diesen Knoten wirkende Kräfte sich nur in der Längsrichtung der Stäbe äußern können; im übrigen braucht das System durchaus nicht ein zusammenhängendes Ganze zu bilden, es darf sogar aus lauter einzelnen Stäben bestehen, deren Endpunkte wir dann Knotenpunkte nennen. Auf dieses Stabsystem Σ möge nun einmal ein Angriffssystem (P), dann ein Angriffssystem (Q) an den Knotenpunkten einwirken, und es sei jedesmal durch Einführung von „Stabkräften“ in den Stäben an den Knotenpunkten gelungen, sowohl in jedem einzelnen Stabe, als auch in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herzustellen zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften. Dem Angriffssystem (P) möge so das System (t^P) von Stabkräften entsprechen[1]), dem Angriffssystem (Q) das System (t^Q). Dann bildet auch das aus (P) und (Q) „superponierte“ System $(R) = (P) + (Q)$, das aus den zugleich wirkenden Systemen (P) und (Q) besteht, ein Angriffssystem (§ 90, 6.), und man findet ein zugehöriges System (t^R) von Stabkräften, wenn man (t^P) und (t^Q) ebenfalls superponiert, d. h. gleichzeitig in den Stäben anbringt. Jede Stabkraft des Systems (t^R) ist also die Resultante der beiden Kräfte des betreffenden Stabendes im System (t^P) und (t^Q); wir schreiben $(t^R) = (t^P) + (t^Q)$.

Es wird aber nicht behauptet, daß (t^R) die einzige Lösung des Spannungsproblems zu (R) sei.

Wir können auch kürzer sagen:

Entsprechen zwei Angriffssystemen (P) und (Q) die Lösungen (t^P) und (t^Q) des Spannungsproblems, so entsteht durch Superposition dieser Lösungen eine Lösung des Spannungsproblems des aus (P) und (Q) superponierten Angriffssystems,

und allgemein:

Entprechen den Angriffssystemen $(A), (B), (C), (D), \cdots$ die Lösungen $(t^A), (t^B), (t^C), (t^D), \cdots$ des Spannungsproblems, so ist $(t^A) + (t^B) + (t^C) + (t^D) + \cdots$ eine Lösung des Spannungsproblems zu $(A) + (B) + (C) + (D) + \cdots$,

1) Das t soll durch den Anklang an *tensio* die Stabkraft bezeichnen; (t^P) soll an die Abhängigkeit dieser Stabkräfte von (P) erinnern; eine Verwechslung mit Potenzen ist nicht denkbar, da das Symbol (t^P) keinen Sinn hätte; allenfalls könnte man $(t^{(P)})$ schreiben; untere Indizes an t sollen für andere Zwecke vorbehalten werden.

immer unter der Voraussetzung, die allein den Sätzen einen Sinn verleiht, daß es sich allemal um dasselbe Stabsystem Σ handele. Zur Ergänzung können wir noch hinzufügen, wenn wir mit $a(P)$, $a(t^P)$ die Kräftesysteme bezeichnen, die aus (P), (t^P) durch Multiplikation jeder einzelnen Kraft mit der positiven oder negativen Zahl a hervorgehen:

Entspricht dem Angriffssystem (P) die Lösung (t^P), so ist $a(t^P)$ eine Lösung zu $a(P)$,

wo a eine reelle Zahl bedeutet; insbesondere geht $-(P)$ aus (P) und $-(t^P)$ aus (t^P) durch Umkehrung aller Pfeile hervor.

Alles das Gesagte gibt zusammengefaßt das allgemeine

Superpositionsgesetz: An dem eingangs beschriebenen Stabwerk Σ mögen den Angriffssystemen $(A), (B), (C), (D), \cdots$ die Systeme $(t^A), (t^B), (t^C), (t^D), \cdots$ als Lösungen des Spannungsproblems in dem Sinne entsprechen, daß unter der Wirkung von $-(A)$ und (t^A) an sämtlichen Knoten und in sämtlichen Stäben Gleichgewicht ist; ebenso bei $-(B)$ und (t^B), $-(C)$ und (t^C), u. s. w. Dann ist

$$(t^S) = a(t^A) + b(t^B) + c(t^C) + d(t^D) + \cdots$$

eine Lösung des Spannungsproblems zu

$$(S) = a(A) + b(B) + c(C) + d(D) + \cdots.$$

Lassen die Systeme $(A), (B), (C), (D), \cdots$ und (S) an dem Knoten $\varkappa$ je die Kräfte $\boldsymbol{A}_\varkappa$, $\boldsymbol{B}_\varkappa$, $\boldsymbol{C}_\varkappa$, $\boldsymbol{D}_\varkappa, \cdots$ und $\boldsymbol{S}_\varkappa$ angreifen, so ist

$$\boldsymbol{S}_\varkappa = a\boldsymbol{A}_\varkappa + b\boldsymbol{B}_\varkappa + c\boldsymbol{C}_\varkappa + d\boldsymbol{D}_\varkappa + \cdots,$$

und entsprechen diesen Angriffssystemen in dem Stabe $\mathfrak{S}_\sigma$ die Stabkräfte t^A_σ, t^B_σ, t^C_σ, $t^D_\sigma, \cdots$ sowie t^S_σ, so ist

$$t^S_\sigma = at^A_\sigma + bt^B_\sigma + ct^C_\sigma + dt^D_\sigma + \cdots,$$

wo die t auf ihren Stäben wie algebraische Zahlen zu addieren sind, weshalb ihre Bezeichnung als Vektoren (durch Fettdruck) nicht nötig ist. Das ist in anderen Worten der Inhalt des Superpositionsgesetzes.

2. Aus diesem allgemeinen und mühelos einzusehenden Gesetze strömt eine solche Fülle wichtiger Erkenntnisse, daß wir nur das Allerwenigste in dieser elementaren Theorie darstellen können. Vorläufig müssen wir uns mit einigen Abzählungen begnügen.

Wenn ein Angriffssystem (Q) des Stabwerks Σ sich aus anderen Angriffssystemen $(A), (B), (C), \cdots$ von Σ in der Form

$$(Q) = a(A) + b(B) + c(C) + \cdots$$

oder wie wir kurz sagen wollen, durch Superposition darstellen läßt,

so nennen wir (Q) von $(A), (B), (C), \cdots$ linear abhängig. Ist eine solche Darstellung unmöglich, so heißt (Q) von $(A), (B), (C), \cdots$ linear unabhängig. Entsprechendes gilt von $(t^A), (t^B), (t^C), \cdots$ und (t^Q).

Eine Reihe von Angriffssystemen $(A_1), (A_2), \cdots, (A_\alpha)$, von denen keines durch Superposition aus den anderen darstellbar ist, während alle anderen Angriffssysteme des Stabwerks Σ von $(A_1), \cdots, (A_\alpha)$ linear abhängig sind, wird eine Basis der Angriffssysteme genannt; eine entsprechende Definition gelte für die Lösungen (t^Q) des Spannungsproblems: Durch eine Basis $(t^{B_1}), \cdots, (t^{B_\beta})$ sind alle anderen Lösungen (t^Q) in der Form

$$(t^Q) = b_1(t^{B_1}) + b_2(t^{B_2}) + \cdots + b_\beta(t^{B_\beta})$$

darstellbar, während keines der Elemente der Basis durch die anderen darstellbar ist. Man darf aber nicht schließen, daß einer Basis $(A_1), \cdots, (A_\alpha)$ der Angriffssysteme auch eine Basis $(t^{A_1}), \cdots, (t^{A_\alpha})$ der Lösungen entspreche; wir hatten nirgends vorausgesetzt, daß dem Spannungsproblem nur eine Lösung zukomme.

Eine Basis der Lösungen nun ist sofort angebbar: Es seien $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_s$ die einzelnen Stäbe von Σ, ihre Anzahl also s, und $(\tau^{(\sigma)})$ das System von Stabkräften, das aus den Kräften $+1$ und -1 im Stabe $\mathfrak{S}_\sigma$ an seinen beiden Endpunkten besteht; wir verabreden, bei jedem Stabe einen bestimmten Punkt als Anfangspunkt zu betrachten, den anderen als Endpunkt, und $+1$ soll immer am Anfangspunkt wirken; alle anderen Stabkräfte nehmen wir gleich Null an und konstruieren an den Knotenpunkten solche Angriffskräfte, daß zwischen den umgekehrten Angriffskräften und dem System $(\tau^{(\sigma)})$ Gleichgewicht besteht; d. h. wir bringen an den Endpunkten von $\mathfrak{S}_\sigma$ die Kräfte $+1$ und -1 auch als Angriffskräfte an, während alle anderen Angriffskräfte gleich Null gewählt werden. Dieses Angriffssystem (σ) unterscheidet sich also nur in der Auffassungsweise von $(\tau^{(\sigma)})$, beide Systeme bestehen aus denselben Kräften, die von (σ) werden aber als Angriffskräfte, die von $(\tau^{(\sigma)})$ als Stabkräfte gedacht. Jedenfalls aber dürfen wir $(\tau^{(\sigma)})$ als eine Lösung des Spannungsproblems auffassen, und nun ist

$$(\tau^{(1)}), (\tau^{(2)}), \cdots, (\tau^{(s)})$$

offenbar eine Basis aller Lösungen; denn läßt man aus dieser Reihe ein Glied fort, etwa $(\tau^{(\sigma)})$, so kann man durch Superposition der übrigen niemals in $\mathfrak{S}_\sigma$ ein Kräftepaar bringen, also auch nicht $(\tau^{(\sigma)})$ darstellen, während andererseits jede Lösung (t) des Spannungs-

problems, die etwa in den Anfangspunkten von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots, \mathfrak{S}_s$ die Spannungen $t_1, t_2, \cdots, t_s$ ergibt, durch

$$(t) = t_1(\tau^{(1)}) + t_2(\tau^{(2)}) + \cdots + t_s(\tau^{(s)})$$

dargestellt ist.

Die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen ist also gleich der der Stäbe.

Und das gilt von dem eingangs beschriebenen Stabwerk Σ, das nicht einmal als zusammenhängend vorausgesetzt ist.

3. Auch von den Angriffssystemen ist leicht eine Basis anzugeben. Zu diesem Zweck legen wir durch den beliebigen Knoten $\varkappa$ zwei verschiedene Geraden, $z_{2\varkappa-1}, z_{2\varkappa}$, jede mit bestimmtem Sinn versehen, dem folgend wir Strecken dieser Geraden positiv messen, sonst negativ. Durch den vorletzten Knotenpunkt $k-1$ gehen so die Geraden z_{2k-3} und z_{2k-2}, von denen z_{2k-3} auch durch k gehen möge, ohne mit z_{2k-1} oder z_{2k} zusammenzufallen. Nun bringen wir auf z_λ in dem Knotenpunkte von z_λ im Pfeilsinne von z_λ die Krafteinheit an, und bestimmen zu dieser Kraft $\boldsymbol{Z}_\lambda$ auf $z_{2k}, z_{2k-1}, z_{2k-2}$ an den Knotenpunkten dieser Geraden (nach § 90, 7.) die Kräfte $\boldsymbol{A}_\lambda, \boldsymbol{B}_\lambda, \boldsymbol{C}_\lambda$, die $\boldsymbol{Z}_\lambda$ im Gleichgewicht halten, für $\lambda = 1, 2, \cdots, 2(k-2)$. Unter (Z_λ) verstehen wir das aus $\boldsymbol{Z}_\lambda, \boldsymbol{A}_\lambda, \boldsymbol{B}_\lambda, \boldsymbol{C}_\lambda$ gebildete Angriffssystem.

Ist jetzt (Q) irgend ein Angriffssystem mit der Kraft $\boldsymbol{Q}_\varkappa$ an dem beliebigen Knoten $\varkappa$, die auf $z_{2\varkappa-1}$ und $z_{2\varkappa}$ die Komponenten $c_{2\varkappa-1}, c_{2\varkappa}$ hat, positiv oder negativ gemessen, je nachdem sie die Richtung von $z_{2\varkappa-1}, z_{2\varkappa}$ haben oder nicht, so hat auch $c_{2\varkappa-1}(Z_{2\varkappa-1}) + c_{2\varkappa}(Z_{2\varkappa})$ an $\varkappa$ diese Kraft und bringt sonst nur noch Kräfte nach $(k-1)$ und k. Also stimmt das System

$$(Q') = c_1(Z_1) + c_2(Z_2) + \cdots + c_{2(k-2)}(Z_{2(k-2)})$$

mit (Q) in den Kräften der $k-2$ ersten Knotenpunkte überein und ist zudem im Gleichgewicht, da die (Z_λ) es sind; daher besteht das System $(Q)-(Q')$ nur noch aus Kräften an $(k-1)$ und k, die ebenfalls im Gleichgewicht sein müssen und daher auf z_{2k-3} ein Gegenpaar bilden, das am Knoten $(k-1)$, im Sinne von z_{2k-3} gemessen, die Größe c_{2k-3} haben möge. Besteht (Z_{2k-3}) aus der positiven Krafteinheit an $(k-1)$ auf z_{2k-3} und der Gegenkraft an k, so ist jenes Kräftepaar gleich $c_{2k-3}(Z_{2k-3})$, also

$$(Q)-(Q') = c_{2k-3}(Z_{2k-3}),$$

und schließlich:

$$(Q) = c_1(Z_1) + c_2(Z_2) + \cdots + c_{2k-3}(Z_{2k-3}).$$

Daraus folgt:

Das $(2k-3)$-gliedrige System (Z_1), (Z_2), $\cdots$, (Z_{2k-3}) ist eine Basis aller Angriffssysteme von Σ;

denn es vermag jedes derselben durch Superposition zu erzeugen, während von den (Z) selber keines durch die anderen darstellbar ist.

4. Nicht jedem dieser Angriffssysteme entspricht an Σ eine Lösung, wenn Σ in sich beweglich oder mehrteilig ist. Nun nehmen wir an, Σ sei ein statisch bestimmtes Fachwerk $\mathfrak{F}$ von s Stäben, k Knoten, d. h. bei jedem Angriffssystem habe das Spannungsproblem eine und nur eine Lösung. Jedem der s linear unabhängigen Systeme $(\tau^{(1)})$, $(\tau^{(2)})$, $\cdots$, $(\tau^{(s)})$, die nach Art. 2 zu den Angriffssystemen (1), (2), $\cdots$, (s) eine Lösung des Spannungsproblems liefern, entspricht nunmehr nur diese eine Lösung; und diese s Angriffssysteme sind jetzt nach dem Superpositionsgesetz linear unabhängig. Mit Rücksicht auf das Schlußergebnis von 3. ist daher

$$s = 2k - 3,$$

d. h.:

Ein statisch bestimmtes Fachwerk von k Knoten hat $s = 2k - 3$ Stäbe,

aber nicht jedes Fachwerk von dieser Anzahl der Stäbe und Knoten ist, wie wir sehen werden, statisch bestimmt.

5. Ein statisch bestimmtes Fachwerk ist in sich starr, kein Teil ist gegen den anderen beweglich. Denn könnte sich, wenn man zwei Knotenpunkte 1 und 2 festhält, ein dritter Knotenpunkt 3 noch bewegen, für einen Augenblick etwa auf einer durch 3 gehenden Geraden von bestimmter Richtung, so würde eine an 3 in dieser Richtung angebrachte Kraft, der in 1 und 2 zwei dazu zu konstruierende das Gleichgewicht halten, den Knotenpunkt fortbewegen, könnte also durch innere Kräfte in den Stäben nicht daran gehindert werden, und für diese drei Kräfte als Angriffssystem wäre das Spannungsproblem unlösbar. Ein in sich starres Fachwerk nennt man stabil, doch besagt dieser Begriff noch mehr, was wir mit unseren bis jetzt entwickelten Hilfsmitteln nicht ausdrücken können; es ist nämlich nicht jedes starre Fachwerk im tieferen Sinne des Wortes stabil, wohl aber jedes stabile Fachwerk starr.

Aus der Starrheit des statisch bestimmten Fachwerks folgt, daß durch jeden Knoten mindestens zwei Stäbe gehen, weil ein Knoten mit einem Stab die Beweglichkeit dieses Stabes voraussetzte.

6. Aus dem statisch bestimmten Fachwerk $\mathfrak{F}$ geht ein ebenfalls starres Fachwerk $\mathfrak{F}'$ hervor, wenn man in $\mathfrak{F}$ noch nicht verbundene Knoten durch Einführung neuer Stäbe verbindet, ohne neue Knotenpunkte einzuführen. Die alten Stäbe seien $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{S}_{2k-3}$,

die neuen, die wir **überzählige Stäbe** nennen, $\mathfrak{S}_1^0, \mathfrak{S}_2^0, \cdots, \mathfrak{S}_p^0$. Von einem Knoten, an dem einer oder mehrere der überzähligen Stäbe sitzen, strahlen mindestens auch zwei alte aus. Wenn wir daher in dem überzähligen Stabe $\mathfrak{S}_\pi^0$ irgend ein Gegenpaar von Kräften anbringen, von dem je eine Kraft am Anfang und am Ende dieses Stabes wirkt, so können wir in den Stäben des ursprünglichen Fachwerks $\mathfrak{F}$ mit Leichtigkeit Kräftepaare so anbringen, daß in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herrscht und von den überzähligen Stäben nur $\mathfrak{S}_\pi^0$ ein Kräftepaar trägt; es bilde etwa eine Zugkraft, bestehend aus der Krafteinheit und der Gegenkraft, und der Druck werde als negative Zugkraft gemessen. Das Kräftepaar in $\mathfrak{S}_\pi^0$ ist hiernach ein Teil eines Spannungszustandes (σ_π) des ganzen Fachwerks, bei dem Gleichgewicht an allen Knoten und in allen Stäben waltet, **ohne daß Angriffskräfte vorhanden sind.** Daran soll der obere Index von $\mathfrak{S}_\pi^0$ erinnern. Das zu $\mathfrak{S}_\pi^0$ gehörige System von Stabkräften (σ_π) läßt also alle überzähligen Stäbe außer $\mathfrak{S}_\pi^0$ kraftlos.

7. Einem Angriffssystem (Q) an $\mathfrak{F}'$ möge nun eine Lösung (t^Q) des Spannungsproblems entsprechen, die für den überzähligen Stab $\mathfrak{S}_\pi^0$ die Zugkraft γ_π ergebe. Dann stimmt das System

$$(\sigma) = \gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(\sigma_2) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p)$$

von Stabkräften mit (t^Q) in den Kräften auf den überzähligen Stäben überein, und da (σ) in jedem Knotenpunkte Gleichgewicht bestehen läßt, so stellt auch $(t^Q) - (\sigma)$ einen Spannungszustand dar, bei dem in jedem Knoten und in jedem Stabe Gleichgewicht ist; da aber bei diesem Spannungszustande die überzähligen Stäbe kraftfrei sind, so können diese beseitigt werden. Dann besteht an $\mathfrak{F}$ selber dieser Spannungszustand mit Gleichgewicht; konstruiert man daher zu diesen Stabkräften die Angriffskräfte, so bilden diese ein Angriffssystem, und dieses hat wegen der statischen Bestimmtheit von $\mathfrak{F}$ nur eine in der Form

$$(t^Q) - (\sigma) = c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}})$$

darstellbare Lösung, wenn (t^{Z_λ}) die Lösung des zu (Z_λ) gehörigen Spannungsproblems am Fachwerk $\mathfrak{F}$ bezeichnet. Also ist endlich:

$$(t^Q) = (\sigma) + c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}),$$
$$(t^Q) = c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}) + \gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(\sigma_2) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p).$$

In dieser Form ist also die Lösung jedes Spannungsproblems am Fachwerk $\mathfrak{F}'$ darstellbar.

8. Wenn andererseits für $\mathfrak{F}'$ irgend ein Angriffssystem (Q) vorgelegt ist, so schreibe man außerdem noch den überzähligen Stäben

ganz willkürlich den durch $(\sigma) = \gamma_1(\sigma_1) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p)$ bei beliebigen γ dargestellten Spannungszustand vor (der auch die Stäbe von $\mathfrak{F}$ selber in Mitleidenschaft zieht). Die so für $\mathfrak{S}_1^0, \ldots, \mathfrak{S}_p^0$ verabredeten Stabkräfte denke man an $\mathfrak{F}$ als Angriffskräfte angebracht, an denselben Knoten und in denselben Richtungen. Das so aus (Q) hervorgehende System (Q') an $\mathfrak{F}$ ist dann ein Angriffssystem an $\mathfrak{F}$, dem eine ganz bestimmte Lösung des Spannungsproblems entspricht:

$$c_1(t^{Z_1}) + c_2(t^{Z_2}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}),$$

und nach dem Superpositionsgesetz ist dann

$$(t^Q) = c_1(t^{Z_1}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}) + \gamma_1(\sigma_1) + \cdots + \gamma_p(\sigma_p)$$

eine Lösung des Spannungsproblems zu (Q) an $\mathfrak{F}'$, genau wie oben, nur daß jetzt die vollständige Verfügbarkeit der Konstanten $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ zutage tritt. Einem Angriffssystem an $\mathfrak{F}'$ läßt sich also kein eindeutiger Spannungszustand in den Stäben entgegensetzen, man kann die Spannungen der überzähligen Stäbe nach Belieben vorschreiben. Dem gegenüber steht aber die nicht minder sichere Tatsache, daß an einem wirklich ausgeführten Fachwerk sich bei gegebener Belastung immer ein bestimmter Spannungszustand einstellt. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich auf, wenn man bedenkt, daß wir absolut starre Stäbe und rein statische Verhältnisse vorausgesetzt haben, starre Stäbe, indem wir von einem Gegenpaar auf einem Stabe annehmen, daß es sich zerstört. An einem materiellen Fachwerk ist das nicht so, da treten kleine Formänderungen auf und damit Übertragungen bestimmter Spannungszustände in alle Stäbe. Dem Fachwerk unserer Theorie hingegen kommt das in § 95, 4. beschriebene Fadenmodell materiell am nächsten, aber selbst dieses entscheidet sich für bestimmte Spannungen in den überzähligen Stäben (Fäden), weil die Fäden ebenfalls nachgeben. Die Unbestimmtheit des Spannungszustandes von $\mathfrak{F}'$ in den überzähligen Stäben gilt also nur an einem idealen Fachwerk, das den rein statischen Voraussetzungen der Theorie entspricht. In diesem Sinne heißt $\mathfrak{F}'$ statisch unbestimmt.

9. Das Hauptergebnis dieser ganzen Betrachtung, die mit den einfachsten Mitteln geführt werden konnte und nicht einmal die Theorie der Systeme linearer Gleichungen voraussetzt, besteht darin, daß wir die Angriffssysteme wie die Spannungszustände aus ganz einfachen, linear unabhängigen Elementen durch Übereinanderlagerung aufbauen können. Wir wollen das Wesentliche zusammenstellen.

Aus dem statisch bestimmten Fachwerk $\mathfrak{F}$ mit k Knotenpunkten und $s = 2k - 3$ Stäben sei durch Ein-

ziehen von p „überzähligen" Stäben $\mathfrak{S}_1^0, \ldots, \mathfrak{S}_p^0$ das im Falle $p > 0$ statisch unbestimmte Fachwerk $\mathfrak{F}'$ mit k Knoten und $s' = s + p$ Stäben abgeleitet. Dann lassen sich alle Angriffssysteme an $\mathfrak{F}'$ (und damit an $\mathfrak{F}$) superponieren aus den $2k - 3$ linear unabhängigen Systemen

$$(Z_1),\ (Z_2),\ \ldots,\ (Z_{2k-3}),$$

die je nur aus höchstens vier Kräften bestehen; drei derselben haben bei allen (Z_λ) dieselben Angriffslinien $z_{2k}, z_{2k-1}, z_{2k-2}$; die vierte, $\boldsymbol{Z}_\lambda$, wirkt für $\lambda = 2\varkappa - 1$ und $\lambda = 2\varkappa$ am Punkt $\varkappa$; die Richtungen von $\boldsymbol{Z}_{2\varkappa-1}$ und $\boldsymbol{Z}_{2\varkappa}$ sind verschieden.

Ist nun

$$(Q) = c_1(Z_1) + c_2(Z_2) + \cdots + c_{2k-3}(Z_{2k-3})$$

ein Angriffssystem an $\mathfrak{F}$ und (t^{Z_λ}) die zu (Z_λ) gehörige Lösung des Spannungsproblems, so gehört zu (Q) an $\mathfrak{F}$ der Spannungszustand

$$(t^Q) = c_1(t^{Z_1}) + c_2(t^{Z_2}) + \cdots + c_{2k-3}(t^{Z_{2k-3}}).$$

Die Systeme $(t^{Z_1}), \ldots, (t^{Z_{2k-3}})$ sind voneinander linear unabhängig.

Bezeichnet nun noch $(\tau^{(\pi)})$ einen Spannungszustand an $\mathfrak{F}'$, bei dem von den überzähligen Stäben nur $\mathfrak{S}_\pi^0$ ein Kräftepaar, etwa von der Größe $+1$ und -1, enthält, während die übrigen überzähligen Stäbe kraftfrei sind und durch Konstruktion geeigneter Kräftepaare in den Stäben von $\mathfrak{F}$ für Gleichgewicht an allen Knoten gesorgt ist, so ist nach dem Superpositionsgesetz

$$(t'^Q) = (t^Q) + \gamma_1(\tau^{(1)}) + \cdots \gamma_p(\tau^{(p)})$$

mit ganz willkürlichen $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ eine Lösung des Spannungsproblems zu (Q) am Fachwerke $\mathfrak{F}'$, und in dieser Form ist jede Lösung des Problems enthalten.

Diese Superposition der Lösungen aus möglichst einfachen, linear unabhängigen spielt, wenn auch nicht in dieser Form, so doch der Sache nach in der Technik eine wichtige Rolle, indem sie den Einfluß der Belastung eines Knotens auf die Gesamtspannung im Fachwerke erkennen läßt. Bemerkenswert ist, daß hiernach am Fachwerke $\mathfrak{F}'$ Spannungen (τ) auftreten können, auch wenn keine Kräfte angreifen. Praktisch kommen diese in der Weise zustande, daß bei der Herstellung von $\mathfrak{F}$ selber alle Stäbe zusammen gerade ausreichen, um erst die Knotenpunkte gegeneinander festzulegen, während beim Einziehen

der überzähligen Stäbe schon festgelegte Punkte miteinander verbunden werden, wobei, falls der Stab nicht genau die richtige Länge hat, durch Anwendung von Zwang sich Spannungen einstellen können.

10. Aus der Beziehung

$$s = 2k - 3$$

zwischen den Anzahlen der Stäbe und Knoten eines statisch bestimmten Fachwerks läßt sich eine nützliche Folgerung ziehen. Sei z die Anzahl der Knoten mit zwei, und d die der Knoten mit drei Stäben, so strahlen von jenen $2z$, von diesen $3d$, und von den übrigen $(k-z-d)$ Knoten mindestens $4(k-z-d)$ Stäbe nach den anderen Knoten hin aus, und zwar genau so viel, wenn alle übrigen Knoten je vierstabig sind; in der Summe

$$2z + 3d + 4(k - z - d)$$

dieser Zahlen ist jeder Stab zweimal gezählt, also

$$2z + 3d + 4(k - z - d) \leqq 2(2k - 3),$$

woraus

$$2z + d \geqq 6$$

folgt, d. h.:

> Wenn ein statisch bestimmtes Fachwerk keine Dreistabknoten hat, so hat es mindestens drei Zweistabknoten, und wenn es keine Zweistabknoten hat, so hat es mindestens sechs Dreistabknoten.

Ein statisch bestimmtes Fachwerk mit sechs Knotenpunkten ohne Zweistabknoten kann daher nur Dreistabknoten enthalten. In den Figuren 327 und 329 haben wir die beiden möglichen Typen kennen gelernt.

§ 100. Der Grenzfall.

1. Die beiden Fachwerke mit sechs Knotenpunkten sind noch aus einem anderen Grunde von Interesse. Auf das eine, Fig. 327, hatten wir in § 98 das Schnittverfahren angewandt; der Schnitt λ traf die drei Stäbe (1,4), (2,3), (5,6), und es bestand Gleichgewicht zwischen ihren Kräften und den umgekehrten Angriffskräften innerhalb λ; die Resultante $\overline{\boldsymbol{R}}$ der umgekehrten Angriffskräfte in λ, die im Kräfteplan der Größe und Richtung nach durch $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2$ wiedergegeben wird, muß daher auf den drei Stäben drei Komponenten haben, die den drei Stabkräften das Gleichgewicht halten. Diese drei Komponenten können nach § 90, 7. gefunden werden, vorausgesetzt, daß die drei Stäbe

nicht durch einen Punkt gehen. Bilden die drei Stäbe ein Dreieck ABC, und sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ die Komponenten von $\overline{\boldsymbol{R}}$, sowie h_a, h_b, h_c die orientierten Hebelarme dieser Komponenten und u, v, w die Hebelarme von $\overline{\boldsymbol{R}}$ selber an den Drehpunkten A, B, C, so ist nach dem Momentensatz

$$h_a x = uR, \quad h_b y = vR, \quad h_c z = wR,$$

wo x, y, z, R die absoluten Größen der Kräfte bezeichnen. Damit sind die Komponenten gefunden; h_a, h_b, h_c sind bis auf das Vorzeichen einfach die Höhen des Dreiecks ABC. Das alles haben wir mit geringen Abänderungen schon in § 91, 4. gesehen. Wenn nun das Dreieck ABC kleiner und kleiner wird, so nehmen die Höhen unbegrenzt ab und die x, y, z werden immer größer, falls nicht die Resultante $\overline{\boldsymbol{R}}$ immer in der Nähe der drei Eckpunkte bleibt und die Abstände u, v, w ebenfalls abnehmen. Bleiben diese Abstände über einer gewissen von Null verschiedenen Grenze, während ABC in einen Punkt S zusammenschrumpft, so werden x, y, z unendlich. Das also ist der tiefere Grund, warum eine Kraft $\overline{\boldsymbol{R}}$ nicht nach drei durch einen Punkt S gehenden Richtungen zerlegbar ist, wenn der Punkt nicht auf der Angriffslinie der Kraft liegt.

Unsere Konstruktion Fig. 328 setzt also notwendig voraus, daß die drei getroffenen Stäbe nicht durch einen Punkt S gehen; träte dieser Fall doch ein, so würde (u, v) mit $(1, 4)$ zusammenfallen, oder, falls auch v mit u sich vereinigte, ganz unbestimmt werden; in beiden Fällen bleibt A unbestimmt, und im ersten, wie wir jetzt sehen, unbestimmbar, denn die Resultante ginge dann an S vorbei.

Dieser „Grenzfall“, daß an einem starren Fachwerk, das unbegrenzt viel statisch bestimmte Formen hat, bei spezieller Lage der Knotenpunkte sich Unlösbarkeit des Spannungsproblems (infolge des Auftretens unendlich großer Stabkräfte) herausstellt, ist in seiner Wichtigkeit zuerst von O. Mohr erkannt worden (1885). Wir wollen ein Fachwerk dieser Art als singulär bezeichnen, verstehen also darunter ein starres System, das bei anderer Lage der Knotenpunkte statisch bestimmt wäre, so aber nicht jedes Spannungsproblem zu lösen gestattet.

2. Wir bilden das zum Typus Fig. 327 gehörige singuläre Fachwerk hier ab (Fig. 332a) und fügen noch den speziellen Fall hinzu (Fig. 332b), wo bei etwas anderer Anlage die drei Stäbe $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(5, 6)$ parallel und gleich werden; dann ist das Fachwerk, wie man sieht, sogar in sich beweglich.

3. Die Ableitung des Grenzfalles mit der Schnittmethode ist nur von begrenzter Anwendbarkeit, die Methode des folgenden Beweises

führt weiter (Fig. 333). Angenommen, das Spannungsproblem sei an dem Fachwerk Fig. 333 für irgend ein Angriffssystem $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_6$ gelöst, in jedem Knotenpunkte sei Gleichgewicht zwischen den umgekehrten

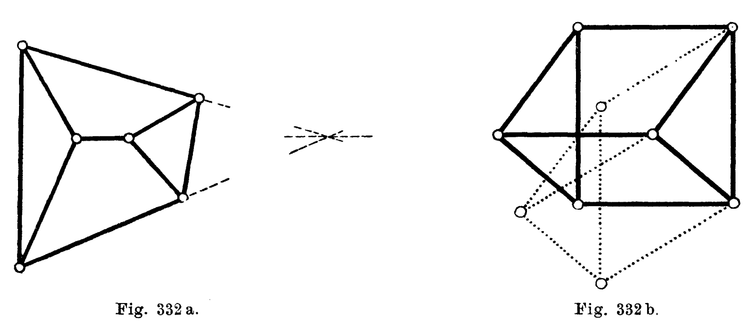


Fig. 332 a. Fig. 332 b.

Angriffskräften und den Stabkräften. Auf den Strahlen $S1$, $S2$, $S5$ nehmen wir drei Punkte $1'$, $2'$, $5'$ so an, daß das Dreieck $1'2'5'$ zu 125 ähnlich ist und ähnlich liegt. Dann sind also die Seiten des neuen Dreiecks denen von 125 parallel. Nun verpflanzen wir alle an den Knoten 1, 2, 5 wirksamen Kräfte (unter Erhaltung ihrer Richtung) nach $1'$, $2'$, $5'$, und da die Stäbe der Knotenpunkte $1'$, $2'$, $5'$ zu denen der Punkte 1, 2, 5 parallel sind, so fallen die Stabkräfte wieder in die Stäbe. Darauf denken wir 1, 2, 5 beseitigt, das Fachwerk also durch $1'2'5'346$ ersetzt. An den Knotenpunkten greifen die alten Angriffskräfte $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_5', \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_6$ an, nur, daß die von $1'$, $2'$, $5'$ parallel verschoben sind; in den Stäben sind solche Stabkräfte, daß an jedem Knoten und in jedem Stabe Gleichgewicht herrscht: Das Spannungsproblem für $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$, $\mathfrak{p}_5'$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$, $\mathfrak{p}_6$ ist gelöst. Da die Stabkräfte sich paarweise aufheben, so müssen auch die Angriffskräfte im Gleichgewicht stehen. Das ist aber nur ausnahmsweise der Fall. Denn nimmt man etwa alle Kräfte außer $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ $\mathfrak{p}_5$ gleich Null, diese aber so an, daß sie im Gleichgewicht

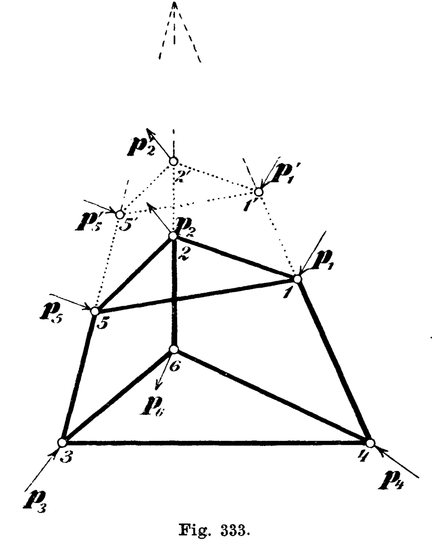


Fig. 333.

sind und $\mathfrak{p}_5$ nicht durch S geht, so wird auch $\mathfrak{p}_5'$ nicht durch S gehen. Andererseits müssen sich aber $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$, $\mathfrak{p}_5$ wegen des Gleichgewichts in einem Punkte T treffen, und durch diesen müßte auch $\mathfrak{p}_5'$

gehen, was nur möglich wäre, wenn p_5 durch S ginge. Wir sind also auf einen Widerspruch gestoßen, der beweist, daß wir die Lösbarkeit des Spannungsproblems bei dieser Belastung nicht voraussetzen durften.

4. Diese Überlegung bleibt offenbar noch richtig, wenn an Stelle der Dreiecke 125 und 346 irgend zwei Systeme $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ von Stäben gesetzt und durch drei Stäbe (1,4), (2,6), (3,5) verbunden werden, deren Endpunkte Knoten von $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ sind. Gehen diese Stäbe durch einen Punkt S, so kann man unter Festhaltung von $\mathfrak{F}_1$ an Stelle von $\mathfrak{F}_2$ ein dazu ähnliches und ähnlich gelegenes System $\mathfrak{F}''$ setzen, mit S als Ähnlichkeitspunkt. Wiederum ist in diesem Falle nicht jedes Spannungsproblem lösbar. Wenn dagegen die drei Stäbe ein Dreieck bilden, so sind ihre Spannkräfte nach der Schnittmethode stets bestimmbar, und wenn $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ selber statisch bestimmt waren, so ist es auch das zusammengesetzte Fachwerk.

5. Auch mit diesem Resultate ist die Tragweite unseres (indirekten) Beweisverfahrens noch nicht erschöpft. Den Ausschlag gab doch der Umstand, daß die Winkel zwischen den Stäben des Fachwerks 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit denen von 1′, 2′, 3, 4, 5′, 6 vollständig übereinstimmten; wir konnten daher die an 1, 2, 5 wirksamen Stab- und Angriffskräfte nach 1′, 2′, 5′ verschieben, die Stabkräfte fanden dort wieder in den Stäben Unterkunft und hoben sich auf, während die Angriffskräfte trotz ihrer Verschiebung im Gleichgewicht bleiben sollten; diese Schlußweise ist ganz allgemein durchführbar. Zu einem Fachwerk $\mathfrak{F}$ mit den Knoten 1, 2, ..., k sei ein anderes, $\mathfrak{F}'$, mit gleich viel Knoten konstruierbar, derart, daß jedem Knoten $\varkappa$ von $\mathfrak{F}$ ein bestimmter Knoten $\varkappa'$ von $\mathfrak{F}'$, und dem Verbindungsstab $\varkappa\lambda$ zweier Knoten $\varkappa$, λ von $\mathfrak{F}$ ein dazu paralleler Verbindungsstab der entsprechenden Knoten $\varkappa'$, λ' von $\mathfrak{F}'$ zugeordnet ist; wenn $\varkappa$, λ durch keinen Stab verbunden sind, wird dagegen nicht verlangt, daß $\varkappa'\lambda'$ zu $\varkappa\lambda$ parallel sein soll. Die durch $\varkappa'$ gehenden Stäbe sind zu den durch $\varkappa$ gehenden parallel. Zu einem Angriffssystem (Q) an $\mathfrak{F}$ sei das Spannungsproblem gelöst, in jedem Knoten bestehe Gleichgewicht zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften. Verpflanzt man nun die an einem Knoten von $\mathfrak{F}$ wirkenden Kräfte nach dem entsprechenden Knoten von $\mathfrak{F}'$ (unter Erhaltung von Größe und Richtung), so fallen die Stabkräfte wegen des vorausgesetzten Parallelismus einfach in die Stäbe von $\mathfrak{F}'$, in jedem Stabe und in jedem Knoten von $\mathfrak{F}'$ herrscht Gleichgewicht! Da die Stabkräfte sich paarweise aufheben, so müssen wiederum die Angriffskräfte, deren Gesamtheit wir mit (Q') bezeichnen, im Gleichgewicht sein, was unter Umständen ein Widerspruch sein wird. Dem müssen wir noch nachgehen.

6. Die Sache liegt jetzt so: Zu dem Fachwerk $\mathfrak{F}$ haben wir ein „isoklines“ Fachwerk $\mathfrak{F}'$ gefügt, ein Fachwerk mit gleichen Stabneigungen; die Angriffskräfte (Q) von $\mathfrak{F}$ sind (parallel zu sich) an die entsprechenden Knotenpunkte von $\mathfrak{F}'$ verlegt und bilden dort ein System (Q'), das, wenn zu (Q) das Spannungsproblem bei $\mathfrak{F}$ lösbar war, sich im Gleichgewicht befindet, also ebenfalls ein Angriffssystem bildet. Wir fassen jetzt irgend ein Knotenpaar 1, 2 von $\mathfrak{F}$ ins Auge und das entsprechende $1'$, $2'$ von $\mathfrak{F}'$; falls die Strecke $1'2'$ nicht gleich 12 ist, dürfen wir $\mathfrak{F}'$ ähnlich so vergrößern oder verkleinern, daß $1'2'$ gleich 12 wird. Dieses ebenfalls zu $\mathfrak{F}$ isokline Fachwerk nennen wir wieder $\mathfrak{F}'$. Jetzt sind zwei Fälle denkbar: entweder ist $\mathfrak{F}'$ zu $\mathfrak{F}$ kongruent, oder nicht. Im ersten Fall ist das Gleichgewicht von (Q') selbstverständlich, im zweiten aber nur unter Bedingungen erfüllt. In diesem Falle wird es mindestens einen Knoten $3'$ von $\mathfrak{F}'$ geben, so daß $1'2'3'$ nicht zu 123 kongruent ist — es ist nicht gesagt, daß diese Dreiecke aus Stäben bestehen sollen —. Dann bestehe (Q) aus nur drei parallelen Kräften an 1, 2, 3, die sich das Gleichgewicht halten sollen (Fig. 334). Um zu verhindern, daß auch (Q') im Gleichgewicht sei, tragen wir $123'' \cong 1'2'3'$ an und wählen die Richtung der drei Kräfte des Systems (Q) von $33''$ verschieden; damit ist unsere Absicht selbst in dem Falle erreicht, daß 1, 2, 3 und $1'$, $2'$, $3'$ in gerader Linie liegen. Es kann also (Q') nicht, wie geschlossen war, im Gleichgewicht stehen; folglich war die Annahme der Lösbarkeit des Spannungsproblems an $\mathfrak{F}$ bei dieser Belastungsart unzulässig. Ehe wir das Resultat feststellen, sei noch bemerkt, daß 12 nicht notwendig ein Stab sein mußte; wir wollen es jetzt aber der größeren Anschaulichkeit halber voraussetzen. Dann können wir sagen:

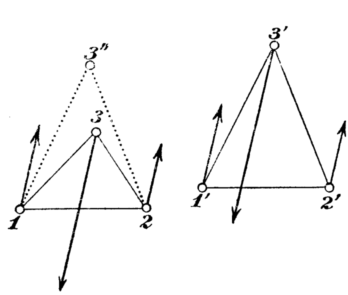


Fig. 334.

Wenn zwei zueinander isokline Fachwerke in der Länge eines Paares homologer Stäbe übereinstimmen, ohne kongruent zu sein, so gestatten sie nicht die Lösung des Spannungsproblems zu jeder Belastung.

Der Satz gilt von allen irgendwie gearteten ebenen Fachwerken, ist aber von Bedeutung nur für die, welche der Zahl ihrer Knoten und Stäbe nach statisch bestimmt sein könnten:

Ein Fachwerk $\mathfrak{F}$ mit k Knoten und $s = 2k - 3$ Stäben ist singulär, wenn ein zu ihm isoklines Fachwerk $\mathfrak{F}'$ existiert, das nicht zu ihm ähnlich ist;

dann ist nämlich sofort ein zu $\mathfrak{F}'$ ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk $\mathfrak{F}''$ konstruierbar, das mit $\mathfrak{F}$ in der Länge eines homologen Stabes übereinstimmt, und dieses ist ebenfalls zu $\mathfrak{F}$ isoklin.

7.[1]) In Fig. 333 ist 1'2'5'346 zur 125346 isoklin, beide Fachwerke haben u. a. den Stab 34 gemein. Wir wollen jetzt auch bei dem zweiten aus sechs Dreistabknoten gebildeten Fachwerk Fig. 335 die Bedingung des Grenzfalles aufsuchen. Das Fachwerk $\mathfrak{F}$ in Fig. 335 wird singulär sein, wenn die Anlage eines isoklinen Fachwerkes $\mathfrak{F}'$ gelingt, das mit $\mathfrak{F}$ den Stab 12 gemein hat, ohne mit $\mathfrak{F}$ identisch zu sein. Zu 36 ziehen wir irgend eine von 36 verschiedene Parallele, und es seien 3' und 6' ihre Schnittpunkte mit 23 und 16. Die Parallele durch 3' zu 34 treffe 14 in 4', die Parallele durch 6' zu 65 treffe 25 in 5'; ist jetzt auch, wie wir annehmen wollen, 4'5' parallel zu 45, so ist $\mathfrak{F}' = 123'4'5'6'$ zu $\mathfrak{F}$ isoklin. Der Schnittpunkt von 23 und 16 sei Q, die Seiten 14 und 25 mögen sich in S, die Seiten 34 und 56 in R, 3'4' und 5'6' in R' treffen.

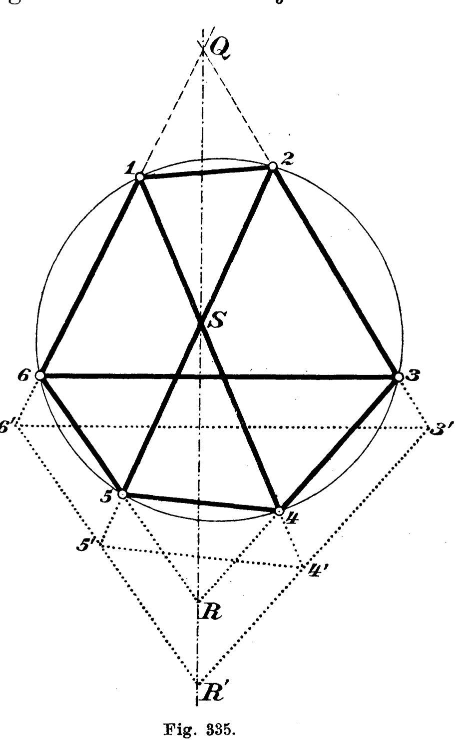


Fig. 335.

Dann ist das Dreieck $36R$ ähnlich und ähnlich gelegen zu $3'6'R'$, also QRR' eine Gerade; ferner ist Dreieck $45R$ ähnlich und ähnlich gelegen zu $4'5'R'$, also SRR' eine Gerade, und mithin ist auch $QSRR'$ eine Gerade. Folglich ist 165234 ein Pascalsches Sechseck, denn seine Gegenseiten schneiden sich, wie aus dem Schema

Seite:	16	65	52
Gegenseite:	23	34	41
Schnittpunkt:	Q	R	S

zu ersehen ist, in drei Punkten Q, R, S einer Geraden. Liegen umgekehrt Q, R, S in einer Geraden, und konstruiert man wieder

1) Diese Nummer setzt die Kenntnis des Pascalschen Lehrsatzes voraus, kann aber übergangen werden.

$3'6' \| 36$, $3'4' \| 34$, $6'5' \| 65$, so ist $36R$ zu $3'6'R'$ ähnlich und ähnlich gelegen, also R' ein Punkt der Geraden QRS; da $6'5' \| 65$, $3'4' \| 34$, so ist $S5 : S5' = SR : SR' = S4 : S4'$, also $4'5' \| 45$, also $123'4'5'6'$ zu 123456 isoklin. Die Ecken eines Pascalschen Sechsecks liegen aber immer auf einem Kegelschnitt, und so folgt:

Das Fachwerk Fig. 335 ist singulär oder nicht, je nachdem seine sechs Ecken auf einem Kegelschnitt liegen oder nicht.

8. So leicht wie im vorliegenden Falle gelingt die Konstruktion der zu einem Fachwerke isoklinen Fachwerke nur in wenigen einfachen Fällen, und doch ist diese Aufgabe von großer Wichtigkeit für die Erkennung des gefährlichen singulären Falles. Versucht man tiefer zu dringen, so wird man auf die für die Fachwerktheorie geradezu fundamentale Aufgabe geführt, alle Fachwerke von gegebenen Stabneigungen und vorgeschriebener Art der Knotenbildung zu konstruieren; das wären dann offenbar wieder isokline Fachwerke. Zur schärferen Formulierung dieser Aufgabe sind einige Vorbereitungen nötig.

A. Winkelmessung.

Um die Richtungen der Stäbe festzulegen, führen wir eine Gerade x von bestimmtem Sinne — die x-Achse eines Koordinatensystems — als Bezugsgerade ein (Fig. 336); auf dem Stabe $\mathfrak{S}_\sigma$, dessen Neigung φ_σ gegen x zu messen ist, bringen wir in seinen beiden Knotenpunkten zwei nach außen weisende Pfeile an; jeder derselben wird um den betreffenden Knotenpunkt positiv gedreht, bis er mit dem Pfeilsinne von x übereinstimmt. Der kleinere dieser beiden Drehwinkel wird Neigungswinkel φ_σ, sein Scheitelpunkt der Anfangspunkt des Stabes genannt. Der andere Knoten heißt der Endpunkt des Stabes. Der ihm entsprechende Drehwinkel ist um zwei Rechte größer als der Neigungswinkel φ_σ.

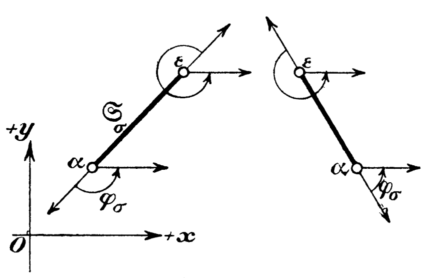


Fig. 336.

B. Die Gliederung.

Es sei die „Gliederungszahl"

$$\Gamma_{\sigma,\varkappa} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \mathfrak{S}_\sigma \text{ nicht durch den Knoten } \varkappa \text{ geht,} \\ +1, \text{ wenn der Knoten } \varkappa \text{ Anfangspunkt von } \mathfrak{S}_\sigma \text{ ist,} \\ -1, \text{ „ „ „ } \varkappa \text{ Endpunkt „ } \mathfrak{S}_\sigma \text{ „ .} \end{cases}$$

9. Jetzt können wir isokline Fachwerke als solche mit gleichen Neigungen entsprechender Stäbe und mit gleichen Gliederungszahlen definieren; die Gesamtheit der Gliederungszahlen bestimmt die „Gliederung“ eines Fachwerkes. Das Ziel unserer Untersuchung wird nun der zuerst von F. Schur[1]) in voller Schärfe ausgesprochene Fundamentalsatz sein:

> Ein Fachwerk ist stabil oder nicht, je nachdem es durch seine Gliederung, die Richtungen seiner Stäbe und die mit diesen Bedingungen verträgliche Annahme eines Stabes eindeutig bestimmt ist oder nicht;

dazu gehört noch eine Erläuterung bezüglich der Stabilität. Wir haben bereits gesagt, daß die (ursprünglich kinematische) Definition dieses Begriffes sich mit unseren bis jetzt entwickelten Hilfsmitteln nicht geben läßt. Stabil besagt mehr als der Begriff starr des täglichen Lebens; auch das singuläre Fachwerk ist in diesem weiten Sinne starr, es hält fest zusammen. Aber es ist nicht stabil.

Um die Ausschließung der singulären Fachwerke von den stabilen wenigstens vorläufig verständlich zu machen, denken wir uns ein Dreieck ABC als Fachwerk ausgebildet. Dieses ist sicher fest, ist statisch bestimmt und nicht singulär. Wenn aber die Summe der Seiten AB und BC gleich der Seite AC wird, so daß B auf die Gerade AC fällt (Fig. 337), so ist das Fachwerk singulär, denn es vermag einem Angriffssystem paralleler Kräfte, deren Richtung von AC verschieden ist, nicht durch Entgegensetzen von Stabkräften das Gleichgewicht zu bieten. Man sieht nun, daß eine verhältnismäßig kleine Kraft genügt, um B aus der Geraden AC herauszudrängen. Das Fachwerk ist zwar im vulgären Sinne starr, aber so wenig formbeständig, daß man mit leichter Mühe eine beträchtliche Verschiebung von B aus der Geraden AC heraus erzielen kann, wie es bei einem Dreiecke ABC nicht entfernt möglich wäre. Der kinematische Begriff der Stabilität verlangt gegenseitige Unbeweglichkeit der Knoten des Fachwerks auch unter Ausschluß dieser minimalen Bewegungen.

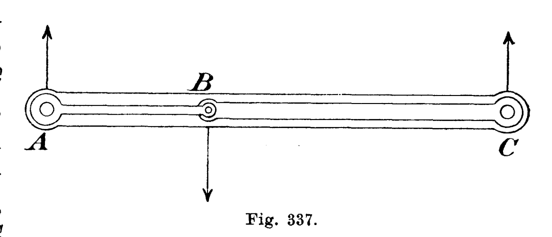


Fig. 337.

1) F. Schur, Über ebene einfache Fachwerke. Math. Ann. 48 (1896).

§ 101. Analytische Lösung des Spannungsproblems.[1])

1. Es liegt nahe, das ganze Problem mit den Mitteln der analytischen Geometrie in Angriff zu nehmen. Der Ansatz ist sehr einfach, macht aber, wenn man den erhaltenen Formeln einen tieferen Sinn abgewinnen will, einige Kunstgriffe nötig, die anfangs ein wenig befremden werden.

Wir stellen uns zuerst die Aufgabe, ein Fachwerk von k Knoten und $s = 2k - 3$ Stäben aus seiner Gliederung, den Neigungen φ_σ seiner Stäbe und einer Stablänge zu bestimmen.

Gegeben sind also die Gliederungszahlen $\Gamma_{\sigma,\varkappa}$, die Winkel φ_σ und die Länge eines Stabes, dessen Knotenpunkte wir mit k und $k-1$ bezeichnet annehmen dürfen; die übrigen sollen $1, 2, \ldots, k-2$ heißen.

Sei nun $\mathfrak{S}_\sigma$ ein Stab mit dem Anfangspunkte α und dem Endpunkte ε. Dann ist (Fig. 338) bei Voraussetzung rechtwinkeliger Koordinaten:

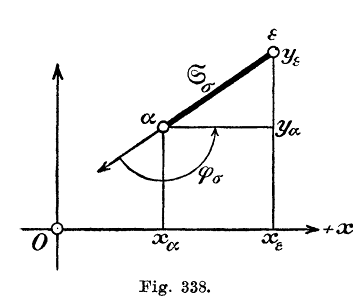


Fig. 338.

$$\frac{\sin\varphi_\sigma}{\cos\varphi_\sigma} = -\frac{y_\varepsilon - y_\alpha}{x_\varepsilon - x_\alpha} = -\frac{y_\alpha - y_\varepsilon}{x_\alpha - x_\varepsilon}.$$

Es ist aber $y_\alpha = \Gamma_{\sigma,\alpha} y_\alpha$, $x_\alpha = \Gamma_{\sigma,\alpha} x_\alpha$, und $-y_\varepsilon = \Gamma_{\sigma,\varepsilon} y_\varepsilon$, $-x_\varepsilon = \Gamma_{\sigma,\varepsilon} x_\varepsilon$, also

$$\frac{\sin\varphi_\sigma}{\cos\varphi_\sigma} = -\frac{\Gamma_{\sigma,\alpha} y_\alpha + \Gamma_{\sigma,\varepsilon} y_\varepsilon}{\Gamma_{\sigma,\alpha} x_\alpha + \Gamma_{\sigma,\varepsilon} x_\varepsilon},$$

wofür man, da $\mathfrak{S}_\sigma$ nur durch die Knoten α, ε geht, auch setzen kann:

$$\frac{\sin\varphi_\sigma}{\cos\varphi_\sigma} = -\frac{\sum\limits_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} y_\varkappa}{\sum\limits_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} x_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Daher hat man zur Bestimmung der $2k$ Koordinaten der k Knotenpunkte die Gleichungen:

(1) $$\sum_\varkappa y_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos\varphi_\sigma + \sum_\varkappa x_\varkappa \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin\varphi_\sigma = 0$$

$$\text{für } \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

---

1) Dieser Paragraph setzt den Begriff der Determinante und den Satz von der Vertauschbarkeit der Zeilen mit den Spalten voraus. Die Ergebnisse dieses Paragraphen werden in den nächsten auf elementarem Wege neu begründet; praktischen Wert hat die analytische Lösung wohl kaum, gibt aber einen vollkommenen Einblick in die algebraische Natur der ganzen Fragestellung.

Unbeschadet der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß der Knoten k zum Koordinatenanfang gemacht ist:

$$(2) \qquad x_k = 0, \quad y_k = 0,$$

und da von dem Stabe $(k, k-1)$ außer der Neigung auch noch die Länge vorgeschrieben ist und wir weiterhin voraussetzen dürfen, daß dieser Stab nicht zur x-Achse senkrecht steht, so ist uns $x_{k-1} \gtrless 0$ bekannt, sagen wir

$$(3) \qquad x_{k-1} = a.$$

Man dürfte sich sogar diesen Stab auf x gelegen denken, doch wollen wir der Übersichtlichkeit der Formeln zuliebe darauf verzichten.

2. Wir haben jetzt für $2k-3$ unbekannte Koordinaten die s Gleichungen (1), die unter Hervorhebung der bekannten Stücke die Form

$$(4) \quad y_1 \Gamma_{\sigma,1} \cos\varphi_\sigma + \cdots + y_{k-1} \Gamma_{\sigma,k-1} \cos\varphi_\sigma + x_1 \Gamma_{\sigma,1} \sin\varphi_\sigma + \cdots$$
$$+ x_{k-2} \Gamma_{\sigma,k-2} \sin\varphi_\sigma = -a \Gamma_{\sigma,k-1} \sin\varphi_\sigma$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$$

annehmen. Sollen die Unbekannten eindeutig bestimmt sein, so muß daher

$$(5) \qquad s = 2k - 3$$

sein, und außerdem darf die Determinante D des Systems nicht verschwinden. Wir schreiben diese Determinante, indem wir ihre σ^{te} Zeile angeben und in doppelte Determinantenstriche fassen:

$$(6) \qquad D = \| \Gamma_{\sigma,1} \cos\varphi_\sigma, \ \Gamma_{\sigma,2} \cos\varphi_\sigma, \ \ldots, \ \Gamma_{\sigma,k-1} \cos\varphi_\sigma;$$
$$\Gamma_{\sigma,1} \sin\varphi_\sigma, \ \Gamma_{\sigma,2} \sin\varphi_\sigma, \ \ldots, \ \Gamma_{\sigma,k-2} \sin\varphi_\sigma \|$$
$$(\sigma = 1, 2, \ldots, 2k-3).$$

Es soll also

$$(7) \qquad D \neq 0$$

sein.

3. Ehe wir daraus unsere Schlüsse ziehen, muß auch das Spannungsproblem angesetzt werden. Für diesen Zweck ist es am bequemsten, Zugkräfte stets positiv, Druckkräfte stets negativ zu messen, auch auf demselben Stabe. Um das Gleichgewicht in sämtlichen Knotenpunkten auszudrücken, brauchen wir die Komponenten der Stabkräfte nach den beiden Richtungen der Koordinatenachsen. Der Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ möge nach unserer jetzigen Übereinkunft an seinen beiden Enden je die Kraft t_σ haben; $\xi_{\sigma,\alpha}$, $\eta_{\sigma,\alpha}$ seien die beiden Kom-

ponenten am Anfangspunkte α, und $\xi_{\sigma,\varepsilon}$, $\eta_{\sigma,\varepsilon}$ die Komponenten am Endpunkte ε des Stabes. Diese entnimmt man aus beistehender Figur:

Bei Zug (t_σ positiv):

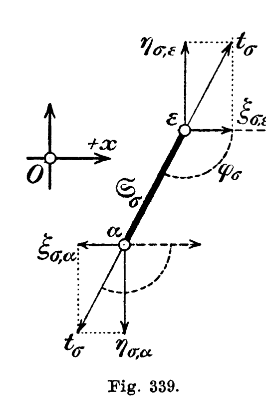


Fig. 339.

am Stabanfang α:

$$\xi_{\sigma,\alpha} = + t_\sigma \cos \varphi_\sigma = + t_\sigma \Gamma_{\sigma,\alpha} \cos \varphi_\sigma,$$
$$\eta_{\sigma,\alpha} = - t_\sigma \sin \varphi_\sigma = - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\alpha} \sin \varphi_\sigma,$$

am Stabende ε:

$$\xi_{\sigma,\varepsilon} = - t_\sigma \cos \varphi_\sigma = + t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varepsilon} \cos \varphi_\sigma,$$
$$\eta_{\sigma,\varepsilon} = + t_\sigma \sin \varphi_\sigma = - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varepsilon} \sin \varphi_\sigma.$$

Also hat die Zugkraft t_σ des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ am Knotenpunkte $\varkappa$ die Komponenten

$$\xi_{\sigma,\varkappa} = + t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos \varphi_\sigma,$$
$$\eta_{\sigma,\varkappa} = - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin \varphi_\sigma,$$

und diese Ausdrücke gelten auch, wenn t_σ eine Druckkraft bedeutet, weil dann einerseits die Komponenten ihren Pfeil umkehren müssen, andererseits die Ausdrücke

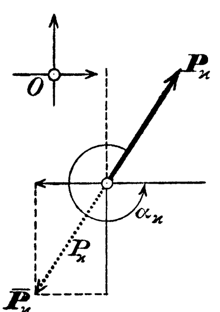


Fig. 340.

$$+ t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos \varphi_\sigma, \quad - t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin \varphi_\sigma$$

die entgegengesetzten Werte annehmen.

Die Angriffskraft $\boldsymbol{P}_\varkappa$ möge die Neigung $\alpha_\varkappa$ haben, und $\overline{\boldsymbol{P}}_\varkappa$ sei die umgekehrte Angriffskraft $\boldsymbol{P}_\varkappa$. Nach beistehender Figur 340 ist

die x-Komponente von $\overline{\boldsymbol{P}}_\varkappa$ gleich $- P_\varkappa \cos \alpha_\varkappa$,
„ y- „ „ $\overline{\boldsymbol{P}}_\varkappa$ „ $+ P_\varkappa \sin \alpha_\varkappa$,

wenn $P_\varkappa$ die absolute Größe von $\boldsymbol{P}_\varkappa$ bedeutet.

4. Am Knoten $\varkappa$ ist Gleichgewicht zwischen $\overline{\boldsymbol{P}}_\varkappa$ und den Stabkräften dieses Knotens, und folglich sowohl zwischen den x-Komponenten dieser Kräfte, als auch zwischen den y-Komponenten:

$$\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos \varphi_\sigma - P_\varkappa \cos \alpha_\varkappa = 0,$$
$$-\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin \varphi_\sigma + P_\varkappa \sin \alpha_\varkappa = 0.$$

Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen des Gleichgewichts an den Knoten sind also:

$$(8) \qquad \sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos \varphi_\sigma = P_\varkappa \cos \alpha_\varkappa,$$

$$(9) \qquad \sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin \varphi_\sigma = P_\varkappa \sin \alpha_\varkappa,$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots, k; \; \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

5. Das Gleichgewicht der Angriffskräfte für sich wird gesichert durch die Gleichungen

$$(10) \qquad \sum_\varkappa P_\varkappa \cos \alpha_\varkappa = 0, \quad \sum_\varkappa P_\varkappa \sin \alpha_\varkappa = 0,$$

und eine weitere Gleichung, die das Verschwinden der Momentensumme dieser Kräfte für irgend einen Drehpunkt C ausdrückt; die orientierten Hebelarme der Komponenten $-P_\varkappa \cos \alpha_\varkappa$, $+P_\varkappa \sin \alpha_\varkappa$ von $\overline{\boldsymbol{P}}_\varkappa$ am Drehpunkte C seien $m_\varkappa$, $n_\varkappa$. Dann lautet die Momentengleichung:

$$(11) \qquad \sum_\varkappa m_\varkappa P_\varkappa \cos \alpha_\varkappa + \sum_\varkappa n_\varkappa P_\varkappa \sin \alpha_\varkappa = 0.$$

Wegen (10) ist eine der k Gleichungen (8) von den anderen abhängig und kann daher gestrichen werden; wir streichen die letzte, dem Werte $\varkappa = k$ entsprechende; ebenso in (9). Drückt man in (11) die Glieder $P_k \cos \alpha_k$, $P_k \sin \alpha_k$ nach (10) durch $P_1, \ldots, P_{k-1}$ aus, so zeigt sich, daß nach der vorgenommenen Streichung immer noch eine von den rechten Seiten des Systems (8), (9) durch die anderen ausdrückbar ist; es muß also noch eine Gleichung weggelassen werden. Hat man den Drehpunkt der Momente nicht auf einer der $2k$ Komponenten der Kräfte $\boldsymbol{P}_\varkappa$ angenommen, so ist keines der $m_\varkappa$ und $n_\varkappa$ gleich null, und man darf dann eine beliebige der Gleichungen unterdrücken, also etwa die dem Werte $\varkappa = k-1$ entsprechende Gleichung des Systems (9).

6. Zur Bestimmung der s Stabkräfte t_σ liegen demnach die $2k-3$ Gleichungen

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \cos \varphi_\sigma = P_\varkappa \cos \alpha_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k-1, \\ &\sum_\sigma t_\sigma \Gamma_{\sigma,\varkappa} \sin \varphi_\sigma = P_\varkappa \sin \alpha_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots, k-2 \end{aligned}$$

vor. Es folgt:

Die Stabkräfte sind nur dann eindeutig bestimmbar, und das Fachwerk ist nur dann statisch bestimmt, wenn die Zahl der Stäbe gleich $2k-3$ ist und die Determinante des Systems (12) nicht verschwindet.

Diese Determinante ist aber mit der in (6) angegebenen identisch[1]),

denn nach (12) deckt sich ihre σ^{te} Spalte:

$$\Gamma_{\sigma,1} \cos \varphi_\sigma,\ \Gamma_{\sigma,2} \cos \varphi_\sigma,\ \ldots,\ \Gamma_{\sigma,k-1} \cos \varphi_\sigma;$$
$$\Gamma_{\sigma,1} \sin \varphi_\sigma,\ \Gamma_{\sigma,2} \sin \varphi_\sigma,\ \ldots,\ \Gamma_{\sigma,k-2} \sin \varphi_\sigma$$

mit der σ^{ten} Zeile von D.

Diese Übereinstimmung besagt aber:

Ein Fachwerk ist nur dann statisch bestimmt, wenn es durch die Gliederung und Richtung seiner Stäbe und die damit verträgliche Annahme zweier Knotenpunkte als geometrische Figur eindeutig bestimmt ist.

Wenn zwischen der Zahl s der Stäbe und der Zahl k der Knoten die Beziehung $s = 2k - 3$ besteht, so ist $D \neq 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die geometrische Bestimmtheit, d. h.:

Das Verschwinden der Determinante D ist charakteristisch für den sogenannten Grenzfall, in dem das Fachwerk singulär wird.

Daß die geometrische Bestimmtheit durch Gliederung, Neigungswinkel und Fixierung zweier Knoten, oder, was dasselbe sagen will, die Unmöglichkeit isokliner nicht ähnlicher Fachwerke eine notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit ist, haben wir schon auf anderem Wege eingesehen. Jetzt erfahren wir, daß diese Bedingung auch hinreichend ist.

§ 102. **Stabilität.**

1. Um das Spannungsproblem vollständig zu lösen, sind einige einfache Betrachtungen infinitesimaler Natur nötig, die sich nun nicht länger mehr hinausschieben lassen. Es gilt, den Begriff der Stabilität, den wir nur vorläufig erklärt hatten, schärfer zu erfassen. Stabil sollte ein Fachwerk heißen, wenn es in sich unbeweglich ist; wir haben inzwischen gesehen, daß außer der gewöhnlichen, sinnenfälligen Beweglichkeit noch eine schwerer zu beschreibende minimale Beweglichkeit möglich ist, die am Fachwerk Fig. 337 jedenfalls leichter ist, als wenn dasselbe ein richtiges Dreieck wäre. Das sagt uns unser statisches Gefühl. Dafür soll nun ein zutreffender mathematischer Ausdruck gefunden werden.

1) Der Satz ist zuerst von A. Föppl (1880) bewiesen worden.

Es handelte sich in Fig. 337 um ein ausgeartetes Dreieck ABC, dessen Spitze B auf der Basis liegt; wenn das ganze System in der angegebenen Weise etwa aus Eisenstäben mit drei Gelenken A, B, C hergestellt ist, wird es ein Leichtes sein, durch Druck auf das Mittelgelenk B dieses aus der Geraden AC um eine Strecke h heraus in eine Lage B' zu drängen (Fig. 341), wobei der Stab AC etwas zusammengedrückt und auf die Strecke $A'C'$ reduziert wird, die sich von $AC = 2e$ um den allerdings außerordentlich kleinen Betrag ε unterscheidet. Die Stäbe $AB = u$ und $BC = v$ erfahren eine noch unbedeutendere Streckung α und β. Es ist also

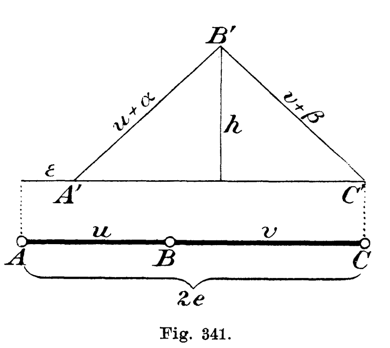


Fig. 341.

$$(1) \qquad u + v = 2e,$$

und nach dem Pythagoreischen Lehrsatze:

$$\varepsilon = 2e - \sqrt{(u+\alpha)^2 - h^2} - \sqrt{(v+\beta)^2 - h^2},$$
$$= 2e - (u+\alpha)\sqrt{1 - \frac{h^2}{(u+\alpha)^2}} - (v+\beta)\sqrt{1 - \frac{h^2}{(v+\beta)^2}}.$$

Da schon h gegen u und v sehr klein ist, gilt das in erhöhtem Maße von $h^2/(u+\alpha)^2$ und $h^2/(v+\beta)^2$; man darf sich daher, unter x einen dieser beiden Ausdrücke verstehend, in der Entwicklung $(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - x/2 - 3x^2/8 + \cdots$, auf die beiden Anfangsglieder beschränken und findet nach einfacher Rechnung:

$$\varepsilon = -(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{u+\alpha} + \frac{1}{v+\beta}\right)$$
$$= -(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{u}\left(1 - \frac{\alpha}{u} + \cdots\right) + \frac{1}{v}\left(1 - \frac{\beta}{v} + \cdots\right)\right),$$

also

$$\varepsilon + \alpha + \beta = \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right) - \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\alpha}{u^2} + \frac{\beta}{v^2}\right) + \cdots$$
$$= h^2\frac{e}{uv} - \frac{1}{2}h^2\left(\frac{\alpha}{u^2} + \frac{\beta}{v^2}\right) + \cdots.$$

Hier sind gegen das erste Glied rechts alle folgenden Glieder so klein, daß sie nicht in Betracht kommen; daher ist mit der allergrößten Annäherung:

$$(2) \qquad \varepsilon + \alpha + \beta = \frac{h^2 e}{uv}.$$

Bezeichnen wir die Summe der drei positiven Zahlen α, β, ε mit $\varDelta$, so ist

(3) $$\varDelta = \frac{h^2 e}{uv}$$

größer als $\alpha, \beta, \varepsilon$ einzeln genommen. $\varDelta$ ist aber nach dieser Formel im Vergleich zu der ebenfalls kleinen Strecke h so außerordentlich geringfügig, daß das Verhältnis $\varDelta : h$ mit abnehmendem h verschwindet, und $\varDelta : h^2$ dem Grenzwerte e/uv zustrebt. Wenn man h im Vergleich zu den Stablängen als (unendlich) klein von der ersten Ordnung bezeichnet, indem das Verhältnis von h zu einer Stablänge von Null nur wenig verschieden ist, so muß $\varDelta$ im Verhältnis zu h ebenfalls klein von der ersten Ordnung genannt werden, und mit den Stablängen verglichen heißt $\varDelta$ unendlich klein von der zweiten Ordnung. Das gilt also auch von α, β, ε.

2. Wir können jetzt sagen: Das spezielle Fachwerk Fig. 337 gestattet bei festgehaltenem Stabe AC von der ersten Ordnung unendlich kleine Bewegung des Knotenpunktes B, die nur von der zweiten Ordnung unendlich kleine Veränderungen der Stablängen bedingen.

Etwas Ähnliches findet bei dem Fachwerk Fig. 327 statt, das in dem Spezialfalle Fig. 333 endliche Bewegung eines Teiles gegen den anderen zuläßt: Wenn man das Dreieck 346 festhält, kann man 125 so verschieben, daß die Stäbe, die dieses Dreieck mit dem anderen verbinden, im Verhältnis zu jener kleinen Verschiebung selbst wieder unendlich kleine Längenänderungen erleiden. Ganz allgemein möge eine Verschiebung eines Knotens gegen einen festgehaltenen Teil des Fachwerks infinitesimal genannt werden, wenn sie gegen die Stablängen gehalten verschwindend klein ist und wenn die sie ermöglichenden Längenänderungen der Stäbe gegen die Verschiebungsstrecke selber wieder unendlich klein, gegen die Stablängen also unendlich klein von der zweiten Ordnung sind.

3. Stabil soll jetzt ein Fachwerk heißen, wenn es weder endliche, noch infinitesimale Bewegungen von Knotenpunkten gegen festgehaltene andere gestattet. Zu den nicht stabilen oder instabilen Fachwerken gehören die beweglichen mit endlicher Verschiebung eines Teiles gegen den anderen und die singulären. Daß Fachwerke mit endlicher Beweglichkeit nicht jedes Spannungsproblem zu lösen gestatten, hatten wir in § 99, 5. aus der Erfahrung entnommen. Es läßt sich aber auch rein statisch begründen, was wir jetzt nachholen wollen, weil dieser Beweis der Schlüssel für das Verständnis alles folgenden ist.

4. Zwei gleichsinnig kongruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$, die in einer Ebene zueinander ähnlich liegen, können durch eine

Parallelverschiebung des einen zur Deckung gebracht werden. Die Ecken bewegen sich auf den drei parallelen Geraden AA', BB', CC'. Im Falle nicht ähnlicher Lage dagegen existiert ein Drehzentrum O, derart, daß $A'B'C'$ durch Drehung um O mit ABC zusammenfällt. O ist der Schnittpunkt der Mittellote von AA', BB' (und CC'), denn für den so definierten Punkt ist $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$.

Denken wir nun das Dreieck ABC durch eine kontinuierliche Bewegung in die Endlage $A'B'C'$ übergeführt und diesen Vorgang, wie beim Kinematographen, in einer großen Reihe von Zwischenstadien momentan festgehalten, so kann nach dem Vorangehenden der Übergang von jeder dieser Lagen des Dreiecks in die nächstfolgende als Parallelverschiebung oder als Drehung aufgefaßt werden. Ist die Gesamtbewegung nicht eine fortwährende Parallelverschiebung oder Drehung um einen festen Punkt, so werden Parallelverschiebungen und Drehungen wechseln können und die Drehungen fortgesetzt ihr momentanes Zentrum ändern, d. h. das Zentrum ihrer augenblicklichen Bewegung.

5. Bei der Drehung des Dreiecks ABC (in seiner Ebene) um den Punkt O beschreibt jeder Punkt einen Kreis um O. Im selben Zeitpunkte verhalten sich die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte wie ihre Abstände von O. Diese Bemerkung kann dazu verwendet werden, aus der Geschwindigkeit eines Punktes die jedes anderen zu konstruieren. Sei etwa die von A durch die Strecke AA^0 gegeben (Fig. 342); diese muß natürlich den Kreis um O mit OA als Radius in A berühren, also auf OA senkrecht stehen, also allgemein:

Die Geschwindigkeit eines bewegten Punktes steht senkrecht auf seiner Verbindungslinie mit dem momentanen Drehzentrum.

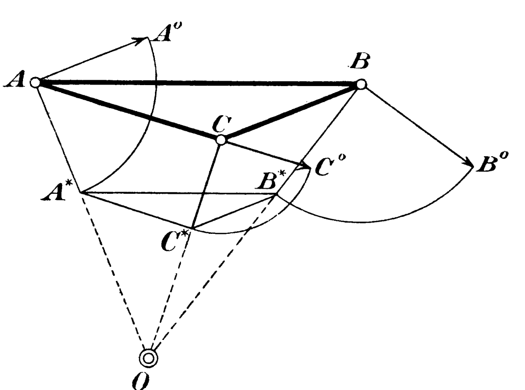


Fig. 342.

Dreht man nun die Strecken AA^0, BB^0, CC^0, welche die Geschwindigkeiten von A, B, C darstellen, um A, B, C im Uhrzeigersinne um 90^0 weiter, so fällt A^0 auf AO in die Lage A^*, B^0 auf BO in die Lage B^*, C^0 auf CO in die Lage C^*, und es ist, da $AA^* : BB^* : CC^* = OA : OB : OC$ sein soll, $A^*B^* \| AB$, $B^*C^* \| BC$, $C^*A^* \| CA$. Aus dem bekannten A^* sind daher B^*, C^* durch Ziehen

von Parallelen leicht ableitbar. Das Dreieck $A^*B^*C^*$ ist zu ABC ähnlich und ähnlich gelegen.

6. Da sich die um 90^0 weiter gedrehten Geschwindigkeiten AA^*, BB^*, CC^*, wie man sieht, zur unmittelbaren konstruktiven Verwendung besser eignen als die wirklichen, so ist es nach dem Vorgang von J. Schadwill[1]) üblich geworden, statt der wirklichen Geschwindigkeit AA^0 eines Punktes A seine durch einen rechten Winkel im Uhrzeigersinne um A gedrehte „normale" Geschwindigkeit AA^* als bestimmendes Element der Bewegung zu betrachten. Die Wahl dieses Drehsinnes ist natürlich eine Sache der Übereinkunft. A^* heißt der Geschwindigkeitspol von A in dem Momente der Bewegung, den wir gerade betrachten; die Gerade AA^* geht durch das momentane Zentrum der Drehung. Der Inbegriff der Geschwindigkeitspole aller Punkte eines bewegtes Systems heißt sein momentaner Geschwindigkeitsplan.

In Fig. 342 ist das Dreieck $A^*B^*C^*$ der Geschwindigkeitsplan von ABC im Momente der Drehung um O. Ist PQ irgend eine Strecke der Ebene, die, mit ABC starr verbunden, an der Drehung teilnimmt, so ist, da die momentanen Geschwindigkeiten von P und Q den Abständen von O proportional sind, $OP^* : OP = OQ^* : OQ$, also auch $P^*Q^* \parallel PQ$, und wenn R irgend ein Punkt der Geraden PQ ist und OR die Gerade P^*Q^* in R^* trifft, so ist ebenfalls wegen der Proportionalität der Geschwindigkeit zu den Abständen von O auch R^* der Geschwindigkeitspol von R.

Satz 1. Die Geschwindigkeitspole einer starren Strecke s erfüllen daher eine dazu parallele Strecke s^*, und die Beziehung zwischen den Punkten von s zu ihren Geschwindigkeitspolen auf s^* ist eine Ähnlichkeit mit O als Ähnlichkeitspunkt.

Das bleibt auch noch richtig, wenn es sich nicht um eine Drehung, sondern um Parallelverschiebung handelt, vorausgesetzt, daß man sich den Drehpol senkrecht zur Verschiebungsrichtung im Unendlichen denkt. Auch die Geschwindigkeiten bei Parallelverschiebung werden, um einen rechten Winkel im Uhrzeigersinne gedreht, als normale Geschwindigkeiten bezeichnet, sie sind also sämtlich zueinander parallel, und die Strecken s, s^* des Satzes 1 sind zueinander kongruent. Nach dieser Auffassung erscheint die Parallelverschiebung als ein besonderer Fall der Drehung, was wir nun nicht weiter hervorheben werden.

1) J. Schadwill, Das Gliedervierseit als Grundlage der Kinematik, Verh. d. Ver. z. Beförd. des Gewerbefl. **55** (1876), S. 407.

7. Unter einem geometrisch starren (ebenen) System verstehen wir eine Gesamtheit von Punkten einer Ebene, deren gegenseitige Abstände (während einer Bewegung des Systems) unveränderlich sind. Das System kann aus einzelnen Punkten oder kontinuierlichen Punktmengen, wie Linien oder Flächenstücken, bestehen. Auch ist nicht gesagt, daß ein während eines Bewegungsvorganges geometrisch starres System auch in dem Sinne starr sein müsse, daß eine Beweglichkeit eines seiner Teile nach Fixierung zweier Punkte des Systems ausgeschlossen wäre. Nach Satz 1 können wir dann feststellen:

Satz 2. Der Geschwindigkeitsplan eines in seiner Ebene irgendwie bewegten geometrisch starren Systems ist in jedem Momente der Bewegung dem System ähnlich und zu ihm ähnlich gelegen bezüglich des momentanen Drehzentrums als Ähnlichkeitspunkt.

Durch Angabe oder Annahme der Geschwindigkeitspole P^*, Q^* zweier Punkte P, Q des Systems in einem Momente der Bewegung sind die gleichzeitigen Geschwindigkeitspole der übrigen Punkte vollkommen bestimmt. Wenn nämlich die Strecken PP^*, QQ^* auf verschiedenen Geraden liegen, so ist ihr Schnittpunkt O der Ähnlichkeitspunkt in der Ähnlichkeitsbeziehung des Satzes 2, und durch diese Ähnlichkeit ist der Geschwindigkeitsplan eindeutig bestimmt; wenn PP^*, QQ^* auf derselben Geraden g liegen, so drehe man einfach PP^* um P, QQ^* um Q im positiven Sinne durch 90^0 in die Lagen PP^0, QQ^0 zurück, dann treffen sich PQ und P^0Q^0 im Drehzentrum O, weil die Abstände OP, OQ zu den Geschwindigkeiten proportional sind. In dem ganz speziellen Falle schließlich, daß eine der Geschwindigkeiten PP^*, QQ^* verschwindet, etwa QQ^*, ist Q selber das Drehzentrum und es muß PP^0 durch Q gehen, woraus zu entnehmen ist, daß die Richtungen PP^*, QQ^* nicht immer beliebig gewählt werden können, wenn ihnen eine mögliche Bewegung des Systems entsprechen soll.

8. Der Satz 2 ist folgendermaßen umkehrbar:

Satz 3. Wenn der Geschwindigkeitsplan in einem bestimmten Augenblicke der Bewegung dem Systeme ähnlich ist und dazu ähnlich liegt, so ist das System im Augenblick der Bewegung geometrisch starr;

denn wenn auch nur ein Punkt C des Systems seine relative Lage zu zwei anderen Punkten A und B desselben ändert, so kann $A^*B^*C^*$ nicht mehr zu ABC ähnlich liegen und ähnlich sein, weil sonst die Geschwindigkeiten von A, B, C zu den Abständen vom Drehzentrum

proportional, die Bewegung also die eines geometrisch starren Systems wäre.

Die Sätze 2 und 3 werden uns ein einfaches Kennzeichen der Beweglichkeit eines Fachwerks in sich abgeben. Bei einer Bewegung nämlich, die die gegenseitigen Abstände der Knotenpunkte ändert, kann im Momente dieser Änderung nach Satz 3 der Geschwindigkeitsplan dem Fachwerk nicht ähnlich sein und zugleich dazu ähnlich liegen. Nach Satz 1 liegen aber wenigstens die Geschwindigkeitspole der Punkte jedes Stabes[1]) auf einer zum Stab parallelen Strecke, und zwischen den Punkten des Stabes und ihren Polen besteht Ähnlichkeit mit dem momentanen Drehzentrum des Stabes als Ähnlichkeitspunkt. Es gibt jetzt also kein einheitliches Drehzentrum mehr, und die Figur der Geschwindigkeitspole ist offensichtlich nur ein zu dem gegebenen Fachwerk isoklines, aber nicht ähnliches Fachwerk.

9. Diese Wendung ist entscheidend. Sie gilt nämlich auch bei infinitesimalen Bewegungen des Fachwerks. Da in Fig. 341 im Vergleich zu h die Strecke ε unendlich klein ist, so wird auch die Geschwindigkeit, mit der A nach A' geht, im Vergleich zu der Geschwindigkeit, mit der B nach B' ausweicht, unendlich klein sein, so daß sie graphisch nicht in Betracht kommt. Die Fig. 343 gibt daher die tatsächlichen Verhältnisse besser wieder, indem sie den Punkt A an seiner Stelle läßt; BB^0 sei die wirkliche Geschwindigkeit, mit der wir B aus der Geraden AC herausdrängen; $BB^* = BB^0$ fällt auf AB selber; A^* ist mit A, C^* mit C identisch, falls man den Stab AB ruhend denkt. Daher ist $A^*B^*C^*$ zwar zu ABC isoklin, aber nicht ähnlich. Und so allgemein. Die Stabänderungen, die eine infinitesimale Bewegung ermöglichen, erfolgen im Vergleich zu der Geschwindigkeit dieser Bewegungen so langsam, daß sie nicht in Betracht kommen, und die Veränderungen sind gegen die Bewegung der Knoten gehalten so klein, daß die Stablängen als unveränderlich angesehen werden können. Die infinitesimale Beweglichkeit eines Knotens R bei Fixierung zweier Knoten P und Q ist also dadurch charakterisiert, daß ihm eine **Geschwindigkeit** zukommen kann, während P und Q bewegungslos sind. Die Figur der Geschwindigkeitspole des Dreiecks PQR ist daher ein isoklines, aber nicht ähnliches Dreieck.

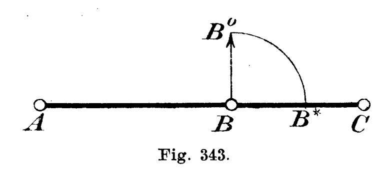


Fig. 343.

1) Die Stäbe selbst werden ja als (geometrisch) starr vorausgesetzt.

Nach Art. 3 sollte ein Fachwerk stabil heißen, wenn es keine endlichen oder infinitesimalen Bewegungen in sich zuläßt. Jetzt sehen wir:

Satz 4. Ein Fachwerk ist stabil oder instabil, je nachdem die isoklinen Fachwerke ihm ähnlich sind oder nicht.

Denn sind sie nicht ähnlich, so sind Geschwindigkeitspläne ausgeschlossen, die einer deformierenden Bewegung entsprechen, und im Falle der Ähnlichkeit befindet sich das isokline Fachwerk zum ursprünglichen in ähnlicher Lage, der Ähnlichkeitspunkt ist also das Zentrum einer Drehung des geometrisch starr bleibenden Fachwerks. Das ist der Fundamentalsatz von F. Schur, der uns jetzt in viel hellerem Lichte erscheint als in § 100.

In Fig. 335 kann jetzt $1 2 3' 4' 5' 6'$ als Geschwindigkeitsplan des Fachwerks $1 2 3 4 5 6$ betrachtet werden: Obgleich der Stab 12 fest bleibt, ist eine Bewegung mit den normalen Geschwindigkeiten $33'$, $44'$, $55'$, $66'$ möglich, aus denen die wirklichen durch positive Drehung um einen rechten Winkel hervorgehen. Dieses Fachwerk ist also instabil, und zwar singulär, da es keine endlichen, also nur infinitesimale Bewegungen in sich gestattet.

§ 103. Geschwindigkeitspläne.

1. Von zwei Bewegungen eines Fachwerkstabes AB seien die beiden Geschwindigkeitspläne Φ_1 und Φ_2 gegeben. Das sind einfach zwei zu AB parallele Strecken A_1B_1 und A_2B_2. Wir wollen nun die durch Φ_1 und Φ_2 bildlich dargestellten Bewegungen zusammensetzen, d. h. zu einer dritten Bewegung vereinigen, deren Geschwindigkeiten sich aus denen der Figur 344 durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten ergeben. Wenn man aber aus den normalen Geschwindigkeiten AA_1 und AA_2 die wirklichen ableitet und durch ein Parallelogramm zu einer Resultante vereinigt, so geht dieses Parallelogramm durch rechtwinkelige Drehung im Uhrzeigersinne um A in ein Parallelogramm $AA_1A_3A_2$ über, das man aus A, A_1, A_2 unmittelbar, ohne Vermittelung der wirklichen Geschwindigkeiten, kon-

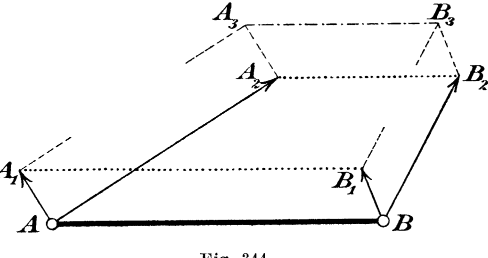


Fig. 344.

struieren kann. Die Diagonale AA_3 stellt also unmittelbar die aus den normalen Geschwindigkeiten AA_1 und AA_2 resultierende normale Geschwindigkeit dar. Verfährt man so auch am Knotenpunkte B, indem man das Parallelogramm $BB_1B_3B_2$ anlegt, das, wie das Parallelogramm der Kräfte, auch in einen Streckenzug einer Geraden ausarten kann, so ist BB_3 die aus BB_1 und BB_2 resultierende normale Geschwindigkeit, also A_3B_3 nach Satz 1, § 102 der Geschwindigkeitsplan der Punkte von AB; diese Strecke muß nach Satz 1 zu AB parallel sein, was sich an Figur 344 auch durch eine einfache planimetrische Betrachtung bestätigen läßt.

Sind jetzt Φ_1 und Φ_2 die Geschwindigkeitspläne zweier Bewegungen eines Fachwerks Φ, von dem AB ein Stab sei, so denken wir uns nach dem angegebenen Verfahren die beiden Geschwindigkeiten jedes Knotenpunktes zusammengesetzt; es entsteht so der aus Φ_1 und Φ_2 zusammengesetzte Geschwindigkeitsplan $\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2$, der ein zu Φ isoklines Fachwerk bildet.

2. Von zwei isoklinen Fachwerken $F = ABC \ldots UV \ldots Z$ und $F_1 = A_1B_1C_1 \ldots U_1V_1 \ldots Z_1$ ausgehend teilen wir die Strecken AA_1, $BB_1, \ldots, ZZ_1$ durch die Punkte $A', B', \ldots, Z'$ in demselben übrigens beliebigen Verhältnisse; falls eine solche Strecke verschwindet, verschwinden auch die Teilstrecken. Die Teilpunkte bestimmen dann ein zu F und F_1 isoklines Fachwerk $F' = A'B'C' \ldots U'V' \ldots Z'$. Den unendlich vielen Werten des Teilverhältnisses entsprechend gibt es unendlich viele Fachwerke F', deren Inbegriff die von F und F_1 bestimmte Schar (F, F_1) genannt wird. Die zu einem Knotenpunkte X von F homologen Ecken $X', X'', \ldots$ an den Fachwerken $F', F'', \ldots$ der Schar sind entweder sämtlich mit X identisch, wenn auch X_1 mit X zusammenfällt[1]), oder sie liegen, falls die Strecke XX_1 von Null verschieden ist, auf der Leitlinie XX_1. Durch Annahme eines solchen Knotenpunktes X' auf seiner Leitlinie ist das Teilverhältnis $XX' : X_1X'$ und damit das ganze Fachwerk F' bestimmt.

Je zwei verschiedene Fachwerke der Schar (F, F_1) erzeugen ebenfalls die Schar.

3. Eine mit Gestaltänderung verbundene endliche oder infinitesimale Bewegung eines instabilen Fachwerks Φ nach einem Geschwindigkeitsplane Φ_1 läßt sich zusammensetzen:

1) aus einer Bewegung nach einem Geschwindigkeitsplane $\varphi_1(XY)$, bei der ein beliebiger Stab XY des Fachwerks in Ruhe bleibt und mindestens ein Knotenpunkt seine Lage zu diesem Stabe ändert, und

1) Mit X_1 bezeichnen wir den zu X homologen Knotenpunkt von F_1.

2) aus einer Gesamtbewegung des Fachwerks nach einem Geschwindigkeitsplane $\psi_1(XY)$, bei der es geometrisch starr bleibt;

Φ_1 ist der aus $\varphi_1(XY)$ und $\psi_1(XY)$ zusammengesetzte Geschwindigkeitsplan

$$\Phi_1 = \varphi_1(XY) + \psi_1(XY).$$

Unter Reduktion eines Geschwindigkeitsplanes Φ_1 auf einen Stab XY verstehen wir die Konstruktion von $\varphi_1(XY)$, und $\varphi_1(XY)$ heiße der auf den Stab XY reduzierte Plan Φ_1. Bezeichnet allgemein $\bar{\psi}$ den Geschwindigkeitsplan, dessen Geschwindigkeiten denen eines Planes ψ sämtlich entgegengesetzt gleich sind, so daß die Zusammensetzung von ψ und $\bar{\psi}$ für jeden Punkt des bewegten Systems die Geschwindigkeit Null ergibt, so ist

$$\Phi_1 + \bar{\psi}_1(XY) = \varphi_1(XY) + \psi_1(XY) + \bar{\psi}_1(XY) = \varphi_1(XY),$$

und es wird zur Konstruktion von $\varphi_1(XY)$ darauf ankommen, $\bar{\psi}_1(XY)$ zu finden. Das ist sehr leicht: Φ_1 möge den Punkten X und Y die normalen Geschwindigkeiten XX_1, YY_1 erteilen (Fig. 345); $\bar{\psi}_1(XY)$ muß diese rückgängig machen und folglich den Punkten X, Y auf den Geraden XX_1, YY_1 die Geschwindigspole $\bar{X}$, $\bar{Y}$ so zuordnen, daß X in der Mitte von X_1 und $\bar{X}$, Y in der Mitte von Y_1 und $\bar{Y}$ liegt. Da nach dem Plane $\bar{\psi}_1(XY)$ das Fachwerk sich als geometrisch starres System bewegen soll, so ist $\bar{\psi}_1(XY)$ durch die Punkte $\bar{X}$, $\bar{Y}$ nach Satz 2, § 102 eindeutig bestimmt als ein zu Φ_1 ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk mit dem Schnittpunkte O von XX_1 und YY_1 (der auch im Unendlichen liegen darf) als Ähnlichkeitspunkt; falls XX_1 und YY_1 auf XY selber liegen, ist O nach § 102, 7. zu bestimmen. Um im Plane $\psi_1(XY)$ etwa zu den Knotenpunkten U, V eines Stabes UV die Geschwindigkeitspole $\bar{U}$, $\bar{V}$ zu finden (Fig. 345), ziehe man daher etwa durch $\bar{Y}$ die Parallele zu YV und bringe sie mit OV zum Schnitt; durch

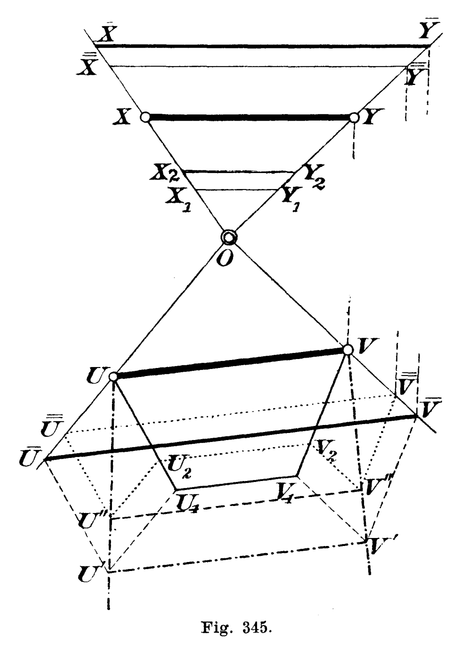


Fig. 345.

den Schnittpunkt $\bar{V}$ ziehe man die Parallele zu UV, die von OU in $\bar{U}$ getroffen wird. Damit ist $\bar{\psi}_1(XY)$ bestimmt; jetzt ist nur noch Φ_1 mit $\bar{\psi}_1(XY)$ nach Art. 1 und Figur 344 zusammenzusetzen. Dann erhält man den gesuchten Geschwindigkeitsplan $\varphi_1(XY)$, demzufolge den Punkten U und V die Geschwindigkeitspole U', V' zukommen mögen; es ist $U'V' \parallel UV$.

4. In der Schar (Φ, Φ_1) nehmen wir einen zweiten Geschwindigkeitsplan Φ_2 an, der den Punkten X, Y, U, V die Pole X_2, Y_2, U_2, V_2 zuordnen möge (Fig. 345). Nach 2. ist

$$(1) \qquad UU_2 : U_2U_1 = VV_2 : V_2V_1 = XX_2 : X_2X_1 = YY_2 : Y_2Y_1,$$

und zwar liegen X_2, Y_2, U_2, V_2 auf den Leitlinien XX_1, YY_1, UU_1, VV_1, insoweit diese bestimmt sind. Wir zerlegen auch Φ_2 in zwei Komponenten $\varphi_2(XY)$ und $\psi_2(XY)$, von denen $\varphi_2(XY)$ einer Bewegung bei festgehaltenem Stabe XY, und $\psi_2(XY)$ einer Bewegung des ganzen starr gehaltenen Fachwerkes entspricht. Auch $\bar{\psi}_2(XY)$ ist ein zu Φ ähnliches und ähnlich gelegenes Fachwerk mit O als Ähnlichkeitspunkt, das durch die Punkte $\bar{\bar{X}}$, $\bar{\bar{Y}}$, die auf OX und OY in den Abständen $X\bar{\bar{X}} = X\bar{X}$, $Y\bar{\bar{Y}} = Y\bar{Y}$ liegen, eindeutig bestimmt ist; $\bar{\bar{U}}$, $\bar{\bar{V}}$ seien in $\bar{\psi}_2(XY)$ die Geschwindigkeitspole von U, V, woraus

$$(2) \qquad U\bar{\bar{U}} : \bar{\bar{U}}\bar{U} = V\bar{\bar{V}} : \bar{\bar{V}}\bar{V} = X\bar{\bar{X}} : \bar{\bar{X}}\bar{X} = Y\bar{\bar{Y}} : \bar{\bar{Y}}\bar{Y} = YY_2 : Y_2Y_1$$

folgt. Aus (1) und (2) ergibt sich, daß das zur Konstruktion des aus U_2 und $\bar{\bar{U}}$ resultierenden Geschwindigkeitspols U'' erforderliche Parallelogramm $UU_2U''\bar{\bar{U}}$ zu $UU_1U'\bar{U}$ ähnlich ist; also liegt U'' auf UU', und ebenso V'' auf VV', wenn V' den Pol der aus VV_2 und $V\bar{\bar{V}}$ zusammengesetzten Bewegung bedeutet. Daher ist $\varphi_2(XY)$ ein zu Φ isoklines Fachwerk, dessen Knotenpunkte U'', V'' auf den Leitlinien UU', VV' liegen; U' V' sind die Drehpole von U, V nach dem Plane $\varphi_1(XY)$, und da UV jeder beliebige Stab des Fachwerks Φ sein kann, so heißt das: $\varphi_2(XY)$ gehört der von Φ und $\varphi_1(XY)$ erzeugten Schar an. Da Φ_2 der Schar (Φ, Φ_1) angehört, so folgt:

Satz 1. Reduziert man eine Schar (Φ, Φ_1) von Geschwindigkeitsplänen eines Fachwerks Φ auf denselben Stab XY, so erhält man wiederum eine Schar.

5. Mit Hilfe dieses Satzes beweist man leicht den von F. Schur[1]) gefundenen

Satz 2. Wird ein stabiles Fachwerk bei Entfernung eines Stabes instabil, so bilden die bei Festhaltung irgend

1) l. c., § 1, 5.

eines Stabes des instabilen Fachwerks möglichen Geschwindigkeitspläne eine einzige Schar.

Zunächst leuchtet nach Satz 1 ein, daß es gleichgültig ist, welchen Stab des instabilen Fachwerks Φ man festhält: Eine bei Fixierung des Stabes XY mögliche Schar von Geschwindigkeitsplänen geht durch Reduktion auf den Stab UV in eine Schar von Geschwindigkeitsplänen über, die bei festgehaltenem Stabe UV eintreten können, und umgekehrt. Wir dürfen daher zur Erleichterung des Beweises den festzuhaltenden Stab AB so wählen, daß er mit dem aus dem ursprünglichen Fachwerk F entfernten Stabe AC den Knotenpunkt A gemeinsam hat; da das so entstandene Fachwerk Φ instabil sein soll, so muß es bei Festhaltung von AB noch eine Bewegung gestatten, deren Geschwindigkeitsplan

$$\Phi_1 = ABC_1 \ldots U_1 V_1 \ldots Z_1$$

zu Φ isoklin ist, ohne mit Φ identisch zu sein, und durch Einführung des Stabes AC_1 nicht zu F selber isoklin wird, denn sonst wäre F gegen die Voraussetzung instabil; daher liegt C_1 nicht auf AC.

Die Fachwerke Φ und Φ_1 erzeugen eine Schar (Φ, Φ_1) von Fachwerken, die den Stab AB gemeinschaftlich haben und daher einer bei Festhaltung von AB möglichen Bewegung als Geschwindigkeitspläne dienen können. Es kommt nun beim Beweise des Satzes 2 darauf an, zu zeigen, daß es außerhalb dieser Schar (Φ, Φ_1) kein zu Φ isoklines Fachwerk

$$\Phi_2 = ABC_2 \ldots U_2 V_2 \ldots Z_2$$

gibt, das mit Φ den Stab AB gemein hat. Das läßt sich in der Tat durch Scheidung zweier Fälle leicht nachweisen:

a) Wenn die Strecken CC_1 und CC_2 auf verschiedenen Geraden liegen, so nehme man auf CC_1 und CC_2 zwei Punkte C' und C'' so an, daß $C'C''$ die Gerade AC in einem im Endlichen liegenden und von C verschiedenen Punkte C^* trifft; die Punkte C' und C'' bestimmen dann in den Scharen (Φ, Φ_1) und (Φ, Φ_2) je ein Fachwerk Φ' und Φ'', und C^* ist in der Schar (Φ', Φ'') Knotenpunkt eines Fachwerks Φ^*, das nicht nur, wie alle Fachwerke der Schar (Φ', Φ''), zu Φ, sondern sogar zu F selber isoklin ist und mit F den Stab AB gemein hat. Dann wäre aber F instabil, entgegen der Voraussetzung, und deshalb ist die Annahme der Existenz von Φ_2 unzulässig.

b) Wenn die Punkte C_1 und C_2 mit C auf derselben Geraden liegen, so kann die Schar (Φ_1, Φ_2) weder mit der Schar (Φ, Φ_1) identisch sein, weil sonst Φ_2 selber dieser Schar angehörte, noch das Fachwerk Φ enthalten, weil sonst nach 2. auch Φ und Φ_1 die Schar



(Φ_1, Φ_2) erzeugen müßten, was wiederum zur Folge hätte, daß Φ_2 der Schar (Φ, Φ_1) angehörte. Nun liegt aber C auf der Leitlinie C_1C_2 der Schar (Φ_1, Φ_2), bestimmt also ein von Φ verschiedenes Fachwerk

$$\Phi^* = ABC \dots U^* V^* \dots Z^*$$

dieser Schar, das nach Einführung des Stabes AC die Instabilität von F selber beweisen würde; wiederum ist die Annahme von Φ_2 unzulässig. Damit ist Satz 2 in vollem Umfange bewiesen.

6. Durch Beseitigung des Stabes AC war das stabile Fachwerk F in das instabile Fachwerk Φ übergegangen, von dem Φ_1 ein Geschwindigkeitsplan bei deformierender Bewegung und festgehaltenem Stabe AB war. Es soll nun versucht werden, Φ durch Einziehen eines neuen Stabes UV wieder stabil zu machen, der aber nicht am Knotenpunkte C angegliedert werden darf.

Wählt man die Knotenpunkte U, V auf gut Glück, so wird Φ entweder nach wie vor instabil bleiben, oder stabil werden.

Im Falle der Instabilität wird Φ_1 auch ein Geschwindigkeitsplan des neuen Fachwerks F' bei festgehaltenem Stabe AB bleiben, also U_1V_1 zu UV parallel sein; ist umgekehrt die Gerade U_1V_1 von Φ_1 zu UV parallel, so wird durch Einziehung des Stabes UV die Instabilität von Φ nicht beseitigt, und es ist außerdem in der ganzen Schar (Φ, Φ_1) die zu UV homologe Strecke mit UV parallel.

Soll F' stabil werden, so darf also jedenfalls U_1V_1 zu UV nicht parallel sein, und diese Bedingung reicht auch aus. Denn die bei Fixierung von AB möglichen Geschwindigkeitspläne von F' hat man in der Schar (Φ, Φ_1) zu suchen, und wenn U_1V_1 nicht zu UV parallel ist, so gilt das auch von allen zu UV homologen Geraden der Schar, weil umgekehrt bei Existenz einer von UV verschiedenen zu UV parallelen Geraden $U'V'$ sofort folgen würde, daß alle zu UV homologen Geraden der Schar zueinander parallel sind: folglich ist, falls UV und U_1V_1 sich im Endlichen schneiden, F' durch Annahme des Stabes AB und durch die Gliederung und Richtungen der übrigen Stäbe eindeutig bestimmt, also nach § 100, 9. stabil.

7. Es fragt sich also nur, ob man in Φ eine Strecke UV finden kann, die zu der homologen U_1V_1 in Φ_1 nicht parallel ist; außerdem darf sich unter den Punkten U, V nicht C befinden. Betrachten wir zuerst die Fachwerke Ψ und Ψ_1, die aus Φ und Φ_1 durch Beseitigung der Knoten C und C_1 und der zugehörigen Stäbe hervorgehen. Wären alle Verbindungsstrecken der Knoten von Ψ zu den homologen von Ψ_1 parallel, so wären Ψ und Ψ_1 ähnlich — „Fall A" —, es müßten denn die Punkte von Ψ auf einer Geraden liegen — „Fall B" —.

Im Falle A würde aus der Ähnlichkeit von Ψ und Ψ_1 sofort die

Ähnlichkeit von Φ und Φ_1 folgen, wenn in Φ durch C mindestens zwei Stäbe gehen, die nicht auf einer Geraden liegen; denn man brauchte dann an Ψ nur C mit seinen Stäben wieder anzugliedern und an Ψ_1 zu diesen Stäben die Parallelen zu ziehen, so wäre das so entstandene Fachwerk Φ_1 zu Φ ähnlich. Wenn dagegen in Φ die Stäbe, die am Knotenpunkte C sitzen, auf einer Geraden x liegen, so können trotz der Ähnlichkeit von Ψ und Ψ_1 die Fachwerke Φ und Φ_1 unähnlich sein, indem C_1 zwar auf der zu x homologen Geraden x_1, aber außerhalb des Punktes angenommen werden kann, der dem Punkte C in der Ähnlichkeit entspricht.

Andererseits können aber die Fachwerke Φ und Φ_1 einander nicht ähnlich sein, da sie infolge des gemeinsamen Stabes AB gleich miteinander identisch sein müßten; folglich sind Ψ_1 und Ψ unähnlich, und es gibt im Falle A mindestens eine Strecke UV in Ψ, die zu U_1V_1 nicht parallel ist. Das kann nicht ein schon vorhandener Stab sein; denn mit diesem Stabe wird das Fachwerk Φ stabil, ausgenommen den einzigen Fall, daß die in Φ an C sitzenden Stäbe auf einer Geraden x liegen, wo, wie wir gesehen haben, ein zu Φ isokliner, aber nicht ähnlicher Geschwindigkeitsplan Φ_1 möglich ist.

Im Falle B liegen die Punkte von Ψ auf einer Geraden; C muß außerhalb derselben liegen, weil F sonst instabil wäre. Das Fachwerk besteht daher aus den Verbindungsstäben des Punktes C mit gewissen Punkten einer Geraden u, die auch noch untereinander verbunden sind. Ein solches Fachwerk kann aber, wenn es nach Loslösung des Stabes AC instabil wird, durch weitere Verbindungen auf u nicht stabil gemacht werden. So ergibt sich der

Satz 3.[1]) Sitzen an einem Knotenpunkte C eines stabilen Fachwerks F, das durch Beseitigung eines Stabes AC instabil wird, mehr als zwei Stäbe, die nicht auf einer Geraden liegen, so kann man nach Beseitigung von AC immer einen nicht an C sitzenden Stab UV so einfügen, daß das neue Fachwerk F' wieder stabil ist, vorausgesetzt, daß nicht alle Knotenpunkte von F außer C auf einer Geraden liegen. — Ist F so beschaffen, daß die Stabilität durch Fortnahme jedes einzelnen Stabes aufgehoben werden kann, so gilt das auch von F'.

Dieser Zusatz ist noch zu beweisen. Bleibt F' nach Beseitigung des Stabes XY stabil, so tritt nach Fortnahme von UV Instabilität ein, und es gibt bei Fixierung von AB eine einzige Schar (Φ, Φ_1) von Geschwindigkeitsplänen, die identisch ist mit der bei Fortnahme des Stabes AC aus F auftretenden Schar. Dann würde F' nach

1) Schur, l. c. § 2, 6.

Beseitigung von XY und Einfügung von AC sicher in ein stabiles Fachwerk Ω übergehen. Denn bei Fixierung von AB und Beseitigung von AC würde Ω sich nur nach dem Plane Φ_1 bewegen können, in welchem AC_1 nicht zu AC parallel ist; sollte nun Ω mit dem Stabe AC beweglich sein, so müßte in der Schar (Φ, Φ_1) ein zu Ω isokliner, aber nicht ähnlicher Geschwindigkeitsplan Φ' zu finden sein; in diesem Plane müßte $AC' \| AC$ sein, was nach dem Gesagten unmöglich ist. Somit ist die Stabilität von Ω gesichert; dieses Fachwerk geht aber aus F hervor durch Beseitigung des Stabes XY und kann nach der Voraussetzung über F nicht stabil sein. Folglich war die Annahme unzulässig, daß F' nach Fortnahme von XY stabil bleibt.

§ 104. Vollständige Lösung des Spannungsproblems.

1. Nach diesen Vorbereitungen sind zu einer vollständigen Lösung des Spannungsproblems alle Wege geebnet. Zunächst können wir unabhängig von den statischen Überlegungen des § 99 die Anzahl s der Stäbe eines statisch bestimmten Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ mit k Knotenpunkten noch einmal ermitteln. Diese Fachwerke sind, wie sich alsbald zeigen wird, identisch mit denen, die F. Schur in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung als einfache bezeichnet: Ein stabiles Fachwerk heißt einfach, wenn es durch Fortnahme jedes einzelnen Stabes instabil wird.

Satz 1. Hat ein einfaches, stabiles Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ von k Knotenpunkten einen zweistabigen Knoten A, so geht es durch Ablösung dieses Knotens und seiner beiden Stäbe AB, AC wieder in ein stabiles, einfaches Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ von $k-1$ Knoten über.

Denn wäre $\mathfrak{F}_{k-1}$ instabil, so existierte bei Festhaltung irgend eines Stabes ein Geschwindigkeitsplan $\mathfrak{F}'_{k-1}$, der den Punkten B und C etwa die Geschwindigkeitspole B' und C' zuweisen möge, und wenn man durch B' und C' die Parallelen zu BA und CA legte, deren Schnittpunkt A' sei, so hätte man zugleich auch einen Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber. Dieser wäre zu $\mathfrak{F}_k$ isoklin, hätte mit $\mathfrak{F}_k$ einen Stab gemein, ohne mit $\mathfrak{F}_k$ zusammenzufallen und würde folglich die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen (§ 100, 6.)[1]. Mithin ist $\mathfrak{F}_{k-1}$

1) Der Beweis wird wirkungslos, wenn BA und CA auf einer Geraden liegen; dieser Fall tritt aber bei stabilen Fachwerken nicht ein; man könnte sonst ein zu $\mathfrak{F}_k$ isoklines Fachwerk angeben, das mit $\mathfrak{F}_k$ alle Knotenpunkte gemein hätte bis auf den Punkt A, der auf AB eine beliebige Lage A' einnehmen könnte. Dann wäre $\mathfrak{F}_k$ nach § 100, 6. instabil.

stabil, und zugleich auch einfach, weil ein Stab von $\mathfrak{F}_{k-1}$, dessen Fortnahme die Stabilität von $\mathfrak{F}_{k-1}$ nicht beeinträchtigte, auch aus $\mathfrak{F}_k$ selber unbeschadet der Stabilität beseitigt werden könnte.

Hat $\mathfrak{F}_k$ keinen zweistabigen Knoten, so nehmen wir an dem Knoten, an dem die wenigsten Stäbe sitzen, einen Stab fort und fügen einen anderen, nicht durch diesen Knoten gehenden Stab so ein, daß das Fachwerk stabil bleibt; das ist nach § 103, Satz 3 immer möglich und hebt die Einfachheit nicht auf. An dem neuen Fachwerk verfahren wir an demselben Knoten ebenso, und wiederholen das Verfahren, bis wir zu einem stabilen und einfachen Fachwerk $\mathfrak{F}_k'$ gelangt sind, das an diesem Knoten nur zwei Stäbe hat. Dieser wird dann, wie vorhin, nebst seinen Stäben beseitigt, und das neue Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ ist wieder stabil und einfach.

Wir können also immer von dem Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ zu einem stabilen und einfachen Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-1}$ übergehen, das einen Knoten und zwei Stäbe weniger hat als $\mathfrak{F}_k$. Von $\mathfrak{F}_{k-1}$ aus gelangt man ebenso zu einem Fachwerk $\mathfrak{F}_{k-2}$, von diesem zu einem $\mathfrak{F}_{k-3}$ u. s. w., bis man schließlich an einem $\mathfrak{F}_3$ Halt machen muß, das, wie alle vorangehenden Fachwerke, stabil und einfach ist und daher aus drei Stäben mit drei Knoten besteht, die ein Dreieck bilden. Da $\mathfrak{F}_3$ aus $\mathfrak{F}_k$ durch Fortnahme von $(k-3)$-mal zwei Stäben hervorgegangen ist, so zählte $\mathfrak{F}_k$ selber

$$s = 2(k-3) + 3 = 2k - 3$$

Stäbe, wie ein statisch bestimmtes Fachwerk. Daß $\mathfrak{F}_k$ wirklich auch statisch bestimmt ist, können wir nunmehr leicht nachweisen, indem wir ein Verfahren angeben, das von jedem einzelnen Stabe direkt die Stabkraft zu bestimmen gestattet.

2. Der Stab von $\mathfrak{F}_k$, dessen Spannung gesucht wird, sei $A_u A_v$. Das Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ geht nach Wegnahme von $A_u A_v$ in ein instabiles Fachwerk

$$\Phi = A_1 A_2 A_3 \ldots A_u A_v \ldots A_k$$

über, das bei Festhaltung des Stabes $A_1 A_2$ mindestens eine infinitesimale Bewegung nach einem Geschwindigkeitsplane

$$\Phi' = A_1 A_2 A_3' \ldots A_u' A_v' \ldots A_k'$$

ausführen kann. Die Strecke $A_u' A_v'$ kann nicht zu $A_u A_v$ parallel sein, weil sonst Φ' nach Einzeichnung des Stabes $A_u' A_v'$ ein Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber wäre, der mit $\mathfrak{F}_k$ den Stab $A_1 A_2$ gemein hätte, ohne mit $\mathfrak{F}_k$ identisch zu sein, was nach § 100, 6. die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen würde.

Als Beispiel möge das schon in § 98, 9. untersuchte Fachwerk mit sechs Knoten und neun Stäben dienen (Fig. 346 und 347), das, falls

seine Knotenpunkte nicht auf einem Kegelschnitte liegen, stabil und einfach ist (§ 100, 7.). Der Geschwindigkeitsplan einer bei festgehaltenem Stabe $A_1 A_2$ möglichen Bewegung ist punktiert, man sieht, daß die Strecke $A_u' A_v'$ zu $A_u A_v$ nicht parallel ist.

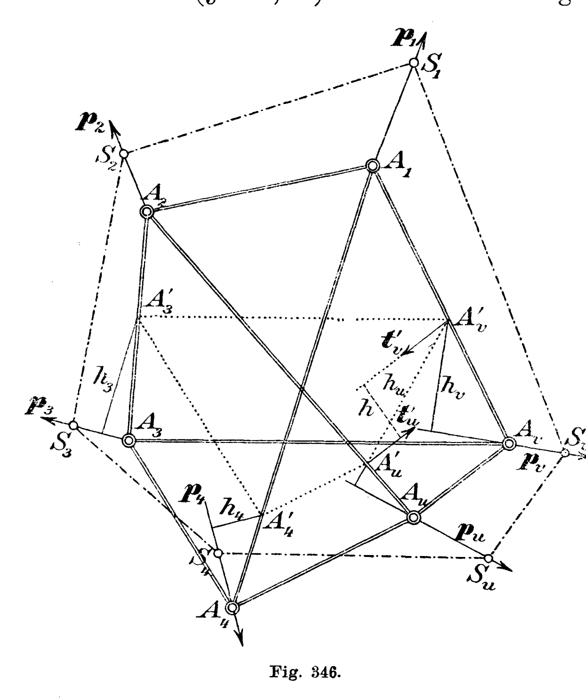


Fig. 346.

Die Angriffskräfte seien

$$(1)\qquad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_u,\ \mathfrak{p}_v,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_k$$

(Fig. 347), wobei $k = 6$ ist.[1]) Nach Lösung des Spannungsproblems soll in jedem Knotenpunkte von $\mathfrak{F}_k$ Gleichgewicht bestehen zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften. Denkt man nun alle diese Kräfte an die homologen Knotenpunkte von $\boldsymbol{\Phi}'$ verlegt, wodurch das System (1) in die Lage

$$(2)\qquad \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_u',\ \mathfrak{p}_v',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_k'$$

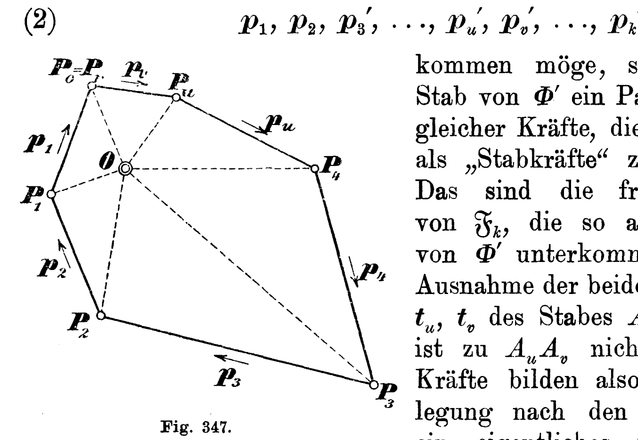


Fig. 347.

kommen möge, so fällt auf jeden Stab von $\boldsymbol{\Phi}'$ ein Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte, die wir diesem Stabe als „Stabkräfte" zuschreiben wollen. Das sind die früheren Stabkräfte von $\mathfrak{F}_k$, die so alle in den Stäben von $\boldsymbol{\Phi}'$ unterkommen, mit alleiniger Ausnahme der beiden gesuchten Kräfte $\mathfrak{t}_u$, $\mathfrak{t}_v$ des Stabes $A_u A_v$, denn $A_u' A_v'$ ist zu $A_u A_v$ nicht parallel. Diese Kräfte bilden also nach ihrer Verlegung nach den Punkten A_u', A_v' ein eigentliches Gegenpaar $\mathfrak{t}_u'$, $\mathfrak{t}_v'$, von dem wir von vornherein bereits die Angriffslinien u', v' an-

1) Das Seileck $S_1 S_2 S_3 S_4 S_u S_v$ verifiziert das Gleichgewicht dieser Kräfte.

geben können: es sind die Parallelen zu $A_u A_v$ durch A_u' und A_v'. Da nun die Stabkräfte von Φ' sich gegenseitig aufheben, so folgt:

Satz 2. Am Fachwerk Φ' stehen die Kräfte (2) nach Umkehrung ihrer Pfeile vereint mit dem Kräftepaar $\mathbf{t}_u'$, $\mathbf{t}_v'$ im Gleichgewicht.

3. Hierdurch sind die entgegengesetzt gleichen Kräfte $\mathbf{t}_u'$, $\mathbf{t}_v'$ bestimmt. Man findet sie leicht auf dem Wege der Rechnung, indem man das Gleichgewicht der vorstehend genannten Kräfte durch das Verschwinden ihrer Momentensumme für irgend einen Drehpunkt O ausdrückt. Der orientierte Hebelarm der Kraft $\mathbf{p}_\varkappa$ am Drehpunkt O sei $h_\varkappa'$, ihre absolute Größe $p_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$; die absolute Größe von $\mathbf{t}_u'$, $\mathbf{t}_v'$ sei t, der Abstand von u' und v' sei h. Dann ist nach dem Satze von der Momentensumme:

(3) $$h_1'p_1 + h_2'p_2 + \cdots + h_k'p_k = \pm\, ht,$$

wo rechts das positive oder negative Zeichen gilt, je nachdem die linke Seite positiv oder negativ ist; bis auf das Vorzeichen ist nämlich ht die Momentensumme von $\mathbf{t}_u'$, $\mathbf{t}_v'$, die, wie bei jedem Kräftepaare, von der Wahl des Drehpunktes unabhängig ist. Aus (3) kann man t berechnen.

4. Die kinematische[1]) Methode von Mohr und Müller-Breslau bedient sich zur Berechnung von t einer Formel, die eine einfache Folge der Formel (3) und des Umstandes ist, daß auch die Kräfte (1) im Gleichgewicht stehen, also am Drehpunkte O eine verschwindende Momentensumme haben. Ist $h_\varkappa''$ der orientierte Hebelarm von $\mathbf{p}_\varkappa$ am Drehpunkt O, so ist demnach:

(4) $$h_1''p_1 + h_2''p_2 + \cdots + h_k''p_k = 0;$$

indem man (4) von (3) abzieht und $h_\varkappa' - h_\varkappa'' = h_\varkappa$ setzt, folgt die erwähnte Formel:

(5) $$h_1 p_1 + h_2 p_2 + \cdots + h_k p_k = \pm\, ht.$$

Hiermit ist $h_\varkappa$ bis auf das Vorzeichen der Abstand der parallelen Kräfte $\mathbf{p}_\varkappa$, $\mathbf{p}_\varkappa'$, und zwar kann $h_\varkappa$ als der orientierte Hebelarm von $\mathbf{p}_\varkappa$ am Drehpunkt $A_\varkappa'$ aufgefaßt werden; das Vorzeichen rechts in (5) ist immer noch so zu wählen, daß es mit dem der ganzen Summe links übereinstimmt. Bei positivem Zeichen bestimmt

1) Die Methode wird kinematisch genannt, weil die Geschwindigkeitspläne, auf denen sie beruht, der Bewegungslehre oder Kinematik entnommen sind.

das unbekannte Kräftepaar t_u', t_v' positive Drehung, bei negativem aber negative.

Im ganzen wird Formel (5) vor (3) kaum einen Vorteil bieten. Jedenfalls aber können wir hiernach t berechnen. Bei der Figur 346 lautet z. B. die zur Berechnung dienende Gleichung:

$$h_3 p_3 + h_4 p_4 + h_u p_u + h_v p_v = \pm\, h t.$$

Damit ist die Aufgabe der direkten Bestimmung einer beliebigen Stabkraft eines stabilen, einfachen Fachwerks gelöst.

5. Wir sehen hieraus, daß das stabile, einfache Fachwerk zu jedem Angriffssystem eine einzige Lösung des Spannungsproblems gibt:

Satz 3. Das stabile, einfache Fachwerk ist statisch bebestimmt.

Da umgekehrt das statisch bestimmte Fachwerk auch stabil ist und gerade so viel Stäbe hat wie ein einfaches Fachwerk mit gleicher Knotenzahl, so folgt:

Satz 4. Das statisch bestimmte Fachwerk ist stabil und einfach.

In diesen beiden Sätzen gipfelt die ganze Theorie des Fachwerks. Jetzt können wir von den verschiedenen Arten der Fachwerke folgende

Übersicht

geben:

A. Stabile Fachwerke.

1. Statisch bestimmte: $s = 2k - 3$. Diese Fachwerke werden durch Wegnahme jedes einzelnen Stabes instabil (d. h. sie sind einfach).
2. Statisch unbestimmte: $s = 2k - 3 + p$. Sie haben p überzählige Stäbe, die unbeschadet der Stabilität beseitigt werden können.

B. Instabile Fachwerke.

1. Infinitesimal bewegliche im „Grenzfall“: $s = 2k - 3$. Das Fachwerk ist singulär, d. h. es gibt gleich gegliederte Fachwerke mit anderen Stabrichtungen, die stabil sind.
2. Infinitesimal bewegliche mit $s = 2k - 3 + p$ Stäben.
3. Endlich bewegliche ohne infinitesimale Beweglichkeit (z. B. der Inversor, Bd. II, Fig. 32 und 33).
4. Endlich und infinitesimal bewegliche.

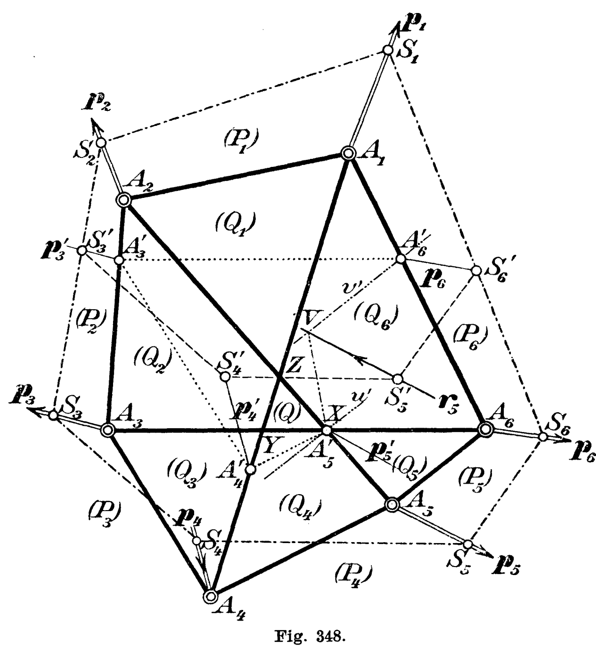
Die instabilen werden uns weiter nicht mehr beschäftigen. Die statisch bestimmten werden durch Einziehung neuer Stäbe statisch unbestimmt. Man versteht jetzt auch, warum wir ein Fachwerk

stets von den Auflagern ablösen und die Wirkung der Auflager durch Auflagerreaktionen zu ersetzen suchen: wo das nicht möglich ist, wird die Lösung des Spannungsproblems statisch unbestimmt. Wenn man z. B. den Polonceau-Träger der Figur 323 an beiden Enden vollkommen starr an die Unterlage befestigte, würde diese unter anderem wirken wie ein Verbindungsstab u dieser Endknotenpunkte; mit diesem Stabe ist aber das Fachwerk statisch unbestimmt, gestattet also unendlich viele Lösungen des Spannungsproblems, wobei die Stabkräfte von u willkürlich vorgeschrieben werden können.

6. Der Satz 2. ist auch die Grundlage der **Kräftepaarmethode von Schur.** Nimmt man zum Kräftepaar t_u', t_v' noch eine der umgekehrten Angriffskräfte, so halten diese drei Kräfte den übrigen Angriffskräften das Gleichgewicht, d. h. die Resultante r der übrigen Angriffskräfte ergibt jene drei Kräfte als Komponenten, wenn man r nach den drei Angriffslinien dieser Kräfte zerlegt, die natürlich so gewählt sein müssen, daß sie nicht durch denselben (unendlich fernen) Punkt gehen. Das hieraus entspringende Konstruktionsverfahren wird durch die Figuren 348 und 349 hinreichend erklärt. Figur 348 ist das auch in Figur 346 dargestellte Fachwerk; Φ' hat die Ecken

$A_1 A_2 A_3' A_4' A_5' A_6'$,

von denen A_5' in den Schnittpunkt von $A_2 A_5$ und $A_3 A_6$ verlegt ist, was man aber auch unterlassen kann; der zu untersuchende Stab sei $A_5 A_6$, also $u = 5$, $v = 6$. Durch A_5', A_6' werden die Parallelen u', v' zu $A_5 A_6$ gelegt, und p_5' ist parallel zu p_5. Wir zerlegen nach § 90, 7. die Resultante r_5 der Angriffskräfte p_6, p_1, p_2, p_3, p_4 nach den drei Geraden u', v', p_5'. In Figur 349 sind die Angriffskräfte so


Fig. 348.

eingetragen, daß p_ν durch $P_\nu P_{\nu-1}$ dargestellt wird; O ist der Pol des in Figur 348 eingetragenen Seilecks $S_1 S_2 \ldots S_6$, das zur Verifizierung des Gleichgewichts der Angriffskräfte dient. In Figur 349 findet man $r_5 = P_4 P_5$. Um diese Kraft nun nach u', v', p_5' (Fig. 348) zu zerlegen, konstruieren wir die Angriffslinie dieser Kraft mittels eines Seilecks $S_6' S_1 S_2 S_3' S_4'$ zum Pol O, dessen äußere Seiten $S_4' S_5' \| S_4 S_5$ und $S_6' S_5' \| S_6 S_5$ sich in einem Punkte S_5' von r_5 treffen. Die Parallele durch S_5' ist also die gesuchte Angriffslinie von r_5. Sie treffe v' in V. Dann muß die Resultante ϱ der beiden Komponenten von r_5 nach den Richtungen u' und p_5' auf $A_5' V$ liegen, und zusammen mit der dritten der gesuchten Komponenten, die auf v' liegt, wieder r_5 ergeben. Zieht man also (Fig. 349) durch P_4 und P_5 die Parallelen zu $A_5' V$ und u' (oder $A_5 A_6$), die sich in Q_5 schneiden mögen, und macht $P_4 R = P_5 Q_5$, so ist $P_4 R = t_u'$, $R Q_5 = -p_5'$ und $P_4 Q_5 = \varrho$, also $Q_5 P_5 = t_v'$, da $\varrho + Q_5 P_5 = P_4 P_5 = r_5$ ist. Die Strecken $P_4 R$ und $R Q_5$, die nur zur Erklärung der Konstruktion dienten, können bei der praktischen Ausführung weggelassen werden: $P_5 Q_5$ ist gleich $P_4 R = t_u'$, und damit ist die Kraft des Stabes $A_5 A_6$ am Punkte A_5 bestimmt. Die anderen findet man jetzt mühelos.

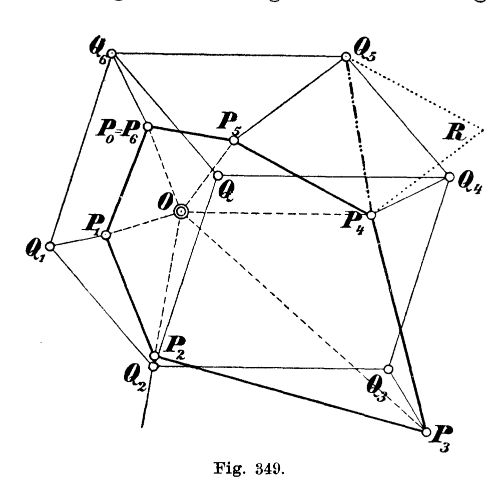


Fig. 349.

7. Da die Stäbe des Fachwerks sich schneiden, so ist die unmittelbare Anwendung des Kräfteplanverfahrens ausgeschlossen. Wir müssen daher das Krafteckverfahren anwenden, tun dies aber mit der Modifikation, daß wir die den sechs Knotenpunkten entsprechenden Kraftecke an das Krafteck $P_0 \ldots P_6$ der Angriffskräfte lagern. Zum Knotenpunkt A_5, der durch Konstruktion der Stabkraft $P_5 Q_5$ von $A_5 A_6$ aufgeschlossen ist, gehört so das Krafteck $P_4 P_5 Q_5 Q_4$. Ebenso gehört das Krafteck $Q_5 P_5 P_6 Q_6$ zu A_6; $Q_6 P_6 P_1 Q_1$ zu A_1; $Q_1 P_1 P_2 Q_2$ zu A_2; $Q_2 P_2 P_3 Q_3$ zu A_3; $Q_3 P_3 P_4 Q_4$ zu A_4; $Q_4 P_4 P_5 Q_5$ zu A_5.

8. Damit ist denn doch eine Art von Kräfteplan erzielt, nur kommen die Kräfte der Diagonalen des Sechsecks $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ je zweimal darin vor. Macht man noch $Q_2 Q = Q_1 Q_6$ (Fig. 349), so tritt jede Diagonalkraft sogar dreimal in Figur 349 auf: die Kraft der Diagonale

A_1A_4 am Knoten A_1 ist $\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_6 = \mathfrak{Q}_2\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_4$,
A_2A_5 „ „ A_2 „ $\mathfrak{Q}_2\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_6 = \mathfrak{Q}_4\mathfrak{Q}_5$,
A_3A_6 „ „ A_3 „ $\mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{Q}_4\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_5\mathfrak{Q}_6$.

Versucht man, den Eckpunkten des Kräfteplans in der Figur 348 je eine Vieleckfläche zuzuordnen, so wie es bei den anderen Kräfteplänen war, so gelangt man zu der durch eingeklammerte Buchstaben in Figur 348 bezeichneten Anlage, bei der sofort auffällt, daß die Schnittpunkte X, Y, Z der drei Diagonalen wie wirkliche Knotenpunkte behandelt sind. Wären es Knotenpunkte, so müßte z. B. dem Stabe XY in X die Kraft $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_4$ und in Y die Kraft $\mathfrak{Q}_4\mathfrak{Q}$ zukommen, was auch die Kräfte von A_3A_6 selber sind; jede Diagonale würde also in drei Stäbe zerfallen, die bis auf das Vorzeichen gleiche Kräfte hätten. So lesen wir es aus dem Kräfteplane ab. Das läßt sich aber vorhersehen. Zunächst gilt nämlich der

Satz 5. Wenn man den Schnittpunkt zweier Stäbe eines stabilen, einfachen Fachwerks $\mathfrak{F}_k$ von k Knotenpunkten als unbelasteten Knotenpunkt einführt, so erhält man ein stabiles, einfaches Fachwerk $\mathfrak{F}_{k+1}$.

Der Vermehrung der Knotenzahl um 1 entspricht ein Zuwachs an zwei Stäben, wie es nach der Formel $s = 2k - 3$ sein muß. Wäre $\mathfrak{F}_{k+1}$ instabil, so würden in jedem Geschwindigkeitsplane Φ, in dem diese Instabilität zum Ausdruck käme, die zwei Teilstäbe, in die jeder der beiden in Rede stehenden Stäbe von $\mathfrak{F}_k$ zerfallen ist, auf einer Geraden liegen, da der Geschwindigkeitsplan zum Fachwerk isoklin ist. Das wäre dann aber auch ein Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber, der die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen würde. Aus diesem Widerspruch folgt, daß $\mathfrak{F}_{k+1}$ stabil ist, und aus der Stäbezahl von $\mathfrak{F}_{k+1}$ folgt dann die Einfachheit.

Führt man nun X, Y, Z in Figur 348 als neue Knotenpunkte ein, so ist das so modifizierte Fachwerk F_9 immer noch stabil und einfach. Nach § 96, 8. d sind aber in jedem der Knoten X, Y, Z die vier Stabkräfte entgegengesetzt gleich. Dieser Forderung wird entsprochen durch die Annahme, daß auf jedem Teilstabe einer Diagonale des $\mathfrak{F}_6$ die Stabkräfte nach Größe und Richtung mit denen der Diagonale selbst übereinstimmen. Da nun durch diese Annahme offenbar den Forderungen des Spannungsproblems an $\mathfrak{F}_9$ genügt wird, und F_9 als statisch bestimmtes Fachwerk nur eine Lösung dieses Problems zuläßt, so ist dies die einzig mögliche.

Es zeigt sich also, daß durch Einführung des Schnittpunktes von zwei Stäben als neuer Knotenpunkt — er wird ein idealer Knoten genannt — in diesen Stäben nur eine Wiederholung der

schon vorhandenen Stabkräfte bewirkt wird, so daß man also durch Lösung des Spannungsproblems des neuen Fachwerks bei derselben Belastung zugleich auch die Lösung zum ursprünglichen Fachwerk erhält. Schur hat gezeigt[1]), daß man durch Einführung passender idealer Knotenpunkte stets die Konstruktion eines Kräfteplans ermöglichen kann. Doch sind diese Betrachtungen nicht mehr elementar.

Nunmehr ist die Figur 349 vollkommen durchsichtig: sie ist der Kräfteplan des $\mathfrak{F}_9$.

9. Indem wir die Schursche Kräftepaarmethode auf die Zerlegung einer Kraft $\boldsymbol{r}_5$ nach ihren Komponenten auf drei nicht durch einen Punkt gehenden Geraden hinausspielen — Schur selbst geht ein wenig anders vor[2]) —, lassen wir ihre enge Verwandtschaft mit einer anderen, ebenfalls von Schur angebenen Lösung des Spannungsproblems hervortreten, die auf dieselbe Elementaraufgabe hinausläuft.

Ein stabiles, einfaches Fachwerk ohne Zweistabknoten hat mindestens sechs Dreistabknoten (§ 99, 10.). Die **Methode des Dreistabknotens** geht darauf aus, die Stabkräfte an einem Dreistabknoten zu konstruieren.

Satz 6. Durch Wegnahme eines Dreistabknotens O mit seinen drei Stäben OA, OB, OC wird ein stabiles, einfaches Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ in der Weise instabil, daß bei Festhaltung eines der noch vorhandenen Stäbe eine einzige Schar von Geschwindigkeitsplänen möglich ist.

Denn verbindet man die Beseitigung des einen Stabes OA nach § 103, Satz 3 mit der Einziehung eines nicht durch O gehenden Stabes XY, der die Stabilität und Einfachheit aufrecht erhält, so können OB und OC unbeschadet der Stabilität und Einfachheit beseitigt werden (Satz 1). Nimmt man dann auch XY wieder fort, so ist nach § 103, Satz 2 eine einzige Schar von Geschwindigkeitsplänen möglich, die einen Stab gemeinsam haben.

Sei also $\boldsymbol{\Phi}'_{k-1}$ ein Geschwindigkeitsplan des aus $\mathfrak{F}_k$ durch Wegnahme von OA, OB, OC entstehenden Fachwerks $\boldsymbol{\Phi}_{k-1}$, der mit $\boldsymbol{\Phi}_{k-1}$ den Stab MN gemein habe. Denkt man nun das Spannungsproblem für $\mathfrak{F}_k$ bei irgend einem Angriffssystem gelöst und diese Angriffskräfte und die Stabkräfte (parallel zu sich) nach den entsprechenden Knoten und Stäben von $\boldsymbol{\Phi}'_{k-1}$ verlegt, wobei zu beachten ist, daß jeder Stab von $\boldsymbol{\Phi}'_{k-1}$ dem entsprechenden Stabe von $\boldsymbol{\Phi}_{k-1}$ und von $\mathfrak{F}_k$ selber parallel ist, so wird in jedem Knotenpunkte von $\boldsymbol{\Phi}'_{k-1}$, abgesehen von den zu A, B, C homologen Knoten A', B', C', Gleich-

1) l. c. § 4 ff.
2) l. c. Seite 162 ff.

gewicht bestehen zwischen den umgekehrten Angriffskräften und den Stabkräften, und die Stabkräfte in jedem Stabe werden entgegengesetzt gleich sein.

Um auch noch in A', B', C' Gleichgewicht herzustellen, muß man ersichtlich die Kräfte t_A, t_B, t_C, die beim Fachwerk $\mathfrak{F}_k$ an A, B, C in den Stäben AO, BO, CO wirken, auch in A', B', C' als „Ersatzkräfte“ (für die fortgenommenen Stäbe AO, BO, CO) anbringen; diese liegen also auf den drei Parallelen a', b', c' durch A', B', C' zu AO, BO, CO, die sich nicht in einem Punkte O' treffen können, weil man sonst einen Geschwindigkeitsplan von $\mathfrak{F}_k$ selber hätte, der die Instabilität von $\mathfrak{F}_k$ beweisen würde.

Wir haben jetzt also an den $k-1$ Knotenpunkten von Φ'_{k-1} erstens die umgekehrten Angriffskräfte der entsprechenden Knoten von $\mathfrak{F}_k$, zweitens an A', B', C' außerdem noch die drei unbekannten Ersatzkräfte auf a', b', c', und drittens die Stabkräfte. Nun herrscht einerseits an jedem Knoten Gleichgewicht, also steht auch das ganze System dieser drei Arten von Kräften im Gleichgewicht; andererseits heben die Stabkräfte einander paarweise auf. Daraus folgt: Die Ersatzkräfte und die umgekehrten Angriffskräfte an Φ'_{k-1} befinden sich im Gleichgewicht, d. h.:

Satz 7. Die drei Ersatzkräfte sind die Komponenten der Resultante der Angriffkräfte an Φ'_{k-1} auf den Geraden a', b', c'.

Hiernach können sie, wie in Figur 288, S. 519, konstruiert werden.

§ 105. Andere Lösungsmethoden.

1. Die kinematischen Methoden, mit denen wir die vollständige Lösung des Spannungsproblems an stabilen, einfachen Fachwerken erzielt haben, beruhen auf den Geschwindigkeitsplänen, die der nach Wegnahme eines Stabes möglichen Bewegung des Fachwerks entsprechen. Die Geschwindigkeitspläne sind zu dem so modifizierten Fachwerk isoklin, ohne ihm ähnlich zu sein, und kommen nur wegen dieser Eigenschaft in Betracht. Umgekehrt ist jedes zu einem Fachwerk isokline Fachwerk ein Geschwindigkeitsplan einer möglichen Bewegung. Es kommt also bei den Methoden des § 104 alles darauf an, zu dem gegebenen Fachwerk nach Wegnahme eines Stabes isokline Fachwerke zu finden. Das gelingt häufig ohne Mühe, besonders, wenn man einen Stab festhält, an dessen Knotenpunkten zahlreiche andere Stäbe befestigt sind. Wir wollen das noch an einigen Beispielen erläutern.

Vom Fachwerk Figur 350 wird man am besten wohl einen durch 2 gehenden Stab festhalten, weil dieser Knoten vier Stäbe hat. Wir fixieren 12, beseitigen 56 und nehmen den Geschwindigkeitspol 3′ von 3 auf 32 willkürlich an. Dadurch ist dann alles weitere eindeutig bestimmt. Der Geschwindigkeitsplan ist 123′4′5′6′7′. Die Stabkraft von 56 kann also nach dem Verfahren von Schur konstruiert werden. Darauf ist einfach das Krafteckverfahren anwendbar.

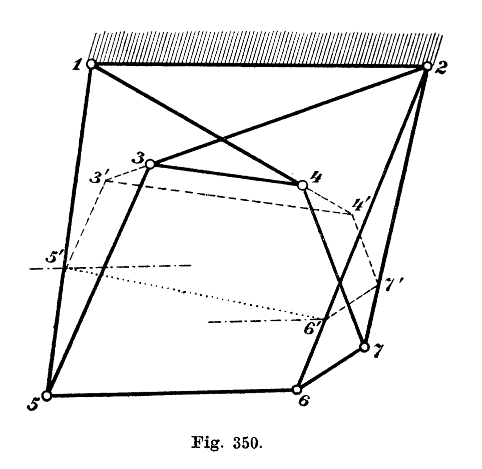


Fig. 350.

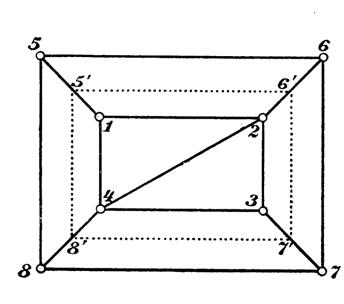


Fig. 351.

2. Das Fachwerk 12345678 in Figur 351 erweist sich durch den eingezeichneten Geschwindigkeitsplan 12345′6′7′8′ als instabil, weil dieser zu dem Fachwerk isoklin, aber nicht ähnlich ist.

Vom Fachwerk Figur 352 halten wir nur den Knotenpunkt A fest und beseitigen den Stab BO_5. Da die durch A gehenden Stäbe, wenn sie sich überhaupt bewegen, nur eine Drehung um A ausführen können, so müssen die Geschwindigkeitspole ihrer Endpunkte auf den Stäben liegen. Wir nehmen also U_1' auf AU_1 und U_2' auf AU_2 willkürlich als Geschwindigkeitspole von U_1, U_2 an und ziehen durch dieselben zu BU_1 und BU_2 die Parallelen, die sich in B' treffen mögen. Dann bestimmen die Parallelen durch A und B' zu AU_3 und BU_3 den Punkt U_3', zu AU_4 und BU_4 den Punkt U_4', zu AU_5 und BU_5 den Punkt U_5'. Darauf zieht man durch die Punkte U_1', ..., U_5' die Parallelen zu den Vertikalstäben und bestimmt auf diesen von A ausgehend die Punkte O_1', ..., O_5'. Man könnte offenbar U_1' mit U_1 zusammenfallen lassen, was einer Fixierung des Stabes AU_1 entsprechen würde. Dann würde aber der Geschwindigkeitsplan zu sehr in die Figur des Fachwerks hineingeraten.

Hat man die Stabkräfte von BO_5 nach dem Verfahren von

Schur konstruiert, so findet man zu den Knotenpunkten die Kraftecke in der Reihenfolge $O_5, U_5, O_4, U_4, O_3, U_3, O_2, U_2, O_1, U_1, A, B$.

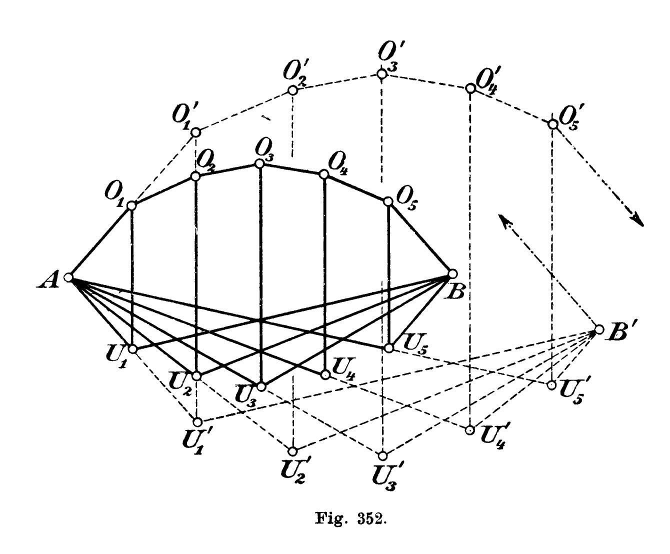


Fig. 352.

3. Nicht immer gelingt der Geschwindigkeitsplan so leicht. Deshalb ist es gut, sich auch mit anderen Methoden vertraut zu machen. **Die Methode des falschen Ansatzes von Saviotti** hat das Angenehme, daß alle auf die Lösung zu verwendende Vorarbeit dazu dient, die ungefähre Form des Kräfteplans festzustellen. Das Verfahren möge an dem Fachwerk Figur 353 erklärt werden, zu dem übrigens leicht ein Geschwindigkeitsplan zu finden wäre.

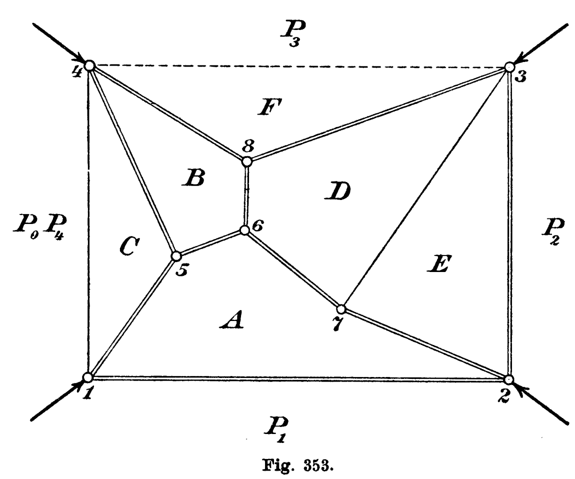


Fig. 353.

Das Angriffssystem besteht aus den vier an 1, 2, 3, 4 wirkenden Kräften P_1P_0, P_2P_1, P_3P_2, P_0P_3, die zur Anlage eines Kräfteplanes mit umgekehrter Richtung aneinander gesetzt werden: $\boldsymbol{P_0P_1P_2P_3}$ (Fig. 354). Von dem zum Knoten 2 gehörigen Krafteck $\boldsymbol{AP_1P_2E}$ weiß man zunächst nur, daß seine Ecke $\boldsymbol{A}$ auf der Parallele a durch $\boldsymbol{P_1}$ zu

AP_1 liegt. Die Methode des falschen Ansatzes besteht nun darin, daß man vorläufig einmal $\boldsymbol{A}$ auf a in irgend einer Lage $\boldsymbol{A}'$ annimmt und zusieht, wie weit man bei der Konstruktion des Kräfteplans mit dieser Annahme widerspruchslos durchkommt. Die Ecken dieses voraussichtlich falschen Kräfteplans unterscheiden wir von den

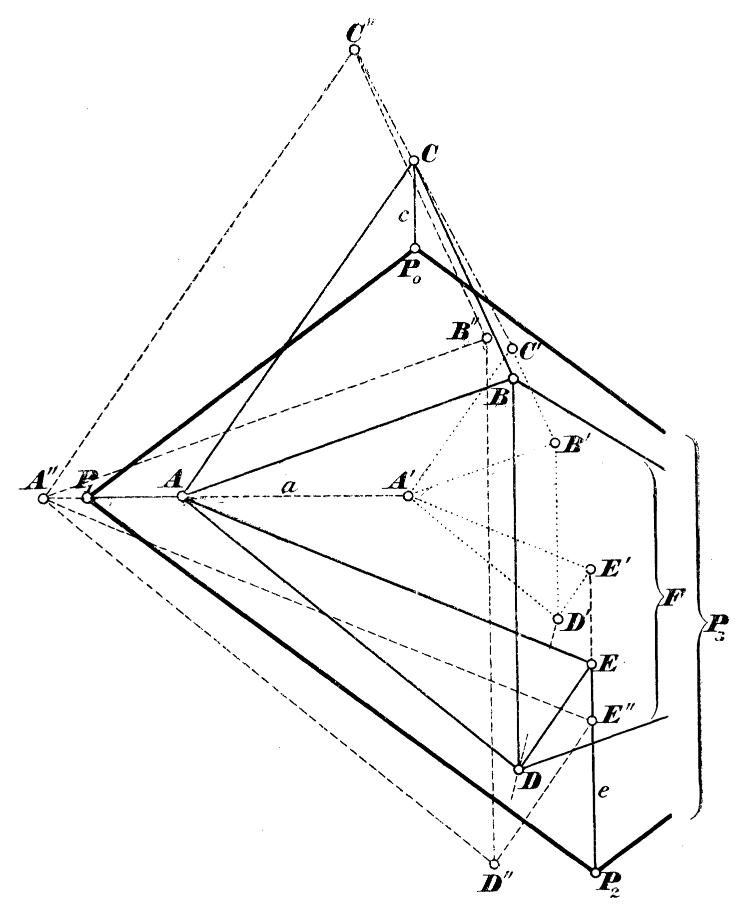


Fig. 354.

gesuchten richtigen durch einen Akzent. Wir konstruieren also zum Knoten 2 das Krafteck $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{E}'$, zum Knoten 7 ebenso $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{E}'\boldsymbol{D}'$, zu 6 ebenso $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{D}'\boldsymbol{B}'$, zu 5 ebenso $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'\boldsymbol{C}'$. Dem Knoten 1 müßte jetzt ein Krafteck $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{C}'\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1$ entsprechen, d. h. der Punkt $\boldsymbol{C}'$ des Kräfteplans müßte auf der durch $\boldsymbol{P}_0$ zu CP_0 gezogenen Parallelen $\boldsymbol{c}$ liegen, was in unserer Figur nicht zutrifft. Hier ist also der erste Widerspruch aus der falschen Annahme von $\boldsymbol{A}$ auf a.

4. Jetzt macht man einen zweiten Versuch, indem man $\boldsymbol{A}$ auf a die Lage $\boldsymbol{A}''$ einnehmen läßt und, wie beim ersten Versuch, die Kraftecke $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{E}''$, $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{E}''\boldsymbol{D}''$, $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{D}''\boldsymbol{B}''$, $\boldsymbol{A}''\boldsymbol{B}''\boldsymbol{C}''$ zu 2, 7, 6, 5 konstruiert. Auch $\boldsymbol{C}''$ hat nicht die richtige Lage $\boldsymbol{C}$ auf c. Wenn man nun die Strecken $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}''$, $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}''$, $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}''$, $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}''$, $\boldsymbol{E}'\boldsymbol{E}''$ durch die Punkte $\boldsymbol{A}'''$, $\boldsymbol{B}'''$, $\boldsymbol{C}'''$, $\boldsymbol{D}'''$, $\boldsymbol{E}'''$ (nicht in der Figur) in demselben übrigens beliebigen Verhältnisse teilte, so erhielte man offenbar durch Verbindung dieser Teilpunkte einen der Annahme von $\boldsymbol{A}$ in der Lage $\boldsymbol{A}'''$ (auf a) entsprechenden (falschen) Kräfteplan, denn es wäre z. B. die Strecke $\boldsymbol{B}'''\boldsymbol{D}'''$ in dem Trapez $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}''\boldsymbol{B}''$ zu $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}'$ parallel u. s. w. Daraus folgt, daß, wenn $\boldsymbol{A}'''$ die Gerade a durchläuft, die Punkte $\boldsymbol{B}'''$, $\boldsymbol{C}'''$, $\boldsymbol{D}'''$, $\boldsymbol{E}'''$ auf $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}''$, $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}''$, $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}''$, $\boldsymbol{E}'\boldsymbol{E}''$ wandern. Nimmt man also $\boldsymbol{C}'''$ im Schnittpunkte $\boldsymbol{C}$ von $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}''$ mit c an, so trifft die Parallele durch $\boldsymbol{C}$ zu $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}'$ die Gerade a im richtigen Punkte $\boldsymbol{A}$. Darauf findet man $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ entweder durch abermalige Konstruktion des Kräfteplans, oder indem man die Parallele durch $\boldsymbol{A}$ zu $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$ mit $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{B}''$ in $\boldsymbol{B}$, die Parallele durch $\boldsymbol{B}$ zu $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{D}'$ mit $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}''$ in $\boldsymbol{D}$ und die Parallele durch $\boldsymbol{D}$ zu $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{E}'$ mit $\boldsymbol{E}'\boldsymbol{E}''$ in $\boldsymbol{E}$ zum Schnitt bringt.

5. Nachdem so zu den Knoten 2, 7, 6, 5, 1 die richtigen Punkte des Kräfteplans gefunden sind, liefert das Krafteck $\boldsymbol{BDF}$ zum Knoten 8 noch den letzten fehlenden Punkt $\boldsymbol{F}$ des Kräfteplans. In unserer Figur ist $\boldsymbol{F}$ zufällig mit $\boldsymbol{P}_3$ identisch, so daß sich der Stab 34, dem in 3 und 4 die Kräfte $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_3$ zukommen, als kraftlos erweist. In Figur 353 sind die auf Druck beanspruchten Stäbe doppelt ausgezogen.

Das Wesen der Saviottischen Methode besteht nach diesem Beispiele darin, daß man nach versuchsweiser Annahme einer Stabkraft die Konstruktion der den einzelnen Knoten entsprechenden Kraftecke — die übrigens nicht notwendig zu einem Kräfteplan vereinigt werden müssen — so lange fortsetzt, bis man auf den ersten Widerspruch stößt; darauf ändert man die falsche Annahme ab und wiederholt den Versuch genau wie vorhin, bis man auf denselben Widerspruch stößt. Dieser mag das erste Mal darin bestanden haben, daß ein Punkt $\boldsymbol{X}'$ nicht auf einer Geraden x lag; im allgemeinen wird auch beim zweiten Versuch der entsprechende Punkt $\boldsymbol{X}''$ nicht auf x liegen. Dann ist der Schnittpunkt $\boldsymbol{X}$ von $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}''$ mit x der richtige Punkt des Kräfteplans, von dem ausgehend man die übrigen Punkte konstruieren kann. Kurz, die beiden falschen (unvollendeten) Kräftepläne Ω', Ω'' bestimmen eine Schar (Ω', Ω'') im Sinne des § 103, 2., der auch der richtige Ω angehört.

Ein gutes Übungsbeispiel ist auch das Sechseck Figur 348.

7. Unter Vermeidung von Geschwindigkeitsplänen geht **die Methode der Stabvertauschung von Henneberg** darauf aus, das gegebene stabile

und statisch bestimmte Fachwerk F durch Wegnahme von Stäben $x, y, z, \ldots$ und Einführung ebensovieler „Ersatzstäbe“ $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ in ein stabiles, einfaches Fachwerk Φ zu verwandeln, an dem das Spannungsproblem leicht lösbar ist. Es fragt sich dann nur, wie daraus die Spannungen von F selber bestimmt werden können. Wir setzen vorläufig voraus, daß das so „abgeleitete“ Fachwerk Φ dieselben Knoten hat wie F. Es ist dann kein Knoten von F durch Wegnahme der Stäbe völlig beseitigt worden; man hat also an jedem Knoten von F noch mindestens zwei Stäbe gelassen. Ferner verbinden die Ersatzstäbe von Φ nur schon an F vorhandene Knoten.

Da nun F und Φ die Knoten gemeinsam haben, so ist ein Angriffssystem (P) von F auch an Φ im Gleichgewicht. Es sei nun das Spannungsproblem zu (P) am Fachwerk Φ gelöst und habe für den Stab u an seinem (beliebig definierten) „Anfangspunkte“ die Kraft τ_u ergeben; in den Strecken $x, y, z, \ldots$ von Φ, die ja keine Stäbe von Φ mehr sind, fehlen natürlich auch die Stabkräfte.

Wir bringen nun an Φ in den beiden Knotenpunkten des herausgenommenen Stabes x auf der Geraden x ein Paar entgegengesetzt gleicher Kräfte $(+k_x, -k_x)$ an und lösen das Spannungsproblem zu diesem aus $(+k_x, -k_x)$ bestehenden Angriffssysteme. Die Stabkraft des Stabes u in seinem Anfangspunkte sei τ_u'.

Ebenso lassen wir darauf an Φ in den Endpunkten des herausgenommenen Stabes y ein Kräftepaar $(+k_y, -k_y)$ wirken und lösen das diesem einfachen Angriffssystem entsprechende Spannungsproblem; es möge für den Stab u in seinem Anfangspunkte die Kraft τ_u'' ergeben. Ähnlich sei τ_u''' die Kraft des Stabes u in seinem Anfangspunkte, die bei der Belastung des Fachwerks Φ mit einem Kräftepaar $(+k_z, -k_z)$ an den Endpunkten der Strecke z auf der Geraden z eintritt, u. s. w.

8. Nach dem Superpositionsgesetz entspricht dann dem Angriffssystem

$$(1)\qquad (\Pi) = (P) + \alpha(+k_x, -k_x) + \beta(+k_y, -k_y) + \gamma(+k_z, -k_z) + \cdots$$

des Fachwerks Φ im Stabe u an seinem Anfangspunkte die Stabkraft:

$$(2)\qquad t_u = \tau_u + \alpha\tau_u' + \beta\tau_u'' + \gamma\tau_u''' + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebige reelle Zahlen bedeuten. Diese suchen wir nun so zu bestimmen, daß die Ersatzstäbe $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ von Φ kraftlos werden. Das gibt für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Bedingungsgleichungen:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
0 &= \tau_\xi + \alpha\tau_\xi' + \beta\tau_\xi'' + \gamma\tau_\xi''' + \cdots, \\
0 &= \tau_\eta + \alpha\tau_\eta' + \beta\tau_\eta'' + \gamma\tau_\eta''' + \cdots, \\
0 &= \tau_\zeta + \alpha\tau_\zeta' + \beta\tau_\zeta'' + \gamma\tau_\zeta''' + \cdots, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

deren Anzahl mit der der Unbekannten übereinstimmt. Hat man $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aus diesen Gleichungen berechnet und in den Formeln (1), (2) eingesetzt, so hat man ein Angriffssystem (1) an Φ, das die Ersatzstäbe spannungslos läßt. Wir denken uns nun die Kräfte (1) und die ihnen entsprechenden Stabkräfte an die entsprechenden Knoten von F verlegt und betrachten die Paare $\alpha(+k_x, -k_x)$, $\beta(+k_y, -k_y)$, $\gamma(+k_z, -k_z)$, $\ldots$, die auf die Stäbe $x, y, z, \ldots$ fallen, als Stabkräfte dieser Stäbe, wo zu beachten ist, daß wir die Vorzeichen umgekehrt haben. Jetzt herrscht in jedem Knotenpunkte von F Gleichgewicht zwischen den Stabkräften und den umgekehrten Angriffskräften, d. h. wir haben am Fachwerk F das Spannungsproblem zu dem Angriffssystem (P) gelöst. Im Stabe u von F wirkt demnach am Anfangspunkte die Kraft t_u, die sich aus (2) mittels der aus (3) fließenden Werte von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ berechnet; das gilt für alle Stäbe von F, die bei der Herleitung von Φ nicht herausgenommen werden. In diesen dagegen, also in $x, y, z, \ldots$, hat man die Kräftepaare $\alpha(+k_x, -k_x)$, $\beta(+k_y, -k_y)$, $\gamma(+k_z, -k_z)$, $\ldots$.

9. Um zunächst den Schematismus der Lösung durch ein Beispiel zu belegen, nehmen wir das von Müller-Breslau[1]) und von Henneberg[2]) behandelte stabile und einfache Fachwerk Figur 355 mit 11 Knotenpunkten. Wie man sieht, ist kein zweistabiger Knotenpunkt vorhanden, und die Lösung des Spannungsproblems ist ohne Vorbereitung nicht möglich; die Schnittmethode versagt. Ließe sich aber beweisen, daß das Fachwerk durch Wegnahme der Stäbe $x = OA$ und $y = BD$ und ersatzweise Einführung der Stäbe $\xi = AB$ und $\eta = BH$ die Stabilität und Einfachheit nicht einbüßt, so wäre an dem so modifizierten Fachwerk Φ die Lösung leicht. Denn nun ist O ein zweistabiger Knoten, zu dem das Krafteck sofort hingezeichnet werden kann; damit sind die Stäbe 1 und 2 erledigt. Jetzt sind am Knoten C nur zwei unbekannte Kräfte, nämlich die der Stäbe 3 und 4; diese können also ebenfalls konstruiert werden. Damit ist der Knoten E aufgeschlossen, womit die Stäbe 5 und 6 erledigt sind. Dann kommt D mit den Stäben 7 und 8 an die Reihe, G mit 9

1) Müller-Breslau, Graphische Statik der Baukonstruktionen, 1887, S. 212.

2) Henneberg, Über die Bildungsgesetze der Fachwerke und deren Verwendung bei der Bestimmung der Spannungen, Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Jahrg. 1903, Heft 6.

und 10, F mit 11 und 12, J mit 13 und 14, H mit 15 (und η), A mit 16 (und ξ), K mit 17. Da also das Spannungsproblem an Φ für jedes Angriffssystem eindeutig lösbar ist, so ist Φ statisch bestimmt, also stabil und einfach. Ist nun an F ein Angriffssystem (P) gegeben, so hat man nach Henneberg zuerst dieses System an Φ an-

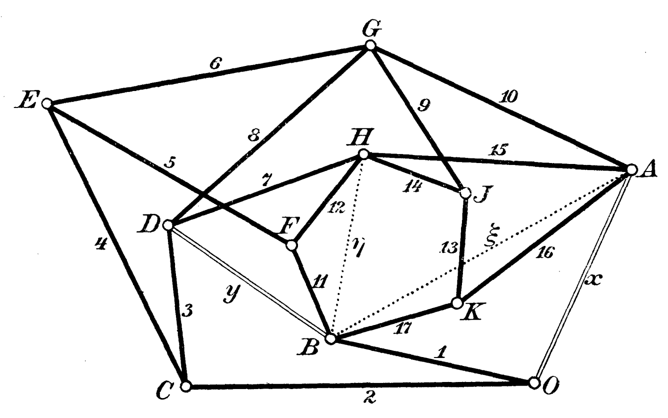


Fig. 355.

zubringen und die Spannungen für Φ zu bestimmen, was beim vorliegenden Fachwerk leicht mit der Kräfteplanmethode geschehen kann. In dem beliebigen Stabe u sei so in seinem (willkürlich definierten) „Anfangspunkte" die Stabkraft τ_u gefunden. Darauf bringen wir an Φ in den Endpunkten des herausgenommenen Stabes $x = AO$ ein auf x liegendes Kräftepaar $(+k_x, -k_x)$ an, $+k_x$ etwa an A, $-k_x$ an O, und lösen das Spannungsproblem zu $(+k_x, -k_x)$ als Angriffssystem. Die Stabkraft auf u sei im Anfangspunkte gleich τ_u'. Ebenso bringen wir an den Endpunkten des herausgenommenen Stabes $y = BD$ auf y ein Gegenpaar $(+k_y, -k_y)$ an, $+k_y$ an B, $-k_y$ an D, und lösen abermals das Spannungsproblem, das für u im Anfangspunkte die Kraft τ_u'' ergeben möge. Dann setzt man

$$t_u = \tau_u + \alpha\tau_u' + \beta\tau_u''$$

und sucht die Parameter α, β so zu bestimmen, daß die Ersatzstäbe ξ, η kraftlos bleiben. Das gibt:

$$0 = \tau_\xi + \alpha\tau_\xi' + \beta\tau_\xi'',$$
$$0 = \tau_\eta + \alpha\tau_\eta' + \beta\tau_\eta'',$$

wodurch α, β bestimmt sind Die mit diesen Werten gebildete Formel $t_u = \tau_u + \alpha\tau_u' + \beta\tau_u''$ gibt dann die Lösung des Spannungsproblems zu (P) am Fachwerk F für alle Stäbe, die F mit Φ gemein hat; in x dagegen hat man in O und A die Kräfte $+\alpha k_x$ und

$-\alpha k_x$, in y an D und B die Kräfte $+\beta k_y$ und $-\beta k_y$. Damit ist das Problem für F vollständig gelöst.

10. Es bleibt nur noch zu erklären, wie man in der zweckmäßigsten Weise die Ersatzstäbe eintauscht; es leuchtet zwar hinterher ein, daß unsere Wahl gut war, aber man sieht nicht, wie man darauf kommt. In manchen Fällen gelingt es, durch einen glücklichen Griff das Richtige zu treffen, wie das besonders Müller-Breslau durch freiere Verwendung des Grundgedankens der Hennebergschen Methode gezeigt hat. Henneberg selber legt mehr Wert auf methodisches Vorgehen und stützt sich auf die Tatsache, daß ein statisch bestimmtes Fachwerk stets zweistabige oder dreistabige Knotenpunkte hat.

Wenn, wie in unserem Beispiele, zweistabige Knoten fehlen, so nimmt man an einem Knoten O, von dem drei Stäbe OA, OB, OC ausgehen, einen Stab, etwa OA, hinweg und stellt durch Einfügung eines geeigneten Ersatzstabes die Stabilität und Einfachheit wieder her. Das ist nach dem Schurschen Satze § 103, 7. stets möglich.

Nach Henneberg kann dieser Ersatzstab unter den Strecken AB, BC, CA gewählt werden, die nicht sämtlich bereits Stäbe des Fachwerks sind. Nach Wegnahme von OA wird nämlich unser Fachwerk F instabil, gestattet also isokline und nicht ähnliche Geschwindigkeitspläne Φ'; in diesen kann sich das Dreieck ABC nicht durchweg als geometrisch starre Figur verhalten, weil sonst auch O durch OB und OC mit ABC starr verbunden wäre — abgesehen von den in Satz 3 § 103 genannten Ausnahmefällen — und an dieser Tatsache würde durch Einziehen von OA nichts geändert. Dann hätte man isokline, aber nicht ähnliche Geschwindigkeitspläne von F selber, wodurch die Instabilität von F bewiesen würde, im Widerspruch zu der Voraussetzung. Daher ist die Angabe Hennebergs mit den erwähnten Ausnahmen richtig.

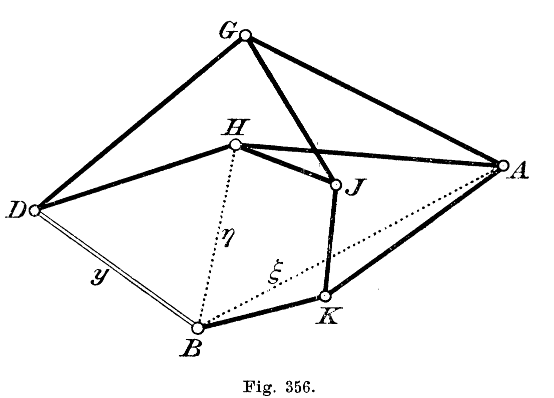


Fig. 356.

11. Welche von den Strecken AB, BC, CA sich zur Einfügung eines Ersatzstabes ξ eignet, läßt sich im allgemeinen nur auf Grund eines Geschwindigkeitsplanes beurteilen. Will man auf dieses Hilfsmittel verzichten, so muß man die Wahl auf gut Glück treffen; sollte der so gewählte Stab zufällig die Stabilität nicht herstellen, so würde

sich das, wie wir im nächsten Artikel sehen werden, hinterher herausstellen. Wir entscheiden uns in unserem Beispiel für den Ersatzstab AB. Durch die Entfernung von OA ist O ein Zweistabknoten geworden, den wir unbeschadet der Stabilität mit den Stäben OB und OC beseitigen könnten. Das wollen wir vorübergehend wirklich tun. Darauf können aus demselben Grunde CD und CE weggenommen werden, darauf EF, EG und FB, FH, so daß schließlich das Fachwerk Figur 356[1]) übrig bleibt, das sicher einfach und stabil ist, wenn durch die Vertauschung von x mit ξ die Stabilität nicht aufgehoben worden ist.

12. Das Fachwerk Figur 356 hat nun wiederum keinen Zweistabknoten, wird aber durch Wegnahme von $y = BD$ und ersatzweise Einfügung von $\eta = BH$ aufgeschlossen. Das so entstehende Fachwerk ist aber statisch bestimmt, denn man kann bei beliebigem Angriffssysteme zuerst die Stabkräfte in DG, DH eindeutig bestimmen, dann in GJ, GA, in JH, JK, in KA, KB und endlich in AH, AB, BH. Damit ist bewiesen, daß die vorgenommenen Stabvertauschungen die Stabilität und Einfachheit nicht aufgehoben haben; wäre das zuletzt erhaltene Fachwerk instabil, so wären die Vertauschungen nicht sämtlich erlaubt gewesen. Nun ist auch das Fachwerk Φ statisch bestimmt, das aus dem ursprünglichen Fachwerk F durch Vertauschung der Stäbe x, y mit ξ, η hervorgeht; denn von Φ gelangt man zu dem letzten Fachwerk Figur 356 durch folgeweise Wegnahme der Stäbe von Zweistabknoten, was die statische Bestimmtheit nicht beeinträchtigt (§ 104, Satz 1); Φ ist aber das Fachwerk, mittels dessen man nach Artikel 9 das Spannungsproblem von F selber lösen kann.

13. Der Kunstgriff, die Zweistabknoten samt ihren Stäben nach und nach wegzunehmen, erleichtert die Übersicht ganz erheblich. Ist ein stabiles, einfaches Fachwerk F gegeben, so gelangt man nunmehr zu dem entsprechenden Fachwerk Φ, das die Methode von Henneberg verlangt, auf folgendem Wege: Man beseitigt alle Zweistabknoten mit ihren Stäben, auch die, welche auf diese Weise zu Zweistabknoten werden, bis schließlich ein Fachwerk ohne Zweistabknoten übrig bleibt. Unser Beispiel betraf ein Fachwerk, bei dem diese Vorbereitung nicht nötig war, indem zweistabige Knoten von vornherein fehlten. Jetzt ist sicher ein Knoten O mit nur drei Stäben OA, OB, OC vorhanden. Einer davon, etwa $x = OA$, wird beseitigt und durch einen neuen Stab ξ ersetzt, der unter den Strecken AB, BC, CA gewählt werden darf. Dadurch wird O ein Zweistabknoten;

1) Vergl. Figur 350.

dieser wird wiederum mit seinen Stäben beseitigt, und dann der Reihe nach jeder Knoten nebst Stäben, der durch diesen Vorgang zum Zweistabknoten wird. Bleibt schließlich ein Fachwerk ohne Zweistabknoten übrig, so hat es sicher wieder (mindestens sechs) Dreistabknoten. An einem von ihnen verfährt man wie bei O, indem man einen seiner Stäbe y wegnimmt und durch einen Verbindungsstab η zweier der drei Punkte ersetzt, nach denen von jenem Knoten aus Stäbe hinführen; so fährt man fort, bis man auf ein Fachwerk stößt, an dem das Spannungsproblem lösbar ist. Nimmt man nun die im Laufe dieses Reduktionsverfahrens vorgekommenen Stabvertauschungen an dem Fachwerk selbst F vor — wobei also die Wegnahme der Zweistabknoten unterbleibt —, so erhält man ein zur Anwendung der Hennebergschen Methode (Art. 9, 10) geeignetes Fachwerk Φ.

14. Mit einer Stabvertauschung reicht man bei dem in Art. 2 besprochenen Fachwerk Figur 352 aus, wenn man etwa O_3U_3 durch AB ersetzt. Man berechnet dann die Kräfte auf O_3U_3 nach dem Hennebergschen Verfahren und bestimmt die übrigen Stabkräfte in der Reihenfolge O_3O_2, O_3O_4; O_4O_5, O_4U_4; O_5B, O_5U_5; O_2O_1, O_2U_2; O_1A, O_1U_1; U_1A, U_1B; U_2A, U_2B; U_3A, U_3B; U_4A, U_4B; U_5A, U_5B.[1])

§ 106. Das elastische Fachwerk.

1. Bis jetzt haben wir angenommen, daß jeder Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ eines Fachwerks das unter Einwirkung eines Angriffssystems (U) ihm zukommende Kräftepaar $(t_\sigma^{(U)}, -t_\sigma^{(U)})$ vollkommen zerstört. In Wirklichkeit erfährt aber der Stab durch dieses Kräftepaar eine Verlängerung oder Verkürzung, je nachdem es sich um Zug oder Druck handelt. Indem wir im folgenden den Druck als negativen Zug, eine Stabverkürzung als negative Verlängerung auffassen, und den Zug immer positiv messen, können wir sagen, daß das Kräftepaar, das einen Zug von der Größe $t_\sigma^{(U)}$ bewirkt, den Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ verlängert. Nach dem Hookeschen Grundgesetze der Elastizitätslehre ist diese Verlängerung dem Zuge proportional, d. h., wenn wir noch einen anderen Zug von der Größe $t_\sigma^{(V)}$ in Betracht ziehen, so verhalten sich die den Zügen $t_\sigma^{(U)}$, $t_\sigma^{(V)}$ entsprechenden Verlängerungen $\Delta^{(U)} l_\sigma$, $\Delta^{(V)} l_\sigma$ der Länge l_σ des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ wie die spannenden Kräfte:

1) Dieses Fachwerk stammt nebst der angegebenen Lösung von H. Kayser, Rig. Ind.-Ztg, 1898, Nr. 6 und 7. Wir entnehmen es der oben (S. 635) zitierten Abhandlung von Henneberg.



(1) $$\Delta^{(U)} l_\sigma : \Delta^{(V)} l_\sigma = t_\sigma^{(U)} : t_\sigma^{(V)}$$

oder:

(2) $$t_\sigma^{(U)} \Delta^{(V)} l_\sigma = t_\sigma^{(V)} \Delta^{(U)} l_\sigma.$$

2. Die bei dem Zuge $(t_\sigma^{(U)}, -t_\sigma^{(U)})$ eintretende Verlängerung des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ berechnet sich nach dem Elastizitätsgesetz mittels der Formel

(3) $$\Delta^{(U)} l_\sigma = \frac{1}{E} \frac{l_\sigma}{f_\sigma} t_\sigma^{(U)},$$

wo E eine Materialkonstante, den „Elastizitätsmodul" des Eisens, und f_σ den Querschnitt des prismatischen Stabes bezeichnet. Da der Zug $t_\sigma^{(U)}$ in der Technik durch eine (positive) Anzahl von Kilogramm gemessen wird, hat E die Dimensionen[1]) des Quotienten aus 1 kg durch das Quadrat der Längeneinheit. Für Schweiß- und Flußeisen ist etwa

(4) $$E = 2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2 = 2000 \; t/\text{cm}^2,$$

wenn t die Tonne (= 1000 kg) bezeichnet. Infolge unserer Übereinkunft, Zug positiv zu messen und Druck als negativen Zug aufzufassen, ergibt sich die Stabverlängerung aus (3) auch hinsichtlich des Vorzeichens richtig.

3. Die Lehre von der elastischen Formänderung des Fachwerks unter der Einwirkung irgend eines Angriffssystems läßt sich so einfach begründen, daß außer den vorangehenden Hilfsformeln aus der Elastizitätstheorie nur noch der Momentensatz der Statik erforderlich ist. Wir gehen aus von einem stabilen (aber nicht notwendig einfachen) Fachwerk $\mathfrak{F}$ von k Knoten und

(5) $$s = 2k - 3 + p$$

Stäben, das dem Angriffssystem (U), bestehend aus den Kräften

(6) $$\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_k \text{ an den Knoten } 1, 2, \ldots, k$$

ausgesetzt ist. Die absolute Größe der Kraft $\boldsymbol{U}_\varkappa$ sei $U_\varkappa$. In jedem Knoten besteht Gleichgewicht zwischen den dem System (U) entsprechenden Stabkräften $t_\sigma^{(U)}$, $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$, und den umgekehrten Angriffskräften.

> Wir drehen nun sämtliche Stabkräfte und die umgekehrten Angriffskräfte um ihre Angriffspunkte in positivem Sinne um 90 Grad. Dann stehen auch die gedrehten Kräfte an jedem Knoten für sich im Gleichgewicht,

und die Summe ihrer statischen Momente für irgend einen Drehpunkt ist daher gleich Null. Von dieser einfachen Überlegung verwerten

1) Vergl. § 15, 6.

wir nur die Folgerung, daß auch die Momentensumme aller gedrehten Kräfte verschwindet.

Die gedrehte Kraft $U_\varkappa$ mit $\hat{U}_\varkappa$, den orientierten Hebelarm von $\hat{U}_\varkappa$ an O mit $h_\varkappa$ bezeichnend (Fig. 357), haben wir demnach die Gleichung:

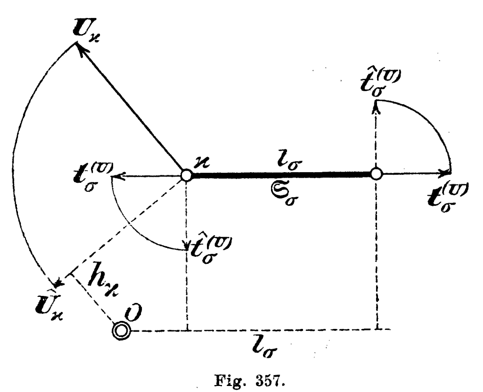


Fig. 357.

$$(7)\qquad \sum_\varkappa U_\varkappa h_\varkappa = \sum_\sigma l_\sigma t_\sigma^{(U)},$$

$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, k;\ \sigma = 1, 2, \ldots, s),$$

da die Zugkräfte an beiden Enden des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ durch die Drehung in ein Kräftepaar vom Momente $l_\sigma t_\sigma^{(U)}$ übergehen; die Summe der Momente eines solchen Paares ist von der Wahl des Drehpunktes unabhängig und eben gleich dem „Momente“ des Kräftepaares (§ 3, 9.).

4. Jetzt nehmen wir für die Knotenpunkte von $\mathfrak{F}$ neue Lagen $1', 2', \ldots, k'$ an und verbinden diese neuen Knotenpunkte ebenso zu einem Fachwerk $\mathfrak{F}'$, wie die ursprünglichen Knotenpunkte zu dem Fachwerk $\mathfrak{F}$ verbunden waren, unbekümmert darum, ob $\mathfrak{F}'$ stabil ist oder nicht. Dann ist $\mathfrak{F}'$ mit $\mathfrak{F}$ gleichgegliedert, aber nicht notwendig isoklin. Es wird also der zu $\mathfrak{S}_\sigma$ homologe Stab $\mathfrak{S}_\sigma'$ von $\mathfrak{F}'$, dessen Länge wir mit l_σ' bezeichnen, gegen $\mathfrak{S}_\sigma$ eine von Null verschiedene Neigung μ_σ haben können, die irgendwie eindeutig definiert sei (Fig. 358).

Die gedrehten Kräfte des Fachwerks $\mathfrak{F}$ werden (parallel zu sich) an die entsprechenden Knoten von $\mathfrak{F}'$ verschoben. Dann ist natürlich auch an jedem Knoten von $\mathfrak{F}'$ Gleichgewicht, und es gilt also eine zu (7) analoge Momentengleichung. Die Angriffslinien des gedrehten Kräftepaares von $\mathfrak{S}_\sigma'$ haben die gegenseitige Entfernung $l_\sigma' \cos\mu_\sigma$, also ist sein Moment gleich $l_\sigma' t_\sigma^{(U)} \cos\mu_\sigma$. Ist $h_\varkappa'$ der orientierte Hebelarm der nach $\varkappa'$ verschobenen Kraft $\hat{U}_\varkappa$ am Drehpunkt O, so ist demnach

$$(8)\qquad \sum_\varkappa U_\varkappa h_\varkappa' = \sum_\sigma l_\sigma' t_\sigma^{(U)} \cos\mu_\sigma.$$

Hierin setzen wir $\cos\mu_\sigma = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}\mu_\sigma$ und subtrahieren die Gleichung (7) von (8). Das gibt:

$$(9)\qquad \sum_\varkappa U_\varkappa (h_\varkappa' - h_\varkappa) = \sum_\sigma (l_\sigma' - l_\sigma)\, t_\sigma^{(U)} - 2\sum_\sigma l_\sigma' t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma.$$

5. Diese Formel gilt ohne Einschränkung hinsichtlich der Abstände $\varkappa\varkappa'$. Nun setzen wir voraus, daß das Fachwerk $\mathfrak{F}'$ aus $\mathfrak{F}$ hervorgeht, wenn $\mathfrak{F}$ der deformierenden Wirkung irgend eines Angriffssystems (V) unterworfen wird. Dann ist

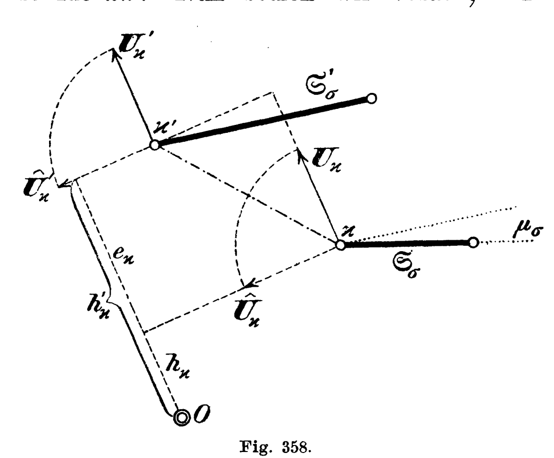


Fig. 358.

(10) $l_\sigma' - l_\sigma = \Delta^{(V)} l_\sigma$

die Verlängerung, die der Stab $\mathfrak{S}_\sigma$ unter dem Einflusse von (V) erleidet. Durch diese Änderungen der Stablängen gehen die Knotenpunkte von $\mathfrak{F}$ aus den Lagen $1, 2, \ldots, k$ in die Lagen $1', 2', \ldots, k'$ über, der Angriffspunkt $\varkappa$ von $U_\varkappa$ erleidet also eine Verschiebung $\varkappa\varkappa'$, und $h_\varkappa' - h_\varkappa = e_\varkappa$ ist die senkrechte Projektion dieser Verschiebung auf die Angriffslinie von $U_\varkappa$, gemessen mit positivem oder negativem Vorzeichen, je nachdem die Projektion von $\varkappa'$ in der Richtung von $U_\varkappa$ gegen $\varkappa$ vorgeschoben ist oder nicht.

Daher ist $U_\varkappa(h_\varkappa' - h_\varkappa) = U_\varkappa e_\varkappa$ die Arbeit, die von der an den Angriffspunkt $\varkappa$ geknüpften Kraft $U_\varkappa$ geleistet wird, während das System (V) den Punkt $\varkappa$ nach $\varkappa'$ verschiebt (§ 22, 1.).

Da hierbei die Kraft $U_\varkappa$ tatsächlich nicht am Fachwerk wirkt, das ganze System (U) vielmehr nur zeichnerisch an dem Fachwerk $\mathfrak{F}$ angebracht ist und die Arbeit $U_\varkappa e_\varkappa$ nur formal rechnerisch, nicht in Wirklichkeit geleistet wird, so nennt man sie eine „virtuelle" Arbeit. Wäre das System (U) neben (V) am Fachwerk wirksam, so würden ja ganz andere Verschiebungen der Knoten eintreten. Auf der linken Seite von (9) steht demnach die vom System (U) geleistete virtuelle Arbeit, wenn (V) das Fachwerk deformiert. Wir bezeichnen diese Arbeit mit

(11) $$\sum U_\varkappa e_\varkappa = \text{Arbeit}^{(V)}(U).$$

Wegen (10) ist also

(12) $$\text{Arbeit}^{(V)}(U) = \sum_\sigma t_\sigma^{(U)} \Delta^{(V)} l_\sigma - 2\sum_\sigma (l_\sigma + \Delta^{(V)} l_\sigma)\, t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma.$$

6. Läßt man die Systeme (U) und (V) an $\mathfrak{F}$ ihre Rolle vertauschen, indem (U) deformiert und (V) rein zeichnerisch die Bewegung mitmacht, so gilt analog zu (12) die Gleichung

(13) $$\text{Arbeit}^{(U)}(V) = \sum_\sigma t_\sigma^{(V)} \Delta^{(U)} l_\sigma - 2\sum_\sigma (l_\sigma + \Delta^{(U)} l_\sigma)\, t_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma,$$

wo ν_σ die durch (U) bewirkte Drehung des Stabes $\mathfrak{S}_\sigma$ mißt. Unsere Absicht ist, die Arbeiten (12) und (13) miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zwecke bilden wir ihre Differenz. Mit Rücksicht auf (2) ist:

$$\begin{aligned} &\text{Arbeit}^{(V)}(U) - \text{Arbeit}^{(U)}(V) = \\ &- 2\sum_\sigma l_\sigma (t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - t_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma) \\ &- 2\sum_\sigma (t_\sigma^{(U)} \Delta_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - t_\sigma^{(V)} \Delta_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma), \end{aligned}$$

und indem man auf die zweite Summe noch einmal (2) anwendet:

(14) $$\begin{aligned} &\text{Arbeit}^{(V)}(U) - \text{Arbeit}^{(U)}(V) = \\ &- 2\sum_\sigma l_\sigma (t_\sigma^{(U)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - t_\sigma^{(V)} \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma) \\ &- 2\sum_\sigma t_\sigma^{(U)} \Delta_\sigma^{(V)} l_\sigma (\sin^2 \tfrac{1}{2}\mu_\sigma - \sin^2 \tfrac{1}{2}\nu_\sigma). \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nun weiter auszuarbeiten unter Berücksichtigung der Größenordnung ihrer Glieder. Links stehen Produkte aus Angriffskräften und den Verschiebungen der Knotenpunkte in der Richtung dieser Kräfte. Diese Verschiebungen sind im Vergleich zu den Stablängen klein von der ersten Ordnung. In der ersten Summe rechts stehen die Stabkräfte, die von der gleichen Größenordnung sind wie die Angriffskräfte, wie wir aus den zahlreichen Kräfteplänen der vorangegangenen Paragraphen ersehen können; die Sinus der Winkel μ_σ, ν_σ sind noch kleiner als die Verschiebungen der Knotenpunkte und die Stabverlängerungen im Verhältnis zu den Stablängen, ihre Quadrate sind mindestens von der zweiten Ordnung klein. Die zweite Summe rechts ist noch erheblich kleiner als die erste. Die rechte Seite von (14) ist daher um eine Größenordnung kleiner wie die linke und in der Annäherung, mit der sich die Elastizitätslehre begnügt, gleich Null. Also

(15) $$\text{Arbeit}^{(V)}(U) = \text{Arbeit}^{(U)}(V).$$

Aus denselben Gründen darf man auf der rechten Seite von (12) die zweite Summe unterdrücken und findet:

(16) $$\text{Arbeit}^{(V)}(U) = \sum_\sigma t_\sigma^{(U)} \Delta^{(V)} l_\sigma.$$

7. Die Gleichungen (15) und (16) enthalten die Fundamentalsätze der Lehre vom elastischen Fachwerk; Gleichung (15) ist der analytische Ausdruck für den

Satz von Maxwell:[1]) Während der Deformation durch das Angriffssystem (U) leistet das Angriffssystem (V) dieselbe virtuelle Arbeit wie das Angriffssystem (U) während der Deformation durch (V).

Aus Gleichung (16) folgt der

Satz über die virtuelle Arbeit der Stabkräfte: Die virtuelle Arbeit, die das Angriffssystem (U) leistet, während (V) das Fachwerk deformiert, ist gleich der virtuellen Arbeit, welche die von (U) hervorgerufenen Stabkräfte leisten, während die Stäbe unter dem Einfluß von (V) ihre Länge ändern.

Diese Stabkräfte sind während dieses Vorganges nicht etwa in den Stäben wirksam, sondern ihre Arbeit ist eine reine Rechengröße. Wenn man dennoch dem Satze diese dynamische Einkleidung gibt, so hat das nur den Zweck, der Formel (16) eine anschauliche Deutung zu geben, die sich leicht dem Gedächtnis einprägt.

Auf diesen Sätzen beruht die Berechnung der Spannkräfte in den stabilen Fachwerken mit überzähligen Stäben, worauf wir aber nicht weiter eingehen können. Für weitergehende Interessen verweisen wir auf die großen Lehrbücher von Henneberg, Müller-Breslau, Ostenfeld und Mohr.

---

1) In § 99 haben wir die „Addition" der Angriffssysteme sowie ihre „Multiplikation" mit reellen Zahlen definiert. Eine neue Art multiplikativer Verknüpfung, und zwar von zwei Angriffssystemen (U) und (V), erhält man durch die Definition

$$(U) \times (V) = \text{Arbeit}^{(V)}(U).$$

Dann sagt der Satz von Maxwell:

$$(V) \times (U) = (U) \times (V),$$

d. h. es gilt das kommutative Gesetz der Multiplikation. Auch gilt das distributive Gesetz

$$(U) \times [(V) + (W)] = (U) \times (V) + (U) \times (W).$$

Zusätze und Berichtigungen zum Band I,

erste und zweite Auflage.

(Die Verweisungen beziehen sich auf die zweite Auflage.)

Zu den Grundlagen der Arithmetik, erster Abschnitt, Elementare Mengenlehre.

Immer gewichtiger erweisen sich die Bedenken und Einwendungen gegen die Mengenlehre, auf der alle unsere Untersuchungen über den Zahlbegriff fußen. Schon vor Jahren hat G. Cantor gezeigt, daß jede Menge von geringerer Mächtigkeit ist als die Menge ihrer Teile, daß also hiernach die „Menge aller Dinge", die doch auch ihre Teile enthalten muß, ein sich selbst widersprechender Begriff ist.

Noch handgreiflicher hat Russel einen solchen Widerspruch aufgezeigt.[1]) Es gibt Mengen oder Begriffe, die sich selbst nicht enthalten, wie z. B. die Menge der Zahlen, die Menge der Einwohner einer Stadt, ein Regiment Soldaten; und es gibt Mengen, die sich selbst enthalten, wie z. B. die Menge aller Dinge und besonders die durch negative Prädikate bestimmten Begriffe, z. B. der Begriff „Nicht-Mensch".

Versucht man nun die Menge M aller Mengen m zu bilden, die sich selbst nicht enthalten, so kann diese Menge M sich selbst nicht enthalten, denn wenn sie sich selbst enthielte, so wäre sie kein m. Sie muß sich aber doch selbst enthalten, denn wenn sie sich selbst nicht enthielte, so wäre sie ein m.

Es gibt kein Mittel, aus diesem Widerspruch herauszukommen. Der Ausweg, den Schönflies vorgeschlagen hat, von dem Mengenbegriff als unzulässig solche Mengen auszuscheiden, die sich selbst enthalten, befriedigt auch nicht völlig, und würde uns vor allen Dingen vor die Aufgabe stellen, genauer zu bestimmen, welche Mengenbegriffe zulässig sind, und welche nicht.[2])

---

1) Bertrand Russel, The principles of Mathematics. Cambridge 1903.

2) Schönflies, Über die logischen Paradoxien der Mengenlehre. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Januar 1906. Vgl. auch Korselt, ebenda April und Mai.



Ähnlich ist es mit dem Satz, auf den ich mich in meinen Ausführungen im ersten Bande gestützt habe: „Ist A eine beliebige Menge, so gibt es immer noch Dinge β, die nicht in A enthalten sind“ (Seite 5). Ich habe daher versucht einen anderen Weg einzuschlagen, der zwar nicht geeignet ist, alle Dunkelheiten der Mengenlehre aufzuhellen, was vielleicht überhaupt unmöglich ist, der aber doch einwandfrei bis zum Zahlbegriff, der uns ja in der Mathematik vor allem interessiert, hinführt. Ich lasse hier die zuerst im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (April 1906) publizierte kleine Abhandlung mit einigen Kürzungen und Verbesserungen folgen. Ich will übrigens nicht unterlassen zu bemerken, daß bereits Kant diese Widersprüche klar gesehen und in der „Kritik der reinen Vernunft“ unter dem Titel „Die Antinomie der reinen Vernunft“ ausführlich, wenn auch in einer von unserer mathematischen abweichenden Sprechweise, davon gehandelt hat. Diese Partie des Kantschen Hauptwerkes möchte ich den philosophischen Mathematikern unserer Tage angelegentlichst zum Studium empfehlen.

Über Hilberts neuere Versuche, die Logik der Mengenlehre „axiomatisch“ zu begründen, wage ich noch kein Urteil.

Ich habe dem Teil der Mengenlehre, mit dem sich die folgenden Zeilen beschäftigen, den Namen Elementare Mengenlehre gegeben und unterscheide davon die transzendente Mengenlehre, die sich mit dem Ausbau der Idee des Unendlichen beschäftigt.

Die elementare Mengenlehre hat es nur mit endlichen Mengen zu tun und stützt sich auf die alleralltäglichste Erfahrung, die uns derartige Mengen gibt, z. B. die Finger der Hand, ein Sack Kartoffeln, ein Regiment Soldaten. Auch die Möglichkeit der Ordnung ist nur durch die gemeine Erfahrung gegeben, wenn z. B. die Finger nebeneinander liegen, oder die Kartoffeln in langer Reihe ausgebreitet oder gewogen werden, oder die Soldaten in Reih und Glied aufgestellt sind. Auch die Tatsache, daß eine Menge Teile haben kann, entnehme ich dieser Erfahrung, und will nun versuchen, aus diesen Erfahrungstatsachen die Idee der Zahl herzuleiten. Der Kernpunkt ist dabei der Satz von der vollständigen Induktion.

I. Geordnete Mengen.

1. Eine Menge heißt geordnet, wenn durch irgend eine Festsetzung bestimmt ist, welches von zwei verschiedenen Elementen dieser Menge das größere und welches das kleinere sein soll, und wenn diese Ordnung für drei Elemente a, a', a'' der Menge die Folge hat, daß, wenn a kleiner als a', a' kleiner als a'' ist, auch a kleiner als a'' ist.

Eine Menge, die so geordnet werden kann, heißt ordnungsfähig.

Zur Erläuterung dieser Definition mache ich folgende Bemerkungen:

Die Worte „größer“ und „kleiner“ sind nur der Kürze wegen gewählt; man könnte ebensogut „früher“ und „später“, „höher“ und „tiefer“, „weiter rechts“ und „weiter links“ oder irgend ähnliche Ausdrücke brauchen. An ein physisches Größer und Kleiner braucht dabei nicht gedacht zu werden.

Über die Bezeichnung sei noch bemerkt:

Bedeutet A eine Menge und a, a' zwei ihrer Elemente, so bedeuten

$$(1) \qquad a < a', \quad a' > a$$

dasselbe, nämlich a ist kleiner als a', a' ist größer als a. Ist a'' ein drittes Element von A, so sollen

$$a < a', \quad a' < a''$$

die Beziehung

$$a < a''$$

zur Folge haben. In diesen Formeln ist das, was man Größencharakter der Ordnung nennt, enthalten.

Ist A eine Menge ohne Rücksicht auf eine Ordnung, so wollen wir unter $\bar{A}$ dieselbe Menge mit einer bestimmten Ordnung verstehen.

Daß es Mengen gibt, die geordnet werden können, und auf mehrfache Weise, zeigt die Erfahrung, z. B. die fünf Finger der Hand, Punkte einer geradlinigen Strecke u. s. w. Damit begnügen wir uns. Die Frage, ob es auch Mengen gibt, die nicht geordnet werden können, schieben wir der transzendenten Mengenlehre zu, und lassen sie hier unerörtert.

2. Eine Menge B heißt ein Teil einer Menge A, wenn jedes Element b von B zugleich ein Element von A ist; B heißt ein echter Teil von A, wenn wenigstens ein Element in A existiert, das nicht in B enthalten ist.

3. Ist A' ein Teil von A und A'' ein Teil von A', so ist auch A'' ein Teil von A. Wenn A' ein echter Teil von A, oder A'' ein echter Teil von A' (oder beides) ist, so ist auch A'' ein echter Teil von A.

Ist B ein echter Teil von A, so gehört jedes Element und nur ein solches, das in A, aber nicht in B enthalten ist, einer Menge C an, die wir die Ergänzung von B zu A nennen.

Wir setzen, um dies Verhältnis anzudeuten:

$$A = B + C \quad \text{oder} \quad A = C + B.$$

Es ist auch C ein echter Teil von A, und B ist die Ergänzung von C. Eine Menge, die nur aus einem einzigen Element besteht, hat keinen echten Teil. Die Erfahrung gibt uns aber Beispiele von Mengen mit echten Teilen, z. B. eine Menge von zwei Elementen.

Sind B und C zwei Mengen, so können wir eine mit $A = B + C$ zu bezeichnende Menge bilden, in die wir ein Element dann und nur dann aufnehmen, wenn es entweder in B oder in C (oder auch in beiden) vorkommt. Gibt es kein Element, das zugleich in B und in C enthalten ist, so sind B und C echte Teile von A und die Ergänzungen voneinander.

4. Jeder Teil einer ordnungsfähigen Menge ist ordnungsfähig.

Ist nämlich $\bar{A}$ eine geordnete Menge und B ein Teil von A, so ist auch B geordnet, wenn wir festsetzen, daß irgend zwei Elemente b, b' von B dieselbe Größenbeziehung zueinander haben, die ihnen in $\bar{A}$ zukommt. Wir sagen dann, B ist nach $\bar{A}$ geordnet.

5. Sind $\bar{B}$ und $\bar{C}$ geordnete Mengen, die keine gemeinschaftlichen Elemente haben, so ist auch $A = B + C$ ordnungsfähig.

Gehören nämlich zwei verschiedene Elemente a und a' von A zu demselben Teil, z. B. zu B, so sollen sie in A ebenso wie in $\bar{B}$ geordnet sein (α).

Gehört aber a zu B und a' zu C, so soll $a < a'$ sein (β).

Um nachzuweisen, daß bei dieser Anordnung von A der Größencharakter gewahrt bleibt, seien a, a', a'' drei verschiedene Elemente von A, und es sei nach der getroffenen Ordnung in $\bar{A}$

(1) $$a < a', \quad a' < a''.$$

Es ist zu beweisen, daß daraus

(2) $$a < a''$$

folgt. Wir haben hierbei vier Fälle zu unterscheiden:

1. a gehört zu C; dann gehören auch a' und a'' zu C (wegen (β)) und daraus folgt (2) nach der in $\bar{C}$ festgesetzten Ordnung.

2. a gehört zu B, a' zu C; dann gehört wieder a'' (wegen (1) und (β)) zu C und folglich ist (2) nach (β) befriedigt.

3. a gehört zu B, a' zu B, a'' zu C; dann folgt wieder (2) aus (β).

4. a'' gehört zu B; dann müssen a und a' ebenfalls zu B gehören, und (2) folgt aus der Ordnung in $\bar{B}$.

Bei der durch (α) und (β) ausgedrückten Ordnung in A sagen wir, A sei nach ($\bar{B}$, $\bar{C}$) geordnet. Ebenso können wir auch die Ordnung nach ($\bar{C}$, $\bar{B}$) vornehmen.

II. Endliche Mengen.

1. Wenn in einer geordneten Menge $\bar{A}$ ein Element a_0 vorkommt, das die Eigenschaft hat, daß für jedes von a_0 verschiedene Element a aus A

(1) $$a_0 < a$$

ist, so ist a_0 das kleinste Element in $\bar{A}$. Es kann nicht mehr als ein kleinstes geben, denn wäre a_0' ein zweites, so wäre nach (1) $a_0 < a_0'$, und es könnte nicht zugleich $a_0' < a_0$ sein.

Ebenso ist ein Element a_1 aus $\bar{A}$ das größte, wenn für jedes von a_1 verschiedene Element a

$$a < a_1$$

ist. Es kann auch höchstens ein größtes geben.

2. Eine Menge A heißt endlich, wenn sie ordnungsfähig ist und wenn sie bei jeder möglichen Ordnung ein kleinstes Element hat.[1])

Unsere Definition 2. verlangt von einer endlichen Menge, daß es immer ein kleinstes Element geben soll, aber wohlverstanden, diese Eigenschaft muß nicht bloß einer, sondern jeder möglichen Ordnung der Elemente von A zukommen.

Eine geordnete Menge $\bar{A}$ kann immer noch auf eine andere Art geordnet werden, die zu der Ordnung $\bar{A}$ invers heißt, indem man festsetzt: wenn in $\bar{A}$ $a < a'$ ist, so soll in der invers geordneten Menge $a' < a$ sein. Das kleinste Element in $\bar{A}$ ist dann das größte der invers geordneten Menge und umgekehrt. Daraus folgt:

3. Eine endliche Menge hat bei jeder möglichen Ordnung ein größtes Element.[2])

Daß der Begriff der endlichen Menge, wie wir ihn hier definiert haben, nichts Widersprechendes hat, lehrt die Erfahrung.

Eine Menge, die aus einem einzigen Element besteht, ist geordnet. Denn da es kein zweites Element gibt, so kann die Frage, welches das größere sei, nicht entstehen. Das eine Element ist dann zugleich das größte und das kleinste.

---

1) Es wäre vielleicht treffender, eine solche Menge „geschlossen" zu nennen. Der Ausdruck „endliche Menge" ist aber schon gebräuchlich und soll daher beibehalten werden.

2) In meiner früheren Mitteilung habe ich die Existenz eines größten Elements in die Definition der endlichen Mengen mit aufgenommen. Herr J. Kürschak in Budapest hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß dies nicht nötig ist.

Eine Menge, die aus zwei Elementen, z. B. den Zeichen $+$ $-$ besteht, kann auf zwei Arten geordnet werden:

$$+ < - \quad \text{oder} \quad - < +,$$

aber nicht noch auf eine dritte. Bei der ersten Ordnung ist $+$ das kleinste, $-$ das größte Element, bei der zweiten umgekehrt. Die elementarste Erfahrung gibt uns also Beispiele von endlichen Mengen.

Wenn eine endliche geordnete Menge $\bar{A}$ aus mehr als zwei Elementen besteht, so gibt es außer dem größten und dem kleinsten a_0 und a_1 noch wenigstens eines, a, das der Bedingung $a_0 < a < a_1$ genügt. Ein solches heißt ein inneres Element.

4. Jeder Teil einer endlichen Menge ist eine endliche Menge.

Zum Beweise sei B ein echter Teil von A, und C seine Ergänzung, also $A = B + C$. Nach I, 4. können B und C geordnet werden. Es sei $\bar{B}$ irgend ein geordnetes B, und $\bar{C}$ ein geordnetes C. Nun gibt es, weil A endlich ist, in dem nach $(\bar{B}, \bar{C})$ geordneten $\bar{A}$ ein kleinstes Element a_0. Es ist dann a_0 das kleinste Element in $\bar{B}$; denn erstens gehört es zu B (I, 5. (β)), und daß es in B kein kleineres Element als a_0 gibt, folgt aus I, 5. (α). Folglich hat $\bar{B}$ ein kleinstes Element und ist endlich.

5. Sind B und C zwei endliche Mengen ohne gemeinsames Element, so ist auch die aus beiden zusammengesetzte Menge

$$A = B + C$$

endlich.

Denn erstens ist A nach I, 5. ordnungsfähig. Es sei also $\bar{A}$ in beliebiger Weise geordnet und $\bar{B}$ und $\bar{C}$ seien nach $\bar{A}$ geordnet. Da nach Voraussetzung B endlich ist, so gibt es in $\bar{B}$ ein kleinstes Element b_0, und ebenso gibt es in $\bar{C}$ ein kleinstes Element c_0. Es sei nun nach der in $\bar{A}$ bestehenden Ordnung etwa $b_0 < c_0$, dann ist jedes von b_0 verschiedene Element a in $\bar{A}$ größer als b_0; denn gehört a zu B, so ist $b_0 < a$, weil b_0 das kleinste Element von $\bar{B}$ ist, und gehört a zu C, so ist entweder $a = c_0 > b_0$ oder $a > c_0 > b_0$; demnach ist b_0 das kleinste Element in $\bar{A}$. Ebenso ist, wenn $b_0 > c_0$ ist, c_0 das kleinste Element in $\bar{A}$. Es hat also A bei jeder Ordnung $\bar{A}$ ein kleinstes Element und ist folglich endlich.

6. Schnitt. Ist $\bar{A}$ eine geordnete endliche Menge von mehr als zwei Elementen und a ein inneres Element, so erzeugt a zwei Schnitte in A in folgender Weise: Man nehme in B jedes Element auf, das kleiner als a ist, und in C jedes Element, das größer als a ist. Das Element a selbst nehme man etweder zu B oder

zu C. Jede dieser Einteilungen heißt ein Schnitt in A, und a heißt das ihn erzeugende Element. Man setze:

$$A = B_a + C, \tag{1}$$

wenn a zu B genommen ist, und

$$A = B + C_a, \tag{2}$$

wenn a zu C gehört. Wir setzen noch, um auch das größte und kleinste Element zu berücksichtigen:

$$B_{a_0} = a_0, \quad C_{a_0} = A, \tag{3}$$

$$B_{a_1} = A, \quad C_{a_1} = a_1. \tag{4}$$

Diese Zeichen sollen auch in dem Falle, daß A nur aus einem oder aus zwei Elementen besteht, ihre Bedeutung behalten.

Ordnen wir B_a und C und ebenso B und C_a nach A und nennen b das größte Element von B, c das kleinste Element von C, so ist

$$b < a < c, \tag{5}$$

und zwischen b und a und ebenso zwischen a und c liegt kein Element aus a, denn jedes etwa vorhandene von a, b, c verschiedene Element von A wäre entweder $< b$ (wenn es zu B gehört) oder $> c$ (wenn es zu C gehört). Damit ist bewiesen:

7. In jeder geordneten endlichen Menge $\bar{A}$ von mehr als zwei Elementen gibt es zu jedem inneren Element a ein zunächst gelegenes kleineres Element b und ein zunächst gelegenes größeres Element c.

Die Elemente b und c heißen die Nachbarelemente von a.

Zu dem kleinsten Elemente a_0 von $\bar{A}$ gibt es nur ein größeres und zu dem größten Element a_1 nur ein kleineres Nachbarelement, und dies gilt auch noch für Mengen von zwei Elementen. Sind b und c die Nachbarelemente von a, so ist a das größere Nachbarelement von b und das kleinere Nachbarelement von c.

8. Der Satz von der vollständigen Induktion:

> Ein allgemeiner, auf jedes Element der geordneten endlichen Menge $\bar{A}$ anwendbarer Satz $\mathfrak{A}$ ist als vollständig bewiesen anzusehen, wenn es gelingt, die beiden folgenden Punkte darzutun:

1. $\mathfrak{A}$ gilt für das kleinste Element a_0 in $\bar{A}$.
2. Wenn $\mathfrak{A}$ für irgend ein Element b in $\bar{A}$ gilt, so gilt $\mathfrak{A}$ auch für das größere Nachbarelement a von b.

Angenommen, es sei $\mathfrak{A}$ nicht für alle Elemente von A richtig, so bilden wir eine Teilmenge C von A, in die wir jedes Element aufnehmen, für das $\mathfrak{A}$ nicht gilt. Die Menge C ordnen wir nach $\bar{A}$ und bezeichnen mit c das kleinste Element von $\bar{C}$. Nach der Voraussetzung 1. ist c von a_0 verschieden und hat folglich ein kleineres Nachbarelement a, für das der Satz $\mathfrak{A}$ gilt, weil a nicht zu C gehört. Dann ist aber nach 2. $\mathfrak{A}$ auch richtig für c, und es kann folglich die Menge C nicht existieren.

III. Abbildung und Äquivalenz.

1. Wenn ich in der Folge von zwei endlichen Mengen A und B spreche, soll immer darunter verstanden sein, daß sie keine gemeinschaftlichen Elemente haben. Es ist dadurch nicht ausgeschlossen, daß in A und B Elemente vorkommen, die objektiv identisch sind; wir wollen nur übereinkommen, sie als verschieden zu bezeichnen, je nachdem sie zu A oder zu B gehören. Es könnte in diesem Sinne selbst B ein Teil von A oder mit A dem tatsächlichen Inhalte nach identisch sein.

2. Definition. Zwei endliche Mengen A und A' heißen äquivalent, wenn sie so miteinander in Verbindung gebracht werden können, daß jedes Element a von A mit einem Element a' von A' ein Paar bildet, und daß jedes Element a' von A' in einem und nur in einem dieser Paare vorkommt (z. B. die Finger der rechten und linken Hand). Die Äquivalenz ist also gegenseitig. Wir drücken sie in Zeichen so aus:

$$A \sim A', \quad A' \sim A.$$

Sind die die Äquivalenz begründenden Verbindungen zwischen den Elementen von A und A' hergestellt, so sagen wir, A' sei auf A abgebildet und nennen zwei verbundene Elemente auch entsprechende Elemente.

3. Sind zwei Mengen A' und A'' mit einer dritten A äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent. Denn ist in der Äquivalenz $A' \sim A$ das Element a' mit a verbunden und in $A'' \sim A$ das Element a'' mit a, so ist dadurch auch a' mit diesem bestimmten a'' verbunden, und ebenso umgekehrt irgend ein a'' mit einem bestimmten a'.

Denken wir uns im Sinne von Nr. 1 eine Menge A zweimal gesetzt, so können wir sagen, daß jede Menge sich selbst äquivalent ist.

Ist die Menge $\bar{A}$ geordnet, so kann jede äquivalente Menge A' gleichfalls geordnet werden, indem man, wenn $a < b$ Elemente von $\bar{A}$ sind, den entsprechenden Elementen a' und b' in A' dieselbe Größenbeziehung gibt. Dem kleinsten und größten Element a_0 und a_1 von $\bar{A}$ entsprechen dann das kleinste und größte Element a_0' und a_1' von $\bar{A}'$. Daraus folgt:

4. Ist A eine endliche Menge, so ist jede mit A äquivalente Menge gleichfalls endlich.

Wenn irgend eine Menge M mit einer Menge A und zugleich mit einem Teil A' von A äquivalent ist, so können wir im Sinne von Nr. 1 sagen, daß A mit einem Teil A' von sich selbst äquivalent ist. Es gilt dann der Hauptsatz:

5. Eine endliche Menge A kann nicht mit einem echten Teil von A äquivalent sein.

Zum Beweise wenden wir die vollständige Induktion an. Sei also $\bar{A}$ irgendwie geordnet, und wir behalten die Bezeichnung von II, 6. bei. Der zu beweisende Satz ist dann richtig für die Menge $B_{a_0} = a_0$, denn diese Menge besteht nur aus einem Element und hat keinen echten Teil, ist also auch nicht einem echten Teil von sich selbst äquivalent.

Sei b irgend ein Element von $\bar{A}$ und $b < a_1$, und es sei unser Satz als richtig erkannt für die Menge B_b, d. h. es sei B_b nicht einem echten Teil von sich selbst äquivalent. Es sei a das größere Nachbarelement von b. Ist dann B_a einem echten Teil B_a' von sich selbst äquivalent, so sind drei Fälle möglich:

α) B_a' enthält nicht das Element a. Das Element a in B_a wird dann einem anderen Element a' in B_a' entsprechen, das zu B_b gehört. Ist dann $B_a' = B_b' + a'$, so ist B_b' ein echter Teil von B_b, und da $B_a = B_b + a$ ist, so ist, wenn wir die verbundenen Elemente a, a' aus B_a und B_a' entfernen, eine Abbildung von B_b auf B_b' hergestellt, die nach Voraussetzung nicht möglich ist.

β) B_a' enthält das Element a, und dieses Element entspricht sich selbst in der Abbildung von B_a und B_a'. Dann ist $B_a' = B_b' + a$ und B_b' ist wieder ein echter Teil von B_b, da B_a' ein echter Teil von B_a sein soll. Durch Entfernung des mit sich selbst verbundenen Elementes a ist also wieder eine Abbildung von B_b und B_b' hergestellt, die nicht möglich sein soll.

γ) B_a' enthält das Element a, aber in der Abbildung von B_a auf B_a' entspricht dem a, als Element von B_a gefaßt, das Element a' von B_b, und als Element von B_a' gefaßt, das Element a'' von B_b (a' und a'' können identisch sein, sind aber von a verschieden und daher in B_b enthalten). Ich lasse nun alle Verbindungen in der Abbildung

von B_a auf B_a' bestehen mit Ausnahme der Verbindungen aa' und $a''a$. Diese löse ich und verbinde a mit a und a' mit a''. Dann ist wiederum B_a auf B_a' abgebildet, und ich bin auf den Fall β zurückgekommen.

Hiermit ist die Aussage $\mathfrak{A}$ über das Element a, nämlich „B_a ist nicht mit einem echten Teil seiner selbst äquivalent“, erwiesen für a_0, ferner für a, unter der Voraussetzung, daß sie für b gilt. Es sind also die Voraussetzungen der vollständigen Induktion erfüllt, und der Satz ist also auch richtig für a_1, d. h. für die Menge A selbst.

6. Es seien nun A und M irgend zwei endliche Mengen. Dann gibt es drei Möglichkeiten:

1) A äquivalent mit M,

2) A äquivalent mit einem echten Teil M' von M,

3) M äquivalent mit einem echten Teil A' von A.

Wir wollen nachweisen, daß von diesen drei Möglichkeiten immer nur eine zutreffen kann, daß aber auch eine immer zutreffen muß.

Das erste folgt aus dem Satz 5, denn ist $A \sim M$ und $A' \sim M$, so ist auch $A \sim A'$, was nach 5. unmöglich ist, also ist 3) und ebenso 2) durch 1) ausgeschlossen.

Wenn aber $A \sim M'$ ist, so kann nicht $A \sim M$ sein, weil sonst $M \sim M'$ wäre; also ist 1) durch 2) ausgeschlossen, und ebenso ist es durch 3) ausgeschlossen.

Daß aber auch 2) und 3) nicht zusammen bestehen können, sieht man so ein: Es sei A auf M' abgebildet; dann ist zugleich A' auf einen Teil M'' von M' abgebildet, also $A' \sim M''$, und M'' ist ein echter Teil von M. Wäre nun zugleich $A' \sim M$, so wäre $M \sim M''$, entgegen dem Satze 5.

7. Um nachzuweisen, daß, wenn A und M endliche Mengen sind, immer eines der drei 1) 2) 3) eintreten muß, nehmen wir an, es treffen 1) und 3) nicht zu, es sei also M weder mit A noch mit einem Teil von A äquivalent, und es ist zu zeigen, daß dann A mit einem Teil von M äquivalent sein muß.

Dazu hilft uns wieder die vollständige Induktion. Es seien $\bar{A}$ und $\bar{M}$ irgendwie geordnet, und es werden die Bezeichnungen von II. 5., 6. beibehalten.

Es ist dann zunächst klar, daß $B_{a_0} = a_0$ auf einen Teil von M, etwa auf das kleinste Element m_0 von $\bar{M}$, abbildbar ist.

Es sei B_b auf einen Teil M' von M abgebildet. Es muß dann M' von M verschieden sein, weil nach Voraussetzung M mit keinem Teil von A äquivalent sein soll. Demnach gibt es ein Element m' von M, das nicht in M' enthalten ist. Wir verbinden a mit m' und haben $B_a = B_b + a$ auf $M' + m'$ abgebildet. $M' + m'$ ist aber wieder

ein Teil von M und zwar ein echter (nach der Voraussetzung). Es ist also B_a auf einen echten Teil von M abgebildet und damit sind die Voraussetzungen der vollständigen Induktion erfüllt. Setzen wir also $a = a_1$, so folgt, daß A mit einem Teil von M äquivalent ist.

Wir wählen zur Bezeichnung von 1), 2), 3) die Zeichen

$$1)\ A \sim M, \quad 2)\ A \prec M, \quad 3)\ M \prec A$$

oder

$$1)\ M \sim A, \quad 2)\ M \succ A, \quad 3)\ A \succ M.$$

Es ergibt sich unmittelbar, wenn A, B und M endliche Mengen sind:

Ist $B \prec A$ und $A \prec M$, so ist auch $B \prec M$.
Ist $B \succ A$ „ $A \succ M$, „ „ „ $B \succ M$.

IV. Zahlen.

1. Bei der Schaffung des Zahlbegriffs gehe ich aus von einer beliebigen endlichen Menge A und gebe dieser einen Namen oder ein Attribut α, das ich ihre Zahl nenne, und setze dabei fest, daß jede mir etwa vorkommende, mit A äquivalente Menge denselben Namen α haben soll, daß aber dieser Name auch nur den mit A äquivalenten Mengen zukommen soll

Gehe ich statt von A von einer mit A äquivalenten Menge A' aus und gebe dieser den Namen α, so erhält A denselben Namen. Dieses α heißt dann die gemeinschaftliche Zahl aller mit A äquivalenten Mengen. Es ist hiernach die Zahl nicht aufzufassen als die Gesamtheit oder die Menge aller mit A äquivalenten Mengen; denn diese Menge kenne ich nicht. Es ist α die Idee der durch A bestimmten Klasse, wenn ich irgend zwei äquivalente Mengen als derselben Klasse angehörig bezeichne. Die Bedürfnisse des Lebens zwingen uns zur Bildung dieser Ideen und die einfachsten von ihnen, „eins“, „zwei“, „drei“ sind jedem Kind geläufig und auch im vorhergehenden benutzt.

2. Sind A und B irgend zwei endliche Mengen, und α, β ihre Zahlen, so setzen wir

1) $\alpha = \beta$, wenn $A \sim B$ (α gleich β)
2) $\alpha < \beta$, „ $A \prec B$ (α kleiner als β)
3) $\alpha > \beta$, „ $A \succ B$ (α größer als β).

Die Zahlen sind hierdurch der Größe nach geordnet und zwar mit Größencharakter (I, 2.).

Alphabetisches Register.

Die Zahlen geben die Seiten an.